गणितम्

$(-10) + (92) + (84) + (-15)$
$= (-10) + (-15) + 92 + 84$
$= (-25) + 176 = 151$

गणितम्

षष्ठ-कक्षायाः कृते पाठ्यपुस्तकम्

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

मार्चमासः 2012 इत्यस्मात् संस्करणात्
अस्माभिः संस्कृतानुवादः कृतः ।

आमुखः

राष्ट्रिय-पाठ्यचर्यायाः रूपरेखा (2005) बोधयति यत् छात्राणां विद्यालयजीवन-बाह्यजीवनयोः मध्ये सम्बन्धः प्रकल्पनीयः इति । सः सिद्धान्तः पुस्तकीय-ज्ञानस्य तस्याः परम्परायाः विपरीतम् अस्ति यत् यस्य प्रभावद्वारा अस्माकं व्यवस्था एतावत्पर्यन्तं विद्यालय-गृहयोः मध्ये महतः अन्तरस्य संरक्षणं करोति । नूतन- पाठ्यचर्या-आधारितः पाठ्यक्रमः पाठ्यपुस्तकं च अस्य पारम्परिक-विचारस्य उपरि अवधानं यच्छति । एषः तु पारम्परिक-रटना-प्रकारं परित्यज्य प्रत्येकम् अपि विषयस्य दृढ-भित्ति-निर्माणस्य प्रयत्नः अस्ति । आशा अस्ति यत् अयं प्रयत्नः बालकेन्द्रित-शिक्षणं प्रति अस्मान् नेष्यति इति ।

अस्य प्रयत्नस्य सफलता तु प्राचार्यैः शिक्षकैः च छात्राणाम् उत्साहवर्धनार्थं स्व-अनुभव-स्वाध्यायद्वारा अपि च स्व-कल्पनाद्वारा स्वीकरिष्यमाण-क्रमाणाम् उपरि एव वर्तते । अस्माभिः अङ्गीकर्तव्यं यत् यदि छात्रेभ्यः स्थानं,समयः स्वतन्त्रता च दीयते तर्हि ते ज्येष्ठानां साहाय्येन नूतनं ज्ञानम् आत्मसात् कुर्वन्ति । शिक्षणस्य आधारभूततत्त्वानां विविध-सामग्रीणां विचारान् परित्यज्य यत् पुस्तकनिर्माणं भवति तत्तु परीक्षानिमित्तमात्रम् अस्ति । सर्जनात्मकतायाः उपक्रमस्य विकासः तदा एव सफलो भवति यदा शिक्षकाः छात्राणां कृते ग्रहणस्य अर्जनस्य च अवसरं प्रदीयेरन् ।

एतानि उद्देश्यानि विद्यालयस्य दैनिकजीवनस्य कार्यप्रकारस्य च अधिकाधिक-परिवर्तनम् अपेक्षन्ते । दैनिकसमयसारिण्याः नमनीयता तथा स्यात् यथा शिक्षणस्य कृते यावन्ति दिनानि अपेक्षितानि इति मनसि निधाय वर्षिकसमयसारिणी निर्मिता भवेत् । शिक्षण-मूल्याङ्कन–विधयः अस्य अंशस्य निर्धारणं कुर्वन्ति येन पाठ्यपुस्तकेन छात्राः मानसिक-खिन्नतां, पठने च आलस्यं परित्यज्य सन्तोषकर-अनुभवं प्राप्नुयुः। बालमनोविज्ञानं मनसि निधाय छात्राणां भारानुभवस्य परिमार्जनार्थम् उपलब्ध-समयस्य-उपरि अवधानं दत्वा पुस्तकमिदं निर्मितमस्ति । पाठ्यपुस्तकमिदं एतत् प्रयत्नम् इतोऽपि अग्रे नेतुं छात्राणां चिन्तन-विचाराणां, विस्मयानां, लघुसमूहे वार्तालापानाम् एवं हस्तेन क्रियमाण-गतिविधीनां च प्राधान्यं प्रयच्छति ।

एन्.सी.ई.आर्.टी. अस्य पुस्तकस्य निर्माणार्थं निर्मित-समितेः परिश्रमस्य कृते कृतज्ञतां समर्पयति । पाठ्य-पुस्तक-परामर्श-समितेः अध्यक्षस्य प्रो.जयन्त विष्णु नारलीकर महोदयस्य कृते एवं च अस्य पुस्तकस्य मार्गदर्शकस्य डा.हृदयकान्त दीवान महोदयस्य कृते विशेषतः वयं कृतज्ञताम् अर्पयामः । अस्य पाठ्य-पुस्तकस्य विकासे नैकानां शिक्षकाणां योगदानं वर्तते अपि च तस्य उद्देश्यस्य परिपूर्तये तेषां प्राचार्याणाम् अपि योगदानम् अस्ति । अतः अत्र सर्वेषां कृते कृतज्ञतां व्याहरामः । यानि च सङ्घटनानि स्व-संसाधनद्वारा सामग्रीद्वारा सहयोगिनां द्वारा च औदार्येण साहाय्यं कृतवन्तः तेभ्यः सर्वेभ्यः कृतज्ञतां व्याहरामः । वयं विशेषतः माध्यमिक-उच्चतर-शिक्षाविभागः, मानव-संसाधन-विकास-मन्त्रालयद्वारा प्रो.मृणाल मिरी अपि च प्रो.जी.पी.देशपाण्डे महोदययोः आध्यक्षे नियुक्तायाः राष्ट्रिय-मानीटरिङ्ग-समितेः द्वारा प्रदत्तसमयस्य योगदानस्य च कृते कृतज्ञतां वदामः । व्यवस्थायाम् अपि च स्व-प्रकाशने निरन्तर-गुणात्मकतामानेतुं एन्.सी.ई.आर्.टी. सर्वदा भवतां मार्गदर्शनं टिप्पणीः च स्वागतीकरोति येन अग्रिम-संशोधने पुस्तक-निर्माणे च साहाय्यं भवेत् ।

निदेशकः
राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धानम् एवञ्च

नवदेहली
प्रशिक्षण
20 डिसेम्बर् 2005

भारतीय-संविधानम्

उद्देशिका

वयं भारतीयाः, भारतदेशम् एकं **[सम्पूर्ण-प्रभुत्व-सम्पन्नम्, समाजवादि, पंथ-निरपेक्षम्, लोकतन्त्रात्मक-गणराज्यं]** निर्मातुं तथा च तस्य समस्तनागरिकानां कृते;

सामाजिकम् आर्थिकं तथा च राजनैतिकं
न्यायम्, विचारस्य, अभिव्यक्तेः, विश्वासस्य,
धर्मस्य, उपासनायाः च **स्वतन्त्रताम्**, प्रतिष्ठायायाः
अवसरस्य च **समतां** प्रापयितुं तथा च तेषु **सर्वेषु**
मानवीयगौरवस्य तथा च **[राष्ट्रियैकतायाः**
अखण्डतायाश्च] सुनिश्चयकर्त्रीं बन्धुतां
संवर्धयितुं

दृढसंकल्पाः भूत्वा **अस्यां स्वसंविधानसभायाम्** अद्य नवम्बरमासस्य 26 तमे दिनाङ्के 1949 तमे ख्रीस्ताब्दे (मार्गशीर्षे शुक्लसप्तम्यां 2006 तमे विक्रमसंवत्सरे) **एतत् संविधानम् अङ्गीकुर्मः अधिनियमितं तथा च आत्मार्पितं कुर्मः।**

शिक्षाकाणां कृते टिप्पणी

अस्माकं जीवने गणितस्य बहु-महत्त्वं विद्यते । गणितं तु न केवलम् अस्माकं दैनिक-कार्येषु साहाय्यं करोति परं तर्कपूर्ण-विवेचनस्य, अमूर्तचिन्तनस्य कल्पनाशीलतायाः विकासे अपि साहाय्यं करोति । इदं समृद्धजीवनस्य तथा चिन्तनस्य नूतन-आयामानां परिचयं करोति । गहन-सिद्धान्तानां शिक्षणे सङ्घर्ष-तर्काणाम् अधिगमनस्य निर्माणस्य च बलं वर्धयति एवं सङ्कल्पनानां मध्ये परस्पर-सम्बन्ध-अवगमनार्थम् अपेक्षित-शक्तिं उत्पादयति । अस्माकं समृद्धं ज्ञानम् अन्यविषयाणाम् अवगमने अपि साहाय्यं करोति । परं प्रतिमानानां, मानचित्राणां, क्षेत्र-मूल्याङ्कनस्य आयतनस्य च अवगमनाय अथ आकृतेः आकारस्य च मध्ये स्थित-समानतायाः विषये ज्ञानम् अभिजनयति । गणितस्य व्याप्तिः तु अस्माकं जीवने तथा पर्यावरणे च प्रसृता अस्ति । सम्भावितेषु सर्वविधक्षेत्रेषु अस्य सम्बन्धस्य प्रकाशनम् अनिवार्यम् अस्ति ।

गणित-शिक्षणस्य तात्पर्यं न केवलं समस्यानां समाधानस्य रटनं किन्तु कथं च तासां समस्यानां समाधानकरणम् इत्यस्य अवगमनम् अपि वर्तते । वयं तु आशास्महे यत् भवन्तः शिक्षकाः स्व-छात्राणां कृते स्वयमेव प्रश्न-निर्माणे प्राचुर्येण अवसरं दद्युः इति । वयं विश्वसिम अयम् एकः उत्तम विचारः भविष्यति यत् यावत्पर्यन्तं छात्राः प्रश्नं कर्तुं पारयेयुः तावत्पर्यन्तं छात्रेभः अनेकानेक-प्रश्न-निर्माणार्थम् अवसरः प्रदीयेत । इयं प्रक्रिया छात्राणां कृते गणित-सिद्धान्तानां सम्भावनानां च विकासकर्मणि साहाय्यं करोति । यथा यथा ते आगतानां समस्यानां विषये आत्मविश्वासं प्रदर्शयन्ति तथा तथा ते विविधतापूर्णानां जटिल-समस्यानां निर्माणे अपि समर्थाः भविष्यन्ति ।

गणित-कक्ष्या तु जीवपूर्णा आकर्षणीया च स्यात् यत्र छात्राः स्व-ज्ञानस्य सङ्कल्पनानां सुस्पष्टतां प्राप्नुवन्ति, प्रतिकृतीनां (माँडेल्) निर्माणे स्पष्टकल्पनां प्राप्नुवन्ति, परिभाषाणां विकासं लभन्ते च । भाषा-गणिताधिगमयोः मध्ये दृढतर-सम्बन्धः वर्तते परं च कक्ष्यायां छात्राणां कृते गणित-सम्बन्धि-विचाराणां विषये भाषणार्थं सम्पूर्ण-अवसरः प्रकल्प्येत एवं कक्ष्यायां सम्भविष्यमाण-सर्वविध-परिचर्यया सह छात्रानुभवानां संयोजनमपि करणीयम् ।

प्रथमं तावत् तेषां कृते स्व-भाषाणाम् उपयोगे अवरोधः न कर्तव्यः किन्तु शनैः शनैः औपचारिकभाषायाः स्थापनम् अपि अनिवार्यं भवति । विद्यालयेऽपि प्रत्येकम् अवसरः अवकाशश्च सुनिश्चितः स्यात् यत्र छात्राः पाठ्य-पुस्तके अधीतविषयेषु प्राप्त-स्वानुभव-सुविचाराणाम् आदान-प्रदानादिकं कुर्युः । समूहे पुस्तकपठनस्य अवसरः भवेत् अपि च तेन छात्रः कीदृशविचारस्य अवधारणं कृतवान् इत्यस्यापि प्रकटनं कर्तुं प्रोत्साहः प्रदेयः ।

गणितस्य कृते अमूर्तकल्पनानाम् आवश्यकता भवति । गणितं तु वैशिष्ट्यपूर्ण-विद्या अस्ति यया छात्रः तर्कपूर्ण-विवेचनाधारितं परिणामं प्राप्य सूत्रे योजयति प्रमाणयति च । सारांशे पठितुं प्रथमतः छात्राणां कृते दृढतर-अध्ययन-सामग्रीणाम्, अनुभवानां तथा ज्ञात-पाठानाम् आवश्यकता भवति । तेषां कृते तादृश-वस्तूनि देयानि किन्तु एतदपि अवधेयं यत् ते तेषामेव वस्तूनाम् उपरि सर्वदा अवलम्बिताः मा भवेयुः । एतत्तु स्पष्टमस्ति यत् पुस्तकमिदं साक्ष्य-परीक्षणयोः मध्ये अन्तरं बोधयति । द्वयमपि एतद् भ्रमजनकम् अस्ति इति वयं एतयोर्मध्ये अन्तरं रक्षितुं प्रयतामहे ।

अत्र तु बहवः एतादृश-अवसराः प्रदत्ताः सन्ति यत्र छात्राः सिद्धान्तानां प्रतिमानानां च परीक्षणं करिष्यन्ति तथा अपवादभूतानाम् अंशानाम् अन्वेषणे अपि समर्थाः भविष्यन्ति । अत एव यत्र एकस्मिन्

पक्षे वयं छात्राणां पक्षतः आशास्महे यत् ते प्रतिमानं अवलोकयेयुः तथा सूत्रबद्धं कुर्युः तत्रैव अपरस्मिन् पक्षे ते सूत्रबद्धतायाम् अपवादं जानीयुः एवं नूतनपरिष्ठितौ प्रतिमानानां व्यापकतां, तेषां वैधता-अन्वेषणं कुर्युः । गणितविचाराणाम् अध्ययनस्य इदमपि एकम् अनिवार्यम् अङ्गं भवति, अतः यदि भवन्तः एवं स्थानं प्राप्नुवन्ति यत्र छात्राणाम् कृते एतादृशाः अभ्यासाः भवितुम् अर्हन्ति तर्हि एतत् उपयोगितापूर्णं भविष्यति। स्वयमेव समस्यानां समाधानम् अन्विष्य प्राप्त-समाधानानां प्रदर्शनमपि कर्तुं बहवः अवसराः प्रदेयाः भवन्ति । वयं तु आशास्महे यत् भवन्तः छात्रेभ्यः तादृश-अवसरान् प्रदास्यन्ति यैः ते विभिन्नविचाराणां विषये तर्कपूर्ण-समर्थनं प्रदद्युः पुनः ते समर्थनस्य अनुपालनं कुर्युः अपि च समर्थने या कापि न्यूनता भवति तस्याः अपि शोधनं कर्तुं समर्थाः भवेयुः । इदं प्रामुख्यं भवति यत् तेषाम् अन्तरङ्गे किञ्चित् प्रमाणयितुं यत् ज्ञानमपेक्षितं तस्य ज्ञानस्य क्षमता-उत्पादनं तथा सन्निहित-सङ्कल्पनानां विषये आत्मविश्वासः वर्धेत ।

अपेक्षा अस्ति यत् भवतां गणित-कक्ष्या पुरातन-समस्यानाम् उत्तरस्य अन्वेषणमात्रं न बोधयेत् किन्तु नूतन-नूतन-विषयाणां गवेषणं तथा तेषु क्रियात्मकतां समुत्पादयेत् । गणितकक्ष्या सर्वदा अपि ज्ञात-विषयाणाम् अन्धानुकरणार्थं नास्ति परन्तु समस्यानां समाधानं कर्तुं नूतन-मार्गाणाम् अन्वेषणार्थं वर्तते । समस्यानां समाधानार्थं पर्याय-क्रमावलीः नूतनतन्त्रान् च आत्मसात् कर्तुं प्रोत्साहः देयः । भवन्तः अपि एतादृशानां समस्यानां योजनं कर्तुं प्रभवन्ति याः समाधातुं विविधमार्गाः भवन्ति यासां साहाय्येन छात्राः गणितम् अवगन्तुम् इतोऽपि स्फूर्तिं प्राप्नुवन्ति ।

सर्वेषाम् अध्यायानां मध्ये एकस्मात् अपरं प्रति सम्बन्धं रक्षितुं वयमत्र प्रयत्नं कृतवन्तः । एवं च पूर्वतन-अध्यायेषु अधिगतानाम् अंशानां अग्रिम-अध्यायस्य विचारारम्भणार्थं प्रयोगं कृतवन्तः । वयम् आशास्महे यत् भवन्तः उत्तम-अवसररूपेण अस्य प्रयोगं करिष्यन्ति अपि च उत्तरोत्तर-अभिवृद्ध्यर्थं तासाम् अवधारणानां संशोधनं करिष्यन्ति यासां कारणेन छात्राः गणितस्य सम्पूर्ण-सङ्कलनात्मक-संरचना-अवबोधने शक्ताः भवेयुः । कृपया भवन्तः ऋणात्मकसंख्याः, भिन्नाः, चराः इत्याद्याः यत् छात्राणां कृते नूतनविचाराः सन्ति तेषां प्रयोगार्थं अधिकाधिकसमयं यच्छन्तु । एषु बहवः अंशाः गणितं सम्यगध्येतुं आधारभूताः अंशाः भवन्ति ।

वयं विश्वसिम यत् अस्य पुस्तकस्य पठनेन छात्राः सन्तोषम् अनुभवन्ति इत्यतः ते प्रतिमानानां सूत्रबद्धकरणे तथा समस्यानां गवेषणे च स्वयमेव आसक्ताः भविष्यन्ति । ते गणितविषये भयं परित्यज्य आत्मविश्वसेन पठन्ति एवं च अध्ययने चर्चामाध्यमेन परस्परं साहाय्यमपि कुर्वन्ति। एतेन सह वयं आशस्महे यत् भवन्तः अपि छात्राणां कृते अवधानपूर्वकं श्रवणार्थं समयम् आविष्कुर्वन्ति तथा छात्राणां पुरतः यः विषयः अवधानेन वक्तव्यः इत्यंशमपि चिन्तयन्ति इति । एतेन सह छात्राः स्व-विचारान् स्पष्टयितुं तथा तेषां चिन्तनस्य शाब्दिक-अभिव्यक्तीकरणार्थं वा क्रियारूपेण योजयितुं वा अवसरं प्रकल्पयन्ति। अस्य पुस्तकस्य विषये ये केऽपि विचाराः परामर्शाः वा भवन्तु तान् सर्वान् वयं स्वागतीकुर्मः अपि च आशास्महे यत् भवन्तः यान् रोचक-अभ्यासान् प्रेषयिष्यन्ति यैः छात्रविकासः सञ्जायेत तान् वयम् अग्रिम-पुस्तकसंस्करणकाले योजयितुं शक्ष्यामः ।

पाठ्यपुस्तकनिर्मातृसमितिः

पाठ्यपुस्तकविकाससमितिः

अध्यक्षः, विज्ञान-गणित-परामर्श-समितिः
जे.वी.नारलीकरः, इमिरिटस्-प्रोफेस्सर्, इण्टर्-यूनिवर्सिटी सेण्टर् फार् आस्ट्रोनोमि एण्ड् आस्ट्रोफिजिक्स्
(आय्.यू.सी.सी.ए.), गणेशखिण्डः, पुणे युनिवर्सिटी, पुणे

मुख्यः परामर्शकः
डा॥ एच्.के.दीवन , विद्यभवन-सोसैटी, उदयपुरम्, राजस्थानम्

मुख्यः समन्वयकः
हुकुम् सिंहः, प्रोफेसर्, डी.ई.एस्.एम्. , एन्.सी.ई.आर्.टी. , नवदेहली

सदस्याः
अञ्जली गुप्ते, अध्यापिका, विद्याभवन-पब्लिक्-स्कूल्, उदयपुरम्, राजस्थानम्

अवन्तिका दाम, टी.जी.टी, सी.आय्.ई एक्स्पेरिमेण्टल् बेसिक् स्कूल्, डिपार्टमेण्ट् आफ् एजुकेशन्, देहली

धर्मप्रकाशः, रीडर्, सी.आय्.ई.टी., एन्.सी.ई.आर्.टी. , नवदेहली

एच्.सी.प्रधानः, प्रोफेसर्, होमीबाबा सेण्टर् फार् सैन्स् एजुकेशन्, टी.आय्.एफ्.आर्., मुम्बै, महाराष्ट्रम्

हर्ष जे. पटाडिया, सीनियर् रीडर्, सेण्टर् आफ् अद्वान्स् स्टडी इन् एजुकेशन्, एम्.एस्. यूनिवर्सिटी आफ् बरोडा, वडोदरा, गुजरात्

जबाश्री घोष्, टी.जि.टी, डि.एम्.स्कूल्, आर्.आय्.ई, एन्.सी.ई.आर्.टी. भुवनेश्वरः, ओडिशा

महेन्द्र शङ्करः, लेक्चरर्(एस्.जी)(अवकाशप्राप्तः), एन्.सी.ई.आर्.टी., नवदेहली

मीना श्रीमाली, अध्यापिका, विद्याभवन सीनियर् सेकेण्डरी स्कूल्, उदयपुरम्, राजस्थानम्

आर्.आत्मारामन्, मेथमेटिक्स् एजुकेशन् कन्सल्टण्ट्, टी.आय्.मेट्रिक् हैयर् सेकेण्डरी स्कूल् एण्ड् ए.एम्.टी.आय्, चेन्नै, तमिलुनाडु

एस्.पट्टनायकः, प्रोफेसर्, इन्स्टिट्यूशन् आफ् मेथमेटिक्स् एण्ड् अप्लिकेशन्, भुवनेश्वरः, ओडिशा

एस्.के.एस्.गौतमः, प्रोफ़ेसर्, डी.ई.एस्.एम्., एन्.सी.ई.आर्.टी. नवदेहली

श्रद्धा अगरवाल्, पी.जी.टि, सर् पदम्पत् सिङ्घानिया एजुकेशन् सेण्टर्, कानपुरम्, (उ.प्र.)
सृजाता दासः, सीनियर् लेक्चरर् (मेथमेटिक्स्), एस्.सी.ई.आर्.टी, नवदेहली
यू.बी.तिवारी, प्रोफेसर्, डिपार्टमेण्ट् आफ् मेथमेटिक्स्, आय्.आय्.टी, कानपुरम् (उ.प्र.)
उदय सिंहः, लेक्चरर्, डी.ई.एस्.एम्, एस्.सी.ई.आर्.टी, नवदेहली

सदस्य-समन्वयकाः
आशुतोश के. वाझालवरः, प्रोफेसर्, डी.ई.एस्.एम्, एस्.सी.ई.आर्.टी, नवदेहली
प्रवीण के. चौरासिया, लेक्चरर्, डी.ई.एस्.एम्, एस्.सी.ई.आर्.टी, नवदेहली

संस्कृत-अनुवादकः ?

कृतज्ञताज्ञापनम्

पुस्तकस्य अन्तिमस्वरूपाय आयोजितायाः कार्यशालायाः निम्नलिखितानां प्रतिभागिनां बहूमूल्यीयानां टिप्पणीनां विषये परिषद् कृतज्ञतां प्रकटयति। दीपकः मन्त्री, विद्याभवनम्, बेसिक-विद्यालयः उदयपुरं राजस्थानम्; शगुफ्ता अञ्जुमः, विद्याभवनं वरिष्ठमाध्यमिकविद्यालयः उदयपुरम्, राजस्थानम्, रञ्जना शर्मा, विद्याभवनं वरिष्ठमाध्यमिक-विद्यालयः उदयपुरं राजस्थानम् । परिषद् एस.सी.ई.आर.टी., छत्तीसगढम्, रायपुरस्य श्रीमता उत्पलचक्रवर्तिना प्रदत्तान् परामर्शान् प्रति तस्य कृतज्ञतां व्यक्तीकरोति।

परिषद् पाठ्यपुस्तकसमीक्षायै आयोजितायां कार्यशालायां भागगृहीतृणां निम्नलिखितानां प्रतिभागिनां बहुमूल्याय सहभागाय हार्दिकं कार्तज्ञं प्रकटयति । के.बालाजी, केन्द्रीयविद्यालयः, दोनी मलाई, कर्णाटकम्; शिवकुमारः निमेशः, टी.जी.टी., राजकीय-सर्वोदयबालविद्यालयः, दिल्ली; अजयसिंहः, टी.जी.टी., रामजस-वरिष्ठमाध्यमिकः विद्यालयः क्रमाङ्कः ०३, दिल्ली; शुचीगोयलः, हरियाणा; डा.प्रतापसिहः रावतः, प्रवक्ता, एस.सी.ई.आर.टी., गुरुग्रामः।

उदयपुरे आयोजितायां पाठ्यपुस्तक-विकास-समितेः तृतीयायां कार्यशालायां सौविध्यानि संसाधनानि च प्रदातुं परिषद् विद्याभवनम्, सोसायटी, उदयपुरम् इत्यस्य तथा च संकायसदस्यानां कृतज्ञा अस्ति। पुस्तकालयस्थाय साहाय्याय निदेशकः विज्ञानशिक्षाकेन्द्रस्य एवं च शिक्षा (C-SEC) दिल्लाविश्वविद्यालयः इत्येतं प्रति अपि परिषद् कृतज्ञतां प्रकटयति।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी. इत्यत्र हिन्दीरूपान्तरणस्य पुनरावलोकनाय आयोजितायां कार्यशालायां निम्नभागिनां बहुमूल्यीयानां टिप्पणीनां कृते कृतज्ञा अस्ति । अजयकुमारसिंहः, रामजस-वरिष्ठ-माध्यमिकः विद्यालयः क्रमाङ्कः ०३ चान्दनीचतुष्पथम्, दिल्ली; बी.एम.गुप्ता, डायरेक्टरेट् ऑफ् शिक्षा, दिल्ली (अवकाशप्राप्तः)।

अस्य पाठ्यपुस्तकस्य संशोधितायाः आवृत्तेः हिन्दीरूपान्तरणाय परिषद् महेन्द्रशङ्करः, प्रवक्ता (सिलेक्शनग्रेड) (अवकाशप्राप्तः), एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहल्याः प्रति कृतज्ञतां ज्ञापयति।

शैक्षिकाय प्रशासनिकाय च साहाय्याय परिषद् प्रोफेसर् हुकुमसिंहः, विभागप्रमुखः, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. इत्यस्य अपि कृतज्ञा अस्ति । एतत् अतिरिच्य परिषद् सरिता किमोठी, नरेशकुमारः विजयकौशलः डी.टी.पी. ऑपरेटर्; अवधकिशोरः सिंहः, पुस्तकसम्पादकः, एन.सी.ई.आर.टी इत्येतेषाम् एवं च प्रशासनस्य प्रकाशनविभागस्य च साहाय्याय हार्दं कार्तज्ञ्यं प्रकटयति।

अनुवादकः – गणेशहेगडे

विषय-सूची

आमुखम् –		III
शिक्षकाणां कृते टिप्पणी		V
अध्यायः 1	अस्माकं संख्यानां ज्ञानम्	1
अध्यायः 2	पूर्ण-संख्याः	29
अध्यायः 3	संख्याभिः सह क्रीडनम्	48
अध्यायः 4	मूलभूत-ज्यामितीय-अवधारणा	74
अध्यायः 5	मूलभूत-आकाराणां ज्ञानम्	94
अध्यायः 6	पूर्णः	124
अध्यायः 7	भिन्नः	145
अध्यायः 8	दशमांशः	177
अध्यायः 9	दत्तांशानां प्रबन्धनम्	198
अध्यायः 10	क्षेत्रमितिः	221
अध्यायः 11	बीजगणितम्	240
अध्यायः 12	अनुपातः समानुपातः च	264
अध्यायः 13	सममितिः	282
अध्यायः 14	प्रायोगिक-ज्यामितिः	295
	उत्तरमाला	315
	बौद्धिक-व्यायामः	338

भारतस्य संविधानम्

भागः-3 (अनुच्छेदः 12-35)

(अनिवार्य-नियमः , कश्चिदपवादः तथा युक्तियुक्तनिर्बन्धाधीनः)

द्वारा प्रदत्तः

मूलभूत-अधिकारः

समताया अधिकारः

- विधेः समक्षं तथा विधीनां समानं संरक्षणम्
- धर्मस्य, मूलवंशस्य, जातेः, लिंगस्य अथवा जन्मस्थानस्य आधारे
- लोकनियोजन-विषये
- अस्पृश्यतायाः उपाधीनाञ्च अन्तः

स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अभिव्यक्तेः, सम्मेलनस्य, संघस्य, सञ्चरणस्य, निवासस्य, वृत्तेश्च स्वातन्त्र्यम्
- अपराधानां कृते दोष-सिद्धि-सम्बन्धे संरक्षणम्
- प्राणानां दैहिक-स्वतन्त्राणाञ्च संरक्षणम्
- षड्तः चतुर्दशवर्षपर्यन्तानां बालानां कृते निःशुल्क-अनिवार्य-शिक्षा
- कासुचित् दशासु बन्धनात् निरोधनाच्च संरक्षणम्

शोषणविरुद्धाधिकारः

- मानवानां दुर्व्यापारस्य बलपूर्वकश्रमस्य च प्रतिषेधः
- परिसंकटमयकार्येषु बालानां नियोजन-प्रतिषेधः

धर्मस्य स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अन्तःकरणस्य तथा धर्मस्य अबाधरूपेण आमाननस्य, आचरणस्य, प्रचारस्य च स्वतन्त्रता
- धार्मिककार्याणां प्रबन्धस्य स्वतन्त्रता
- कस्यापि विशिष्ट-धर्मस्य अभिवृद्धये करदान-सम्बन्धे स्वतन्त्रता
- राज्यनिधितः पूर्णतः पोषित-शिक्षासंस्थासु, धार्मिक-शिक्षायां, धार्मिक-उपासनायाञ्च उपस्थिति-सम्बन्धे स्वातन्त्रता

संस्कृति-शिक्षा-सम्बन्धाधिकारः

- अल्पसंख्यक-वर्गाणां स्वभाषा-लिपि-संस्कृति-विषयकाणां हितानां संरक्षणम्
- अल्पसंख्यक-वर्गद्वारा स्वशिक्षा-संस्थानानां स्थापनं प्रशासनञ्च

संवैधानिक-उपचाराणाम्-अधिकारः

- उच्चतम-न्यायालयस्य , उच्च-न्यायालयस्य च निर्देशम् आदेशम् अथवा रिटद्वारा प्रदत्त-अधिकारं प्रवर्तयितुम् उपचारः

सङ्ख्यानां विषये जानीमः

अध्यायः 1

1.1 भूमिका

अधुना वस्तूनां गणनम् अस्माकं कृते सरलम् अस्ति । अधुना वयं बृहत्-संख्याभिः वस्तूनां गणनां कुर्मः । यथा कस्यचित् विद्यालयस्य छात्रसङ्ख्या सा च छात्रसङ्ख्या सङ्ख्याङ्कैः प्रस्तौतुं शक्यते । वयं उपयुक्तसङ्ख्या-नाम्भिः अपि दीर्घ-संख्य-अङ्कान् निरूपयितुं शक्नुमः ।

एवं नास्ति यत् वयं प्राचीनकालादेव बृहत्-संख्यानां माध्यमेन दैर्घ्य-प्रतिपादनाय च दीर्घ-सङ्केतानां प्रयोगं कुर्मः स्म । सहस्राधिकेभ्यः वर्षेभ्यः पूर्वं जनाः केवलं लघु-संख्यानां विषये एव जानन्ति स्म । शनैः शनैः ते बृहत्-संख्यानां विषये ज्ञातवन्तः । ते बृहत्-संख्यानां अभिव्यक्तये सङ्केतानाम् उपयोगमपि अवगतवन्तः । उपर्युक्तं सर्वं मनुष्यद्वारा कृतेन सामूहिक-प्रयासेन एव सञ्जातम् । आरम्भिके काले ये मनुष्याः सङ्ख्यानां विषये अवगन्तुं यं मार्गम् आश्रितवन्तः सः मार्गः (उपायः) वा तावान् सरलः न आसीत् । ते सम्पूर्णे अपि अस्मिन् सङ्ख्यासम्बद्धे प्रक्रमे अतीव सङ्घर्षं कृतवन्तः । वस्तुतः सम्पूर्ण-गणितस्य विकासप्रक्रिया अनेन प्रकारेण एव सञ्जाता इति अवन्तुं शक्यते । यथा यथा मानवविकासः जातः तथा तथा गणित-विकासस्य आवश्यकता अनुभूता । परिणामतः गणित-विकासः अपि वेगेन सञ्जातः ।

वयं संख्यानां प्रयोगं कुर्मः तासां विषये च नैकानि तथ्यानि अवगच्छामः। संख्याः प्रत्यक्ष-वस्तूनां गणने अस्मान् उपकुर्वन्ति । संख्याः अस्मिन् विषये अस्मान् उपकुर्वन्ति यत् कतरः वस्तु-सङ्ग्रहः अधिकतरः अस्ति तथा च वस्तूनि क्रमशः स्थापयितुं तद्यथा प्रथमद्वितीयादिक्रमेण प्रस्तौतुं च अपि अस्माकं साहाय्यं कुर्वन्ति । संख्याः विभिन्न-सन्दर्भेषु पुनश्च अनेक-प्रकारेण प्रयुज्यन्ते । विभिन्न-स्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यत्र वयं संख्यानाम् उपयोगं कुर्मः । अपि च तादृशीनां पञ्चानां विभिन्न-लेखनं कुर्वन्तु यत्र वयं सङ्ख्यानां प्रयोगं कुर्मः ।

वयं पूर्व-कक्ष्यासु संख्याभिः सह कार्यकरणेन आनन्दम् अनुभूतवन्तः । अनेन सहैव वयं योगस्य (+), व्यवकलनस्य (-), गुणनस्य (x) विभाजनस्य (÷) च अपि अध्ययनं कृतवन्तः । वयं संख्या-अनुक्रमेषु (sequences) प्रतिरूपाणि (patterns) दृष्टवन्तः अपि च संख्याभिः सह नैकान् रुचिपूर्णान् प्रक्रमान् क्रियाकलापान् वा सम्पादितवन्तः । अस्मिन् अध्याये वयं स्वल्पसमीक्षणेन पुनरवलोकनेन च सह रुचिपूर्णतथ्येषु इतोऽपि चर्चां करिष्यामः ।

1.2 सङ्ख्यानां परस्परं तुलना

वयं तु पूर्वमपि संख्यानां तुलनांपरस्परं तुलनां कृतवन्तः, आयान्तु, अधुना पश्यामः यत् किं वयं स्मरामः यत् अधोलिखितासु सङ्ख्यासु बृहत्तमा संख्या का अस्ति ?

(i) 92, 392, 4456, 89742

अहमेव बृहत्तमा

(ii) 1902, 1920, 9201, 9021, 9210

अहमेव बृहत्तमा

आम्, वयम् अत्र उत्तरं जानीमः ।

मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु, अवजानन्तु च यत् ते कस्मिन् अपि सङ्ख्यासमूहे बृहत्तमां संख्यां केन प्रकारेण परिचिन्वन्ति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

किं भवन्तः शीघ्रं वक्तुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं पङ्क्तिषु का बृहत्तमा संख्या अस्ति तथा च का लघुतमा संख्या अस्ति इति ?

1. 382, 4972, 18, 59785 ,750 — उत्तरम् : 59785 इति सङ्ख्या बृहत्तमा अस्ति, 18 इति सङ्ख्या लघुतमा अस्ति ।
2. 1473, 89423, 100, 5000, 310 — उत्तरम् : _____
3. 1834, 75284, 111, 2333, 450 — उत्तरम् : _____
4. 2853, 7691, 9999, 12002, 124 — उत्तरम् : _____

किमिदं सरलम् आसीत् ? कथं सरलम् आसीत् ?

अत्र तु वयं केवलं संख्याः दृष्ट्वा उत्तरं ज्ञातवन्तः । बृहत्तमायां संख्याया सहस्रेषु सहस्रसङ्ख्या दीर्घतमा आसीत् लघुतम-सङख्यासु शतेषु शतम् इति सङ्ख्या दशसु च दश इति सङ्ख्या आसीत् ।

एतम् एव मार्गम् आश्रित्य इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् रचयन्तु तान् प्रश्नान् च समाधातुं मित्रेभ्यः प्रयच्छन्तु ।

अधुना, 4875, 3542 इति एतयोः सङ्ख्ययोः मध्ये वयं कथं तुलनांतुलनां कुर्मः ?

अत्र एतत् कार्यं बहुकठिनं नास्ति । पूर्वोक्तयोः द्वयोः सङ्ख्ययोः मध्ये अङ्कानां सङ्ख्या समाना अस्ति । एते द्वे सङ्ख्ये सहस्रेषु स्तः । परन्तु 4875 इत्यस्य सहस्रस्थानस्य अङ्कः, 3542 इत्यस्य सहस्रस्थानस्य अङ्कात् अपि बृहत्तरः वर्तते। अतः 4875 इति सङ्ख्या एव 3542 इति सङ्ख्यायाः अपेक्षया बृहत्तमा संख्या अस्ति ।

अधुना वदन्तु यत् 4875 , 4542 इति अनयोः सङ्ख्ययोः का सङ्ख्या वृहत्तरा अस्ति ? अत्रापि द्वयोः सङ्ख्ययोः अङ्कानां सङ्ख्या समाना अस्ति । अनेन सहैव, द्वयोः मध्ये सहस्रस्य स्थाने समानः अङ्कः अस्ति अधुना वयं किं कुर्मः ? वयम् अग्रिमम् अङ्कं प्रति गच्छामः, अर्थात् शतस्य स्थाने आगम्यमानम् अङ्कं पश्यामः । 4875 इत्यत्र शतं स्थानीयः अङ्कः, 4542 इत्यस्मात् शतं स्थानीयात् अङ्कात् अधिकः अस्ति । अतः 4542 इति सङ्ख्यातः 4875 इति सङ्ख्या अधिका अस्ति । यदि संख्याद्वये शतं स्थानीयौ अङ्कौ अपि समानौ स्यातां तर्हि वयं किं कुर्यास्म ?

4875,4889 इति एतयोः सङ्ख्ययोः मध्ये परस्परं तुलनांतुलनां कुर्वन्तु।
4875,4879 इति एतयोः सङ्ख्ययययोः मध्ये तुलनांतुलनां कुर्वन्तु।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

प्रत्येकं समूहे बृहत्तमां संख्यां लघुतमां संख्यां च अन्वेषयन्तु।

a) 4536, 4892, 4370, 4452 b) 15623, 15073, 15189, 15800

c) 25286, 25245, 25270, 25210 d) 6895, 23787, 24569, 24659

इतोऽपि एवं विधान् पञ्चप्रश्नान् रचयन्तु समाधानाय च स्वीयमित्रेभ्यः यच्छन्तु।

1.2.1 भवन्तः कतीनां संख्यानां निर्माणं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

कल्पनां कुर्वन्तु यत् अस्माकं समीपे 7, 8, 3 तथा च 5 इत्येते अङ्काः सन्ति। एतान् अङ्कान् स्वीकृत्य अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं भिन्न-भिन्न-संख्यां रचयितुं वयं केनचित् आदिष्टाः या भिन्नाङ्कात्मकी सङ्ख्या अस्माभिः रचिता,तत्र कश्चन अपि समानः अङ्कः वारद्वयं न आगच्छेत् तथा करणीयम्। अनेन प्रकारेण, 7835 इति संया तु रचयितुं शक्यते किन्तु 7735 इति सङ्ख्या नैव। एतैः चतुर्भिः अङ्कैः यावत्यः सङ्ख्याः रचयितुं शक्यन्ते, तावतीः रचयन्तु।

भवद्भिः का बृहत्तमा सङ्ख्या लब्धा, का च लघुतमा संख्या लब्धा ? अत्र बृहत्तमा तु 8753 इति अस्ति लघुतमा तु 3578 इति अस्ति। द्वयोः मध्ये विद्यमान-अङ्कानां क्रमस्य विषये चिन्तयन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् प्रदत्तेषु अङ्केषु बृहत्तमा सख्या कथम् अवगन्तुं शक्यते ?अवगमनाय प्रयुक्तां प्रक्रियां लिखन्तु।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. पुनरावृत्तिं विना, प्रदत्ताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं बृहत्तमां लघुतमां च संख्यां रचयन्तु।
   a) 2, 8, 7, 4 b) 9, 7, 4, 1 c) 4, 7, 5, 0 d) 1, 7, 6, 2 e) 5, 4, 0, 3
   (**सङ्केतः** – 0754 इयं तु अङ्कत्रयात्मिकी संख्या अस्ति।)
2. अधुना कस्यचित् एकस्य अङ्कस्य वारद्वयं प्रयोगं कृत्वा अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं बृहत्तमाः लघुतमाः च संङ्ख्याः निर्मान्तु।
   a) 3, 8, 7 b) 9, 0, 5 c) 0, 4, 9 d) 8, 5, 1
   (**सङ्केतः** – प्रत्येकं स्थितौ चिन्तयन्तु यत् भवन्तः, कस्य अङ्कस्य वारद्वयं प्रयोगं करिष्यन्ति।)
3. प्रदत्तैः प्रतिबन्धैः सह, केषाञ्चित् चतुर्णाम् अङ्कानां प्रयोगं कृत्वा, अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं बृहत्तमां लघुतमां च संख्यां लिखन्तु।
   a) 7 इति अङ्कः सर्वदा एकके स्थाने भवेत्। बृहत्तमा

9	8	6	7

   लघुतमा

1	0	2	7

   (सावधानं पश्यन्तु, '0' इत्यङ्कात् संख्यायाः प्रारम्भः न भवितुं शक्नोति। किमर्थम् ?)

b) 4 इति अङ्कः सर्वदा दशकस्य स्थाने भवेत् ।

c) 9 इति अङ्कः सर्वदा शतकस्य स्थाने भवेत् ।

d) 1 इति अङ्कः सर्वदा सहस्रस्य स्थाने भवेत् ।

बृहत्तमा			4	
लघुतमालघुतमा			4	
बृहत्तमा			9	
लघुतमा			9	
बृहत्तमा			1	
लघुतमा			1	

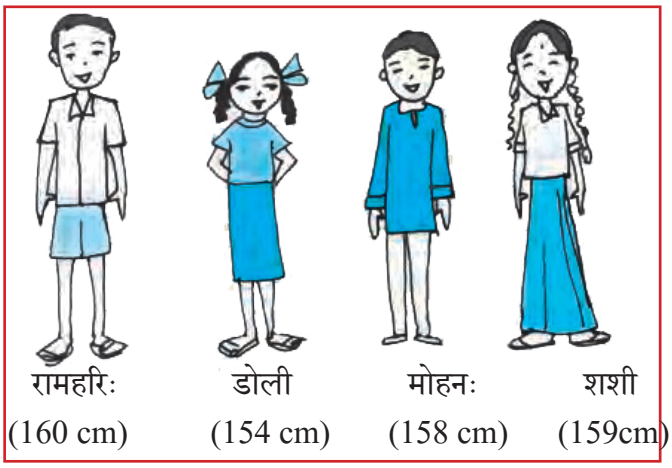
4) कल्पनां कुर्वन्तु भवन्तः अङ्कद्वयं तद्यथा - 2, 3 इति अकौ स्वीकुर्वन्ति । अधुना अङ्कद्वयस्य अपि समानरूपेण आवृत्तिं कृत्वा अङ्कचतुष्टयात्मिकीः सङ्ख्याः रचयन्तु । सङ्ख्यासु कतमा सङ्ख्या वृहत्तमा अस्ति ? कतमा च सङ्ख्या लघुत्तमा अस्ति ? भवन्तः एतादृशीः आहत्य कति सङ्ख्याः रचयितुं शक्नुवन्ति ?

समुचिते क्रमे स्थापनम् ।

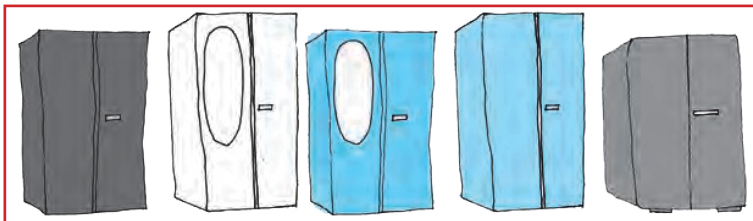
1. एतेषु कः उन्नततमः ?
2. एतेषु कः वामनतमः ?

a) किं भवन्तः एतान् एतेषाम् औन्नत्य-क्रमानुसारं स्थापयितुं शक्नुवन्ति ?

b) किं भवन्तः एतान् बालान् तेषाम् औन्नत्यस्य व्यवकलन-क्रमे स्थापयितुंशश नियोजयितुं शक्नुवन्ति ?



रामहरिः (160 cm) डोली (154 cm) मोहनः (158 cm) शशी (159cm)



2635 रू. 1897 रू. 2854 रू. 1788 रू. 3975 रू.

किं क्रेतव्यम् ?

रीता सोहनः च कपाटिकां क्रेतुं गतवन्तौ । तत्र बह्व्यः कपाटिकाः मूल्यचिटिकया सह राराजन्ते स्म ।

a) किं भवन्तः ताः कपाटिकाः मूल्यानुसारेण आरोहक्रमे स्थापयितुं शक्नुवन्ति ?

b) किं भवन्तः ताः कपाटिकाः मूल्यानुसारेण अवरोहक्रमे स्थापयितुं शक्नुवन्ति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

भवन्तः इतोऽपि एवंविधान् पञ्चप्रसङ्गान् चिन्तयन्तु यत्र भवन्तःत्रयाणाम् अथवा ततोऽधिक-चयानां मध्ये तुलनां कुर्वन्ति ।

आरोह-क्रमः – लघुतमात् आरभ्य बृहत्तमपर्यन्तं क्रमशः वस्तूनां सङ्ख्यानां वा स्थापनम् ।

अवरोह-क्रमः – बृहत्तमात् आरभ्य लघुतमपर्यन्तं क्रमशः वस्तूनां सङ्ख्यानां वा स्थापनम् ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अधोलिखितसंख्याः आरोहक्रक्रम-अनुसारं व्यवस्थित-रूपेण स्थापयन्तु ।
   a) 847, 9754, 8320, 571
   b) 9801, 25751, 36501, 38802
2. अधोलिखितसंख्याः अवरोहक्रम-अनुसारं व्यवस्थित-रूपेण स्थापयन्तु ।
   a) 5000, 7500, 85400, 7861 b) 1971, 45321, 88715, 92547

एवमेव आरोह-अवरोह-क्रम-अनुसारं इतोऽपि दश उदाहरणानि सङ्गृह्य तेषां आरोह-अवरोह-क्रमानुसारं व्यवस्थितरूपेण स्थापनं कुर्वन्तु ।

1.2.2 अङ्कानां स्थानान्तरम्

किं भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् यदि अङ्कानाम् स्थानं परस्परं परिवर्तितं भवति तर्हि किं भवेत् इति ?

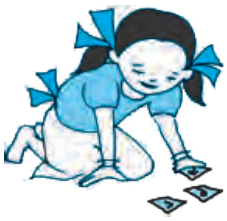
चिन्तयन्तु यत् 182 इति सङ्ख्या परिवर्तिते सति किं भविष्यति । एषा संख्या तु 821 संख्यावत् बृहत्तमा अपि भवितुं शक्नोति । अथवा 128 संख्यावत् लघ्वी अपि अपि भवितुं शक्नोति । एवमेव 391 इति सङ्ख्या गृहीत्वा अपि पूर्वोक्तां प्रक्रियां कुर्वन्तु ।

अधुना अग्रे प्रदत्तेषु प्रश्नेषु अवधानं कुर्वन्तु । अङ्कत्रयात्मिकीं कामपि संख्यां स्वीकृत्य शतकस्थानाङ्कम् एकाङ्क-स्थानाङ्कं च परस्परं परिवर्तयन्तु ।

a) किं नूतनसंख्या पूर्वतनसंख्यातः बृहत्तरा अस्ति ?

b) किं नूतनसंख्या पूर्वतनसंख्यातः लघुतरा अस्ति ?

एवं प्रकारेण निर्मितसंख्याः आरोहण-अवरोहण-क्रमेण लिखन्तु ।



पूर्वं 7 9 5

प्रथम-तृतीय-अङ्कानां परिवर्तितेषु सत्सु

अनन्तरकाले 5 9 7

यदि भवन्तः प्रथम-तृतीय-अङ्कानां परस्परं परिवर्तनं कुर्वन्ति तर्हि कस्यां स्थितौ संख्या बृहत्तमा लघुतमा च भविष्यति ?

इमां प्रक्रियाम् अङ्कचतुष्टयात्मिक-संख्याम् आधृत्य पुनः कुर्वन्तु ।

1.2.3 10000 इत्यस्याः संख्यायाः प्रवेशः ।

वयं जानीमः यत् 99 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः अनन्तरं कापि संख्या अङ्कद्वयात्मिकी नास्ति । 99 तु अङ्कद्वयात्मिकी बृहत्तमा संख्या अस्ति । एवमेव 999 अङ्कत्रयात्मिकी बृहत्तमा संख्या अस्ति, 9999 तु अङ्कचतुष्टयात्मिकी बृहत्तमा संख्या अस्ति । यदि वयं 9999 + 1 इति कुर्मः (अर्थात् योजयामः) तर्हि किं भवति ?

पश्यन्तु इदं प्रतिरूपम् : $9 + 1 = 10 = 10 \times 1$

$99 + 1 = 100 = 10 \times 10$

$999 + 1 = 1000 = 10 \times 100$

वयं पश्यामः यत्

एकाङ्कस्य बृहत्तमा संख्या + 1 = अङ्कद्वयस्य लघुतमा संख्या,

अङ्कद्वयस्य बृहत्तमा संख्या + 1 = अङ्कत्रयस्य लघुतमा संख्या,

अङ्कत्रयस्य बृहत्तमा संख्या + 1 = अङ्कचतुष्टयस्य लघुतमा संख्या ,

इदानीं वयं इत्थं चिन्तयितुं न शक्नुमः यत् अङ्कचतुष्टयस्य बृहत्तमायां संख्यायां 1 इति सङ्ख्यायाः योजनेन वयं पञ्चाङ्कयुक्तां लघुतमां ,सङ्ख्यां प्राप्स्यामः , अर्थात् 9999 + 1 =10000 इति भवति। अपि च 9999 अस्याः अग्रिमसंख्या अपि 10000 भवति। अपि च इदमपि चिन्तयितुं शक्यते यत् 10000 = 10 x 1000 भवति।

1.2.4 स्थानीयमानस्य पुनः दर्शनम्

भवन्तः स्थानीयमानस्य विषये बहुपूर्वमेव पठितवन्तः । तथा च 78 सदृश-अङ्कद्वयात्मिक-संख्यायाः प्रसारितं रूपं भवतां स्मरणे स्यात्। तत्तु एवं भवति –

$$78 = 70 + 8$$

$$= 7 \times 10 + 8$$

एवमेव भवन्तः 278 सदृश-अङ्कद्वयात्मिक्याः संख्यायाः प्रसारितरूपमपि जानन्ति। यथा-

$$278 = 200 + 70 + 8$$

$$= 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

अत्र एकाङ्कस्थाने 8, दशकस्थाने 7, शतकस्थाने 2 इति, अस्ति।

अनन्तरं वयम् इमामेव युक्तिम् अङ्कचतुष्टयाकीं संङ्ख्यार्थम् अपि प्रवर्त्तितवन्तः। उदाहरणार्थं, 5278 इति अस्याः संख्यायाः प्रसारितं रूपं भवति –

$$5278 = 5000 + 200 + 70 + 8$$

$$= 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

अत्र एकाङकस्थाने 8, दशकस्थाने 7, शतकस्थाने 2, सहस्रस्थाने 5 अस्ति।

10000 अस्याः संख्यायाः अवगमनानन्तरं वयं इमामेव युक्तिम् अग्रे अपि योजयितुं शक्नुमः।

वयं पञ्च-अङ्कात्मिकीं संख्यां यथा 45278 इमाम् एवं प्रकारेण लिखामः।

$$45278 = 4 \times 10000 + 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

अत्र वयं कथयामः यत् एकाङ्कस्थाने 8,दशकस्थाने 7, शतकस्थाने 2, सहस्रस्थाने 5, दशसहस्रस्थाने 4 अस्ति। संख्यामिमां अष्टसप्तत्युत्तर-द्विशताधिक पञ्चचत्वारिंशत्सहस्रम् इति पठामः। किमधुना भवन्तः 5 इति अङ्कात्मिकीं लघुतमां बृहत्तमां च संख्यां लेखितुं शक्नुवन्ति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्याः पठन्तु अपि च यत्र यत्र रिक्तस्थानम् अस्ति तत्र तासां नाम लिखन्तु अपि च प्रसारितं रूपं लिखन्तु।

संख्या	संख्यायाः नाम	प्रसारितं रूपम्
20000	विंशतिसहस्रम्	2 x 10000
26000	षड्-विंशतिसहस्रम्	2 x 10000 + 6 x 1000
38400	चतुःशतोत्तर-अष्टात्रिंशत्-सहस्रम्	3 x 10000 + 8 x 1000 + 4 x 100
65740	चत्वारिंशदुत्तर-सप्तशताधिक-पञ्चषष्ठिसहस्रम्	6 x 10000 + 5 x 1000 + 7 x 100 + 4 x 10
89324	चतुर्विंशत्युत्तर-त्रिशताधिक-नवाशीतिसहस्रम्	8 x 10000 + 9 x 1000 + 3 x 100 + 2 x 10 + 4
50000	पञ्चाशत्सहस्रम्	_____
41000	एकचत्वारिंशत्सहस्रम्	_____
47300	त्रिशतोत्तर-सप्तचत्वारिंशत्सहस्रम्	_____
57630	त्रिंशदुत्तर-षट्शताधिक-सप्तपञ्चाशत्सहस्रम्	_____
29485	पञ्चाशीत्युत्तर-चतुःशताधिक-नवविंशतिसहस्रम्	_____
29085	पञ्चाशीत्युत्तर-नवविंशतिसहस्रम्	_____
20085	पञ्चाशीत्युत्तर-विंशतिसहस्रम्	_____
20005	पञ्चोत्तर-विंशतिसहस्रम्	_____

पञ्च-अङ्कानाम् इतोऽपि पञ्चसंख्याः लिखन्तु, पठन्तु अपि च प्रसारितं रूपं लिखन्तु।

1.2.5 100000 अस्याः संख्यायाः प्रवेशः।

पञ्च-अङ्कानां बृहत्तमा संख्या का अस्ति ? तथा पञ्च-अङ्कानां बृहत्तमायां संख्यायां 1 इति सङ्ख्या योज्यते चेत् षडङ्कानां लघुतमा संख्या भवत्येव। अर्थात् –

99999 + 1 = 1,00,000

संख्यायाः अस्याः एकलक्षम् इति नाम। एकलक्षं तु 99999 अस्याः संख्यायाः अग्रिमा संख्या अस्ति।

एतेन साकं 10,000 x 10 = 1,00,000

अधुना वयं 6 अङ्क-संख्यानाम् अपि च तासां प्रसारितं रूपम् अपि लेखितुं शक्नुमः।

2,46,853 = 2 x 1,00,000 + 4 x 10,000 + 6 x 1,000 + 8 x 100
+ 5 x 10 + 3 x 1

अस्यां संख्यायाम् एकाङ्ककस्थाने 3, दशकस्थाने 5, शतकस्थाने 8, सहस्रस्थाने 6, दशसहस्रस्थाने 4, लक्षस्थाने 2 अस्ति। इमां संख्यां 2,46,853 (त्रिपञ्चाशदुत्तर-अष्टशताधिक-षट्चत्वारिंशत्सहस्रोत्तर-द्विलक्षम्) इति पठामः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्यां पठित्वा रिक्तस्थानानि पूरयत।

संख्या	संख्यायाः नाम	प्रसारितं रूपम्
3,00,000	त्रिलक्षम्	3 x 1,00,000
3,50,000	पञ्चाशत्सहस्राधिक-त्रिलक्षम्	3 x 1,00,000 + 5 x 10,000
3,53,500	पञ्चशतोत्तर-त्रिपञ्चाशदधिक-त्रिलक्षम्	3 x 1,00,000 + 5 x 10,000 + 3 x 1000 + 5 x 100
4,57,928	_____	_____
4,07,928	_____	_____
4,00,829	_____	_____
4,00,029	_____	_____

1.2.6 बृहत्-संख्याः

यदि वयं 6 अङ्कानां बृहत्तमायां संख्यायां 1 योजयामः चेत् तर्हि 7 अङ्कानां लघुतमा संख्या लभ्यते। तां संख्यां वयं दशलक्षम् इति पठामः।

6 अङ्कानां बृहत्तमां 7 अङ्कानां लघुतमां संख्यां लिखन्तु।

7 अङ्कानां बृहत्तमां 8 अङ्कानां च लघुतमां संख्यां लिखन्तु।

8 अङ्कानां लघुतमां संख्याम् एककोटिः इति वदामः।

प्रतिरूपाणि लिखन्तु -

9 + 1 = 10

99 + 1 = 100

999 + 1 = _____

9,999 + 1 = _____

99,999 + 1 = _____

9,99,999 + 1 = _____

99,99,999 + 1 = 1,00,00,000

स्मरन्तु –

1 शतम्	= 10 दशम्
1 सहस्रम्	= 10 शतम्
	= 100 दशम्
1 लक्षम्	= 100 सहस्रम्
	= 1000 शतम्
1 कोटिः	= 100 लक्षम्
	= 10,000 सहस्रम्

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. 10 – 1 = ?
2. 100 – 1 = ?
3. 10,000 – 1 = ?
4. 1,00,000 – 1 = ?
5. 1,00,00,000 – 1 = ?

(सङ्केतः - प्रतिरूपम् अभिजानन्तु।)

अनेक-विभिन्न-स्थितिषु अस्माकं पुरतः बृहत्-संख्याः आगच्छन्ति । उदाहरणार्थं भवतां कक्ष्यायाः छात्राणां संख्या अङ्कद्वयात्मकं भवेत् , अपि च भवतां शालायाः संपूर्ण-छात्राणां संख्या 3 अथवा 4 अङ्कानां भवेत् । पार्श्वस्थ-नगरे विद्यमान-जनानां संख्या इतोऽपि बृहती स्यात् ।

किम् इयं 5,6 अथवा 7 अङ्कानां संख्या अस्ति ? किं भवन्तः स्वकीये राज्ये निवसतां जनानां संख्याविषये जानन्ति ?

अस्यां संख्यायां कति अङ्काः भवेयुः ?

गोधूमेन भरितायां द्रोण्यां धान्यानां संख्या का भवेत् ? किम् इयं 5 अथवा 6 अङ्कानां संख्या भवेत् उत इतोऽपि बृहती स्यात् ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एवमेव पञ्च-उदाहरणानि ददतु यत्र गणन-वस्तूनां संख्या 6 अङ्कानां संख्यातः अधिका भवेत् ।
2. 6 अङ्कानां बृहत्तम-संख्यातः आरभ्य अवरोहणक्रमे पञ्च-पूर्वतन-संख्याः लिखन्तु ।
3. 8 अङ्कानां लघुतम-संख्यातः आरभ्य आरोहणक्रमे पञ्च-अग्रिम-संख्याः लिखन्तु ।

1.2.7 बृहत्-संख्यानां पठने लेखने च एकं साहाय्यम्

अधोलिखिताः संख्याः पठितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

(a) 279453 (b) 5035472

(c) 152700375 (d) 40350894

किं भवन्तः किमपि काठिन्यम् अनुभूतवन्तः ?

तर्हि भवन्तः अत्र कीदृशं काठिन्यम् अनुभूतवन्तः ?

कदाचित् बृहत्-संख्यानां पठने लेखने च सूचकस्य उपयोगं कुर्मः । शगुफ्ता अपि पठने लेखने च सहायक-सूचकस्य उपयोगं करोति । एतादृशाः सूचकाः प्रसारित-रूपे संख्यानां लेखनं कर्तुं साहाय्यं कुर्वन्ति । उदाहरणार्थं सा 257 इत्यत्र एककस्थाने, दशकस्थाने, शतकस्थाने च अङ्कान् ज्ञात्वा तान् कोष्टके O, T, H एतेषाम् अधोभागे एवं लिखति । तद्यथा –

H	T	O	प्रसारितं रूपम्
2	5	7	2 x 100 + 5 x 10 + 7 x 1

एवमेव, 2902 इत्यस्याः कृते अपि

Th	H	T	O	प्रसारितं रूपम्
2	9	0	2	2 x 1000 + 9 x 100 + 0 x 10 + 2 x 1

सा इमामेव अवधारणां लक्ष-पर्यन्तं संख्यानां कृते अपि प्रवर्तयति । यथा - अधोलिखित-कोष्टके वयं द्रष्टुं शक्नुमः । सावधानेन पठन्तु एवम् अवशिष्ट-प्रविष्टि-द्वारा रिक्तस्थानानि पूरयन्तु ।

संख्या	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्यानां नाम	प्रसारितं रूपम्
7,34,543		7	3	4	5	4	3	त्रयश्चत्वारिंशदुत्तर-पञ्चशताधिक-चतुस्त्रिंशत्सहस्रपर-सप्तलक्षम्	_____
32,75,829	3	2	7	5	8	2	9	_____	3 x 10,00,000 + 2 x 1,00,000 + 7 x 10,000 + 5 x 1,000 + 8 x 100 + 2 x 10 + 9 x 1

एवमेव वयम् इमामेव अवधारणां कोटि-पर्यन्तं संख्यानां कृते अपि प्रवर्तयितुं शक्नुमः ।

संख्या	TCr	Cr	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्यानां नाम
2,57,34,543	__	2	5	7	3	4	5	4	3	_____
65,32,75,829	6	5	3	2	7	5	8	2	9	नवविंशत्युत्तर-अष्टशताधिक-पञ्चसप्ततिसहस्रोत्तर-द्वात्रिंशत्लक्षपर-पञ्चषष्ठिकोटिः

भवन्तः संख्यानां प्रसारितं रूपं लेखितुम् अन्य-कोष्टकानां निर्माणम् अपि कर्तुं शक्नुवन्ति ।

अल्पविरामाणां प्रयोगः

भवन्तः सावधानतया दृष्टवन्तः स्युः यत् उपरि प्रदत्त-कोष्ठकेषु बृहत्-संख्यानां लेखनसमये वयं अल्पविरामस्य प्रयोगं कृतवन्तः । बृहत्-संख्यानां पठने लेखने च अल्पविरामः अस्माकं कृते बहुसाहाय्यं करोति । संख्याङ्कनस्य भारतीय-पद्धत्यां वयम् एकं, दश, शतं, सहस्रं, लक्षं, कोटिः इत्यादीनां प्रयोगं कुर्मः । सहस्रस्य, लक्षस्य अथवा कोटिपरिमितानां संख्यानां प्रदर्शनाय वयं अल्पविरामानां प्रयोगं कुर्मः । प्रथम-अल्पविरामः शतकस्य अनन्तरं स्थाप्यते अपि च सहस्रस्य सूचकः भवति । द्वितीयः अल्पविरामः दशसहस्रस्य अनन्तरं स्थाप्यते अपि च लक्षस्य सूचकः भवति । तृतीयः अल्पविरामः दशलक्षस्य अनन्तरं स्थाप्यते अपि च कोटेः सूचकः भवति ।

उदाहरणार्थम्,

5, 08, 01, 592

3, 32, 40, 781

7, 27, 05, 062

संख्यानां नामलेखने वयम् अल्पविरामस्य प्रयोगं न कुर्मः ।

उपरि लिखित-संख्यानां पठनार्थं प्रयत्नं कुर्वन्तु । एवमेव इतोऽपि पञ्च-संख्याः लिखन्तु पठन्तु च ।

अन्ताराष्ट्रिय-संख्याङ्कन-पद्धतिः

अन्ताराष्ट्रिय-पद्धत्यां सहस्रानन्तरं मिलियन् इत्यस्य प्रयोगः भवति । सहस्रम् अपि च मिलियन् इत्यनयोः प्रदर्शनार्थम् अल्पविरामस्य प्रयोगः क्रियते । प्रथमः अल्पविरामः सहस्रस्य, द्वितीयः अल्पविरामः मिलियन् इत्यस्य प्रदर्शनं करोति । उदाहरणार्थं, संख्यां 50, 801, 592 इमाम् अन्ताराष्ट्रिय-पद्धत्यां द्वानवत्युत्तरपञ्चशताधिक-एकाधिकाष्टशतसहस्रपर-पञ्चाशन्मिलियन् इति वदामः । भारतीयपद्धत्यां तु द्वानवत्युत्तरपञ्चशताधिक-एकसहस्रोत्तर-अष्टलक्षाधिक-पञ्चकोटिः इति वदामः।

कतिचन लक्षाणां एकं मिलियन् भवति ?

कतिचन मिलियन् इत्यस्य एक-कोटिः भवति ?

तिस्रः बृहत्-संख्याः लिखन्तु । ताः भारतीयपद्धत्याम् अन्ताराष्ट्रियपद्धत्यां च निर्दिशन्तु ।

अस्मिन् कार्ये भवतां रुचिः स्यात् –

अन्ताराष्ट्रिय-पद्धत्यां शतमिलियन् इत्यतः बृहत्-संख्यानां सम्बोधनार्थं बिलियन् इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्ति ।

1 बिलियन् = 1000 मिलियन्

किं भवन्तः जानन्ति ?

अनेन प्रकारेण भारतस्य जनसंख्यायाः वृद्धिः अभवत् ।

1921-1931 अस्मिन् समये 27 मिलियन्

1931-1941 अस्मिन् समये 37 मिलियन्

1941-1951 अस्मिन् समये 44 मिलियन्

1951-1961 अस्मिन् समये 78 मिलियन्

1991-2001 अस्मिन् समये कियती वृद्धिः जाता ? एतत्समबद्धायाः सूचनायाः प्राप्तये प्रयत्नं कुर्वन्तु । किं भवन्तः जानन्ति यत् अधुना भारतस्य जनसंख्या कति अस्ति ? इति ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कोष्ठके संख्याः लिखन्तु अपि च प्रसारितरूपेषु अपि लिखन्तु |

   (i) 475320 (ii) 9847215

   (iii) 97645310 (iv) 30458094

   (a) एतासु सङ्ख्यासु का लघुतमा संख्या अस्ति ?

   (b) एतासु सङ्ख्यासु का बृहत्तमा संख्या अस्ति ?

   (c) आरोहण-अवरोहण-क्रमे संख्याः लिखन्तु ।

2. अधोलिखितसंख्याः पश्यन्तु ।

   (ii) 527864 (ii) 95432

   (iii) 18950049 (iv) 70002509

   (a) कोष्ठके संख्याः लिखन्तु अपि च प्रसारितरूपेषु अपि लिखन्तु |

   (b) आरोहण-अवरोहण-क्रमे संख्याः लिखन्तु ।

किं भवन्तः संख्याङ्कलेखने मम साहाय्यं कुर्वन्ति ?

संख्यायाः संख्याङ्कलेखने भवन्तः पुनः कोष्ठकस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।

(a) अष्टोत्तर-सप्ततिसहस्राधिक-द्विचत्वारिंशत्लक्षम्।

(b) अष्टशतोत्तर-पञ्चपञ्चाशत्सहस्रोत्तर-नवतिलक्षोत्तर-द्विकोटिः।

(c) पञ्चपञ्चाशदुत्तर-षष्ठिसहस्राधिक-सप्तकोटिः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. भवतां पार्श्वे 4, 5, 6, 0, 7, 8 इति एते अङ्काः सन्ति।एतेषां साहाय्येन 6 अङ्कानां पञ्च-संख्याः लिखन्तु।
   (a) पठने सारल्यार्थम् अल्पविरामस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।
   (b) आरोहण-अवरोहण-क्रमे अपि योजयन्तु।
2. 4, 5, 6, 7, 8, 9 एतेषां साहाय्येन 8 अङ्कानां संख्यात्रयं लिखन्तु, पठने सारल्यार्थम् अल्पविरामस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।
3. 3, 0, 4 एतेषां साहाय्येन 6 अङ्कानां पञ्चसंख्याः लिखन्तु अल्पविरामस्य प्रयोगमपि कुर्वन्तु।

अभ्यासः 1.1

1. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।
   (a) 1 लक्षम् = _____ दशसहस्रम्
   (b) 1 मिलियन् = _____ शतसहस्रम्
   (c) 1 कोटिः = _____ दशलक्षम्
   (d) 1 कोटिः = _____ मिलियन्
   (e) 1मिलियन् = _____ लक्षम्
2. समुचित-स्थानेषु अल्पविरामस्य प्रयोगं कृत्वा सङ्ख्याकान् लिखन्तु।
   (a) सप्तोत्तर-त्रिशताधिक-पञ्चपञ्चाशत्सहस्रोत्तर-त्रिसप्ततिलक्षम्,
   (b) एकचत्वारिंशदुत्तर-पञ्चलक्षाधिक-नवकोटिः,
   (c) द्वि-उत्तर-त्रिशताधिक-एकविंशतिसहस्रोत्तर-द्विपञ्चाशत्लक्षोत्तर-सप्तकोटिः,
   (d) द्वि-उत्तर-द्विशताधिक-त्रयोविंशत्यधिकचतुश्शतसहस्रोत्तर-अष्टपञ्चाशत्मिलियन्
   (e) दशोत्तर-त्रिंशत्सहस्राधिक-त्रयोविंशतिलक्षम्
3. उपयुक्तस्थानेषु अल्पविरामस्य प्रयोगं कृत्वा भारतीय-सङ्ख्याकन-पद्धत्यां लिखन्तु।
   (a) 87595762 (b) 8546283 (c) 99900046 (d) 98432701
4. अन्ताराष्ट्रिय-पद्धत्याम् अल्पविरामस्य योजनं कृत्वा पठन्तु।
   (a) 78921092 (b) 7452283 (c) 99985102 (d) 48049831

1.3 व्यवहारेषु बृहत्-संख्याः

पूर्व-कक्ष्यासु वयं पठितवन्तः यत् औन्नत्यस्य एकमात्रकस्य गणनार्थं सेण्टीमीटर् इत्यस्य उपयोगः क्रियते । वयम् अङ्कन्याः औन्नत्यस्य अथवा पुस्तकस्य अभ्यासपुस्तकस्य च वैशाल्यस्य मापनार्थं सेण्टीमीटर् इत्यस्य प्रयोगं कुर्मः। मापके सेण्टीमीटर् चिह्नम् अङ्कितं भवति । परन्तु, एकस्याः अङ्कन्याः स्थूलत्वस्य मापनार्थं सेण्टीमीटर् न अपेक्ष्यते इत्यतः वयं अङ्कन्याः स्थूलतायाः परिमापनाय मिलीमीटर् इत्यस्य प्रयोगं कुर्मः ।

(a) 10 मिलीमीटर् = 1 सेण्टीमीटर्

स्व-कक्ष्यायाः प्रकोष्ठस्य अथवा शालाभवनस्य वैशाल्यमापनार्थं सेण्टीमीटर् तु लघुतममापकं भवति। अतः तत्र मीटर् इत्यस्य प्रयोगं कुर्मः ।

(b) 1 मीटर् = 100 सेण्टीमीटर् = 1000 मिलीमीटर्

यदि अस्माभिः देहली-मुम्बयी-नगरयोः अथवा देहली-कोलकत्ता-नगरयोः मध्ये विद्यमान-दूरतायाः विषये सूचना दातव्या स्यात् तर्हि मीटर् इति अपि कश्चन लघुतममापकं भवति । अतः एतदर्थं वयं कस्यचित् व्यापकमात्रकस्य किलोमीटर इत्यस्य प्रयोगं कुर्मः ।

(c) 1 किलोमीटर् =1000 मीटर् इति ।

कियन्मिलीमीटर्-द्वारा 1 किलोमीटर् इति भवति ?

यतो हि 1 मीटर् = 1000 मिलीमीटर् अतः

1 किमी = 1000 मी = 1000 x 1000 = 10,00,000 मिमी

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कतिभिः सेण्टीमीटर् इत्येतैः एकं किलोमीटर् इति भवति ?
2. भारतस्य पञ्च-बृहत्-नगराणां नाम लिखन्तु । तत्रत्यां जनसंख्याम् अभिजानन्तु । प्रत्येकमपि नगरयुग्मस्य मध्ये विद्यमानदूरतां किलोमीटर् माध्यमेन अभिजानन्तु ।

वयं गोधूमस्य अथवा तण्डुलस्य क्रयणार्थं विपणीं गच्छामः । तौ वयं किलोग्रां माध्यमेन क्रीणामः । परन्तु आर्द्रक-मरीचिकासदृश-शाकान् ग्राम् इति परिमाणेन एव क्रीणीमः । वयं तु जानीमः यत्

1 किलोग्राम् = 1000 ग्राम्

यदि अस्माकम् आरोग्यं सम्यक् न भवति तर्हि ओषधिम् सेवामहे । किम् तस्य औषधस्य भारविषये कदाचित् भवन्तः अवधानं कृतवन्तः ? स्मरन्तु औषधस्य भारमापनाय मिलीग्राम् इत्यस्य उपयोगः भवति ।

1 ग्राम् = 1000 मिलीग्राम्

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1 कतिभिः मिलीग्राम इत्येतैः 1 किलोग्राम इति भवति ?

2. औषध-गुलिकानाम् कस्याञ्चित् मञ्जूषायां 2,00,000 इति सङ्ख्यकाः गुलिकाः सन्ति । प्रत्येकं गुलिका अपि 20 ग्राम् अस्ति । तर्हि सर्वासां गुलिकानां भारः कति ग्राम् अस्ति ? अपि च कति किलोग्राम् अस्ति ?

जलपूरितायाः सामान्य-द्रोण्याः धारण-क्षमता प्रायः कियती स्यात् ? प्रायः 20 लीटर् इति भवति। अत्र धारण-क्षमतां लीटर्-माध्यमेन प्रदर्शयामः । परन्तु कदाचित् कस्यचित् मात्रकस्य परिमापकस्य वा अपि आवश्यकता भवति। अयं मात्रकः मिलीलीटर इति अस्ति। केशतैलं, प्रक्षालनद्रवम् अथवा किमपि पेयम् इत्यादीनां कूप्याः उपरि या मात्रा लिखिता भवति, सा मिलीलीटर इति रूपेण लिखिता भवति।

1 लीटर् = 1000 मिलीलीटर्

अवधानं ददातु, अत्र वयं केषाञ्चित् किलो,मिली, सेण्टी इत्यादीनां सर्वनिष्ठ-शब्दानां प्राप्तिं कुर्मः। भवन्तः स्मरन्तु यत् किलो इत्यस्य अर्थः सहस्रम् इति, मिली इत्यस्य अर्थः सहस्रभागांशः इति। अत्र किलो तु बृहत्तरं मिली तु लघुतरं भवति। इत्युक्ते 1 किलोग्राम् =1000 ग्राम् , 1 ग्राम् =1000 मिलीग्राम् भवति। एवमेव 1 मीटर् = 100 सेण्टीमीटर् भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

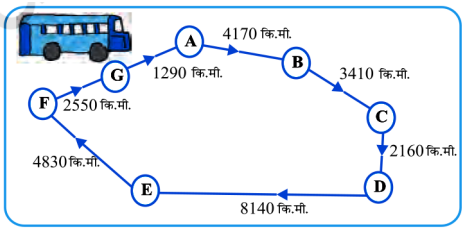
एकं बस-यानं स्व-यात्रायाः आरम्भं करोति। 60 किमी/ घण्टा वेगेन विभिन्नस्थानान् प्राप्तम्। इमां यात्रां। अधोभागे दर्शितम् अस्ति।

(i) A तः D पर्यन्तं बस-यानेन कति दूरं क्रमणं कृतम् ?

(ii) D तः G पर्यन्तं बस-यानेन कति दूरं क्रमणं कृतम् ?

(iii) बस-यानेन आहत्य कति दूरं क्रमितम् ?

(iv) C तः D पर्यन्तम् अपि च D तः E पर्यन्तं यावत् दूरं भवति इति गणनं कृत्वा तयोः मध्ये कति अन्तरं भवति इति गणनं कुर्वन्तु।



(v) बस-यानेन अधोलिखितासु यात्रासु स्वीकृत-समयस्य गणनं कुर्वन्तु।

(a) A तः B पर्यन्तम् (b) C तः D पर्यन्तम्

(c) E तः G पर्यन्तम् (d) सम्पूर्ण-यात्रा

रमणस्य आपणम्

वस्तूनि	मूल्यम्
सेवफलम्	40 रू प्रति किग्रा
नारङ्गफलम्	30 रू प्रति किग्रा
कङ्कतम्	3 रू प्रत्येकम्
दन्तधावनी	10 रू प्रत्येकम्
अङ्कनी	1 रू प्रत्येकम्
टिप्पणी-पुस्तिका	6 रू प्रत्येकम्
फेनकम्	8 रू प्रत्येकम्

गतवर्षस्य विक्रयणम्

सेवफलम्	2457 कि.ग्रा.
नारङ्गफलम्	3004 कि.ग्रा.
कङ्कतम्	22760
दन्तधावनी	25367
अङ्कनी	38530
टिप्पणी-पुस्तिका	40002
फेनकम्	20005

(a) किं भवन्तः गतवर्षे रमणेन विक्रीतानां सेवफलानां तथा नारङ्गफलानां च सम्पूर्णभारस्य गणनं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

सेवफलानां भारः = _____ कि.ग्रा.

नारङ्गफलानां भारः = _____ कि.ग्रा.

अतः सम्पूर्णभारः = _____ कि.ग्रा. + _____ कि.ग्रा.

उत्तरम् = _____ कि.ग्रा.

(b) किं भवन्तः गणयितुं शक्नुवन्ति यत् रमणः सेवफलानां विक्रयणेन आहत्य कियद्धनं प्राप्तवान् इति ?

(c) किं भवन्तः गणयितुं शक्नुवन्ति यत् रमणः नारङ्गफलानां विक्रयणेन आहत्य कियद्धनं प्राप्तवान् इति ?

(d) विक्रयणेन आगतं धनं दर्शयितुं एकं कोष्टकं रचयन्तु तत्र आगतं धनम् आरोहणक्रमे योजयन्तु। तत् किं वस्तु अस्ति यस्य विक्रयणेन रमणः सर्वाधिकं धनं प्राप्तवान् ? सः धनराशिः कः ?

वयं तु योग-व्यवकलन-गुणन-भागैः सम्मिलितानां बहुविध-प्रश्नानां समाधानं कृतवन्तः। अधुना इतोऽपि काञ्चन प्रश्नान् समाधातुं प्रयत्नं कुर्मः। प्रारम्भात् पूर्वं एतानि उदाहरणानि पश्यन्तु अपि च प्रयुक्त-विधीनाम् उपयोगं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 1 : सुन्दरनगरस्य जनसंख्या 1991 तमे वर्षे 2,35,471 आसीत्। 2001 तमे वर्षे 72,958 वृद्धिः जाता। तर्हि 2001 तमे वर्षे कति जनसंख्याः आसन् ?

समाधानम् : 2001 तमस्य वर्षस्य जनसंख्या

= 1991 तमस्य वर्षस्य जनसंख्या + जनसंख्यायां वृद्धिः

= 2,35,471 + 72,958

अधुना

$$\begin{array}{r} 235471 \\ +\ 72958 \\ \hline 308429 \end{array}$$

सलमा तु संख्यानां योजनम् इत्थं कृतवती। यथा 235471 = 200000 + 35000 + 471 अपि च 72958 = 72000 + 958 अनन्तरं 200000 + 107000 +1429 =

308429 मेरी एवं कृतवती। यथा 200000 + 35000 + 400 + 71 + 72000 900 + 58 = 307429

उत्तरम् : 2001 तमे वर्षे नगरस्य जनसंख्या 3,08,429 आसीत्।

त्रयः अपि विधयः सम्यक् एव सन्ति।

उदाहरणम् 2 : एकस्मिन् राज्ये 2002-2003 तमे वर्षे 7,43,000 द्विचक्रिकाणां विक्रयणं जातम्। 2003-2004 तमे वर्षे 8,00,100 द्विचक्रिकाणां विक्रयणं जातम्। तर्हि कस्मिन् वर्षे अधिकद्विचक्रिकाणां विक्रयणं जातम् ? आहत्य कतीनाम् अधिक-द्विचक्रिकाणां विक्रयणं जातम् ?

समाधानम् : स्पष्टमस्ति यत् संख्या 8,00,100 तु संख्या 7,43,000 इत्यतः अधिकतरः अस्ति। अतः तस्मिन् राज्ये 2003-2004 तमे वर्षे अधिकाधिक-द्विचक्रिकाणां विक्रयणं जातम्। अधुना-

```
  800100
-  743000
---------
  057100
---------
```

योगं कृत्वा अपि अस्य तुलनां कर्तुं शक्नुमः।

तद्यथा

```
  743000
+  57100
---------
  800100
---------
```
(उत्तरं समानम्)

किं भवन्तः समस्यानां समाधानाय इतोऽपि अन्यविधीनां प्रयोगं कर्तुं प्रभवन्ति ?

उत्तरम् : 2003-2004 तमे वर्षे 57,100 अधिकाः द्विचक्रिकाः विक्रीताः।

उदाहरणम् 3 : एकस्मिन् नगरे प्रतिदिनं समाचारपत्रिकायाः प्रकाशनं भवति। एकस्यां पत्रिकायां 12 पृष्ठानि भवन्ति। प्रतिदिनं 11,980 पत्रिकाः प्रकाशिताः भवन्ति। तर्हि प्रतिदिनं कति पृष्ठानि प्रकाशितानि भवन्ति ?

समाधानम् : प्रत्येकं पत्रिकायां 12 पृष्ठानि भवन्ति।

तर्हि 11,980 पत्रिकासु 12 x 11,980 पृष्ठानि।

आहत्य कति भवेयुः ? 1,00,000 तः अधिकम् ? अथवा न्यूनम् ?

अधुना

```
   11980
X     12
---------
   23960
+ 119800
---------
  143760
---------
```

उत्तरम् : प्रतिदिनं 1,43,760 पृष्ठानि मुद्रितानि भवन्ति।

उदाहरणम् 4 : अभ्यासपुस्तकस्य निर्माणार्थं 75,000 कर्गजानि उपलब्धानि सन्ति । प्रत्येकं कर्गदेन अभ्यासपुस्तकस्य 8 पृष्ठानि भवन्ति । प्रत्येकं अभ्यासपुस्तके 200 पृष्ठानि सन्ति । उपलब्धेषु कर्गजेषु कतीनाम् अभ्यासपुस्तकानां निर्माणं कर्तुं शक्यते ?

समाधानम् : प्रत्येकं कर्गजेन 8 पष्ठानि भवन्ति ।

अतः 75,000 कर्गजानां कृते 8 x 75,000 पृष्ठानि भवन्ति ।

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times \quad 8 \\ \hline 600000 \end{array}$$

एवमेव अभ्यासपुस्तकस्य निर्माणार्थं 6,00,000 पृष्ठानि उपलब्धानि सन्ति ।

अधुना 200 पृष्ठेभ्यः एकम् अभ्यासपुस्तकस्य निर्माणं भवति ।

अतः 6,00,000 पृष्ठेभ्यः 6,00,000 ÷ 200 अभ्यासपुस्तकानि भवन्ति ।

$$\begin{array}{r} \text{अधुना} \quad 200 \;\big)\; 3000 \\ \hline 600000 \\ 600 \\ \hline 0000 \end{array}$$

उत्तरम् : 3,000 अभ्यसपुस्तकानि ।

अभ्यासः 1.2

1. एकदा कस्मिंश्चित् विद्यालये एका पुस्तकप्रदर्शनी आयोजिता आसीत् । प्रथमे, द्वितीये, तृतीये चतुर्थे च दिने क्रमशः 1094, 1812, 2050, 2751 चीटिकाः विक्रीताः । चतुर्षु अपि दिनेषु आहत्य कति चीटिकाः विक्रेताः इति अन्वेषयन्तु ।
2. शेखरः एकः प्रसिद्धः क्रिकेट् क्रीडालुः अस्ति । सः अद्यपर्यन्तं टेस्ट् क्रीडातः 6980 धावनाङ्कान् सम्पादितवान् । सः 10,000 धावनाङ्कान् पूरयितुम् इच्छति । तस्य कृते कति धावनाङ्काः इतोऽपि अपेक्षन्ते ?
3. एकस्मिन् निर्वाचने सफलः प्रत्याशी 5,77,500 मतानि प्राप्तवान् । तस्य निकटतमः प्रतिस्पर्धी 3,48,700 मतानि प्राप्तवान् । तर्हि निर्वाचने सफलप्रत्याशी कतिभ्यः मतेभ्यः विजयं प्राप्तवान् ?
4. कीर्ति-पुस्तकालये जून् मासस्य प्रथमे सप्ताहे 2,85,891 रू मूल्यानां पुस्तकानां विक्रयणं जातम् । द्वितीये सप्ताहे 4,00,768 रू. मूल्यमित-पुस्तकानां विक्रयणं जातम् । आहत्य कियन्मूल्यमित-पुस्तकानां विक्रयणं जातम् ? कस्मिन् सप्ताहे अधिकाधिकमूल्यस्य पुस्तकविक्रयणं जातम् ? कियत् अधिकम् आसीत् ?
5. अङ्काः 6, 2, 7, 4, 3 एतान् एकैकवारं प्रयोगं कृत्वा बृहत्तमां लघुतमां च संख्यां रचयन्तु अपि च तयोर्मध्ये अन्तरम् अभिजानन्तु ।
6. एकं यन्त्रम् एकस्मिन् दिने 2,825 व्यावर्तनकीलानां निर्माणं करोति । तर्हि 2006 तमस्य जनवरीमासे तेन यन्त्रेण कति व्यावर्तनकीलाः निर्मिताः ?

7. एकस्य वणिजस्य पार्श्वे 78,592 रू आसीत् । सः 40 आकाशवाणी इति यन्त्रस्य कृते प्रतिवेदनं दत्तवान् । प्रत्येकं यन्त्रस्य मूल्यं 1200 रू आसीत् । तर्हि एतेषां क्रयणानन्तरं तस्य पार्श्वे कति रूप्यकाणि अवशिष्टानि अभूवन् ?

8. एकः छात्रः 7236 इमां संख्यां 56 संख्यायाः स्थाने 65 तः गुणनं कृतवान् । तर्हि तस्य उत्तरं समुचित-उत्तरात् कियत् अधिकम् आसीत् ? (सङ्केतः – द्वयोः अपि गुणनस्य अपेक्षा नास्ति)।

9. एकस्य युतकस्य सीवनार्थं 2 मी 15 सेमी वस्त्रस्य आवश्यकता अस्ति । 40 मी वस्त्रेण कतीनां युतकानां सीवनं कर्तुं शक्यते ? अपि च कियन्मीटर् वस्त्रम् अवशिष्यते ?

10. सर्वाः मञ्जूषाः गुलिकाभ्यः भरिताः सन्ति । प्रत्येकमपि मञ्जूषायाः भारः 4 किग्रा 500 ग्रा अस्ति । एकास्मिन् भार-वाहक-याने 800 कि.ग्रा-तः अधिकं भारं स्थापयितुं न शक्यते । तर्हि एतादृशाः कति गुलिका-मञ्जूषाः नेतुं शक्यन्ते ?

11. विद्यालयस्य छात्रस्य च गृहस्य मध्यवर्तिदूरता 1 किमी 875 मी. इति अस्ति । प्रतिदिनं एतत् दूरं द्विवारं क्रम्यते । तर्हि 6 दिनेषु छात्रेण आहत्य कियद्दूरं क्रम्यते ?

12. एकस्मिन् पात्रे 4 ली 500 मि.ली. दधि अस्ति । तर्हि 25 मि.ली. क्षमतायुक्तेषु कतिषु चषकेषु एतावत् दधि स्थापयितुं शक्यते ?

1.3.1 आकलनम् ।

वार्ता

1. भारत-पाकिस्थानयोः मध्ये सम्पन्नां एकां यष्टि-क्रीडां क्रीडाङ्गणे 51,000 जनाः दृष्टवन्तः । अपि च सम्पूर्ण-विश्वे 40 मिलियन् जनाः दूरदर्शन-माध्यमेन दृष्टवन्तः । स्पर्धा अनिर्णीता आसीत् ।
2. भारत-बाङ्लादेशयोः सीमाप्रदेशे झञ्झावातेन प्रायः 2000 जनाः मृताः । अपि च 50000 तः अधिक-जनाः आहताः जाताः।
3. 63,000 किलोमीटर्-तः अधिक-रेलमार्गे 13 मिलियन् तः अधिक-जनाः रेलयानद्वारा प्रतिदिनं प्रयाणं कुर्वन्ति ।

   किं वयं विश्वासेन वक्तुं शक्नुमः यत् अस्यां वार्तायां या जनानां संख्या उक्ता तावन्तः एव जनाः आसन् ? उदाहरणार्थं,

   (1) किं क्रीडाङ्गणे 51,000 जनाः एव आसन् ? अथवा दूरदर्शनमाध्यमेन 40 मिलियन् जनाः एव क्रीडां दृष्टवन्तः ?

स्पष्टतः, नैव । प्रायः इति शब्दः स्वयमेव दर्शयति यत् जनानां संख्या अत्रोक्त संख्यायाः निकटतमा अस्ति इति। स्पष्टरूपेण संख्या 51000 तु संख्ययोः 50800- 51300 एतयोः मध्ये कापि सङ्ख्या भवितुं शक्यते । किन्तु 70000 न भवति । एवमेव 40 मिलियन् इत्युक्ते 39 मिलियन् तः बहु-अधिकं अथवा 41 मिलियन् तः स्वल्पं न्यूनं भवितुं शक्यते । किंतु सर्वात्मना 50 मिलियन् तु न भवति ।

एवमेव रेलयानस्य विषये अपि किञ्चित् अधिकम् अथवा न्यूनं भवितुं शक्यते समानं तु न भवति।

एतेषु उदाहरणेषु दत्तसंख्याः निश्चयेन गणनं कृत्वा न लिखिताः किन्तु तासां सण्ख्यानां विषये अनुमानं जनयितुं शक्तम् आकलनम् अस्ति। चर्चां कुर्वन्तु यत् अनेन किं ज्ञानं प्राप्यते ?

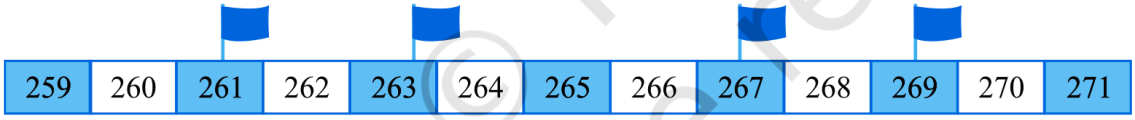
वयं सन्निकटमानं कुत्र प्राप्नुमः ? स्व-गृहे आयोजिष्यमाणस्य एकस्य बृहत्-उत्सवस्य विषये चिन्तयन्तु। तर्हि भवतां गृहं प्रति प्रायशः कति अतिथयः आगच्छेयुः इति गणनं कुर्वन्तु। किं भवन्तः अतिथीनां निश्चित-संख्यां गणयितुं शक्नुवन्ति ? व्यावहारिकरूपेण तु एतत् अशक्यम् अस्ति।

अस्माकं देशस्य वित्तमन्त्री प्रतिवर्षं वार्षिकविवरणस्य मण्डनं करोति। मन्त्री महोदयः शिक्षायाः कृते कियद्धनराशेः स्थापनं करोति। किम् एषा धनराशिः यथार्थरूपेण तावान् एव भवति ? इदं तु तस्मिन् वर्षे शिक्षायाः कृते सम्भविष्यमाणस्य व्ययस्य एकम् आकलनम् अस्ति।

यत्र भवतां कृते निश्चित-संख्यानाम् आवश्यकता भवति यत्र च भवन्तः सन्निकट-आकलित-संख्यायामेव कार्यं सम्पादयन्ति इत्यनयोः स्थित्योः मध्ये तुलनां कुर्वन्तु। त्रीणि उदाहरणानि ददतु।

1.3.2 सन्निकटनद्वारा निकटतम-दशकपर्यन्तम् आकलनम्।

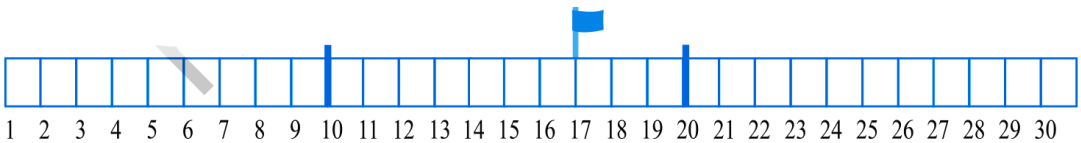
अधोलिखितान् चित्रान् पश्यन्तु।



(a) कः ध्वजः 270 इत्यस्य तोलने 260 तः अधिकं समीपम् अस्ति ?

(b) कः ध्वजः 260 इत्यस्य तोलने 270 तः अधिकं समीपम् अस्ति ?

मापके संख्यानां 10, 17, 20 एतेषां स्थानं पश्यन्तु। किं 17 संख्या, 10 संख्यां प्रति अधिक-निकटतमा अस्ति ? अथवा 20 संख्यां प्रति अधिक-निकटतमा अस्ति ? यदि रिक्तस्थानानां तुलनां कुर्मः चेत् 17-10 एतयोः अपेक्षया 17-20 एतयोः मध्ये रिक्तस्थानानि न्यूनानि सन्ति। अतः वयं 17 संख्यां निकटतम-दशकपर्यन्तं 20 संख्यारूपेण सन्निकटतां कुर्मः।



अधुना 12 संख्यां स्वीकुर्वन्तु। एषा अपि 10-20 एतयोः मध्ये एव अस्ति। परन्तु संख्या 20 अस्याः अपेक्षया 10 संख्यायाः समीपे अस्ति। अतः वयं 12 संख्यां निकटतम-दशकपर्यन्तं 10 संख्यारूपेण सन्निकटतांसन्निकृष्टतां प्रापयामः।

भवन्तः 76 संख्यायाः सन्निकटतासन्निकृष्टा संख्या का इति निर्णयन्ति ? किम् एषा 80 नास्ति ?

1, 2, 3, 4 एताः संख्याः 10 संख्यायाः अपेक्षया 0 संख्यायाः सन्निकटे सन्ति । अतः ताः संख्याः 0 संख्यारूपेण सन्निकटिताः कुर्मः । 6, 7, 8, 9 संख्याः 0 संख्यायाः अपेक्षया 10 संख्यायाः सन्निकटे सन्ति । अतः ताः संख्याः 10 संख्यारूपेण सन्निकटिताः कुर्मः । संख्या 5 तु द्वयोर्मध्ये अस्ति । साधारणरूपेण वयं तां 5 संख्यां 10 संख्यारूपेण सन्निकटतां कुर्मः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां संख्यानां निकटतम-दशक-पर्यन्तं सन्निकर्षणं कुर्वन्तु ।

28	32	52	41	39	48
64	59	99	215	1453	2936

1.3.3 सन्निकटनद्वारा निकटतम-शतकपर्यन्तम् आकलनम्

410 संख्या 400 संख्यायाः निकटे अस्ति अथवा 500 संख्यायाः निकटे अस्ति ?

410 तु 400 संख्यायाः अतिनिकटे अस्ति । अतः इमां संख्यां निकटतम-शतकपर्यन्तं 400 संख्यारूपेण सन्निकटतां कुर्मः ।

संख्या 889, 800-900 संख्ययोः मध्ये अस्ति ।

एषा तु 900 संख्यायाः निकटे अस्ति । अतः इमां संख्यां निकटतम-शतकपर्यन्तं 900 संख्यारूपेण सन्निकटतां कुर्मः ।

संख्याः 1 तः 49, संख्या 100 तुलनापेक्षया 0 संख्यायाः निकटे सन्ति । अतः एताः संख्याः निकटतम-शतकपर्यन्तं 0 संख्यारूपेण सन्निकृष्टताः कुर्मः । संख्याः 51 तः 99, संख्या 0 तुलनापेक्षया 100 संख्यायाः निकटे सन्ति । अतः एताः संख्याः निकटतम-शतकपर्यन्तं 100 संख्यारूपेण सन्निकटताः कुर्मः । संख्या 50 तु द्वयोर्मध्ये अस्ति । साधारणरूपेण वयं तां 50 संख्यां 100 संख्यारूपेण सन्निकटतांसन्निकटतां कुर्मः ।

अधोलिखिताः सन्निकटताः संख्याः सम्यगेव सन्ति उत न इति परीक्षणं कुर्वन्तु ।

841 ⟶ 800; ⟶ 9537 ⟶ 9500; ⟶ 49730 ⟶ 49700;

2546 ⟶ 2500; ⟶ 286 ⟶ 300; ⟶ 5750 ⟶ 5800;

168 ⟶ 200; ⟶ 149 ⟶ 100; ⟶ 9870 ⟶ 9800;

दोषः अस्ति चेत् सम्यक् कुर्वन्तु ।

1.3.4 सन्निकटताद्वारा निकटतम-सहस्रपर्यन्तम् आकलनम्

वयं जानीमः यत् संख्याः 1 तः 499, संख्या 1000 तुलनापेक्षया 0 संख्यायाः निकटे सन्ति । अतः एताः संख्याः निकटतम-सहस्रपर्यन्तं 0 संख्यारूपेण सन्निकटताः कुर्मः । संख्याः 501 तः 999, संख्या 0 तुलनापेक्षया 1000 संख्यायाः निकटे सन्ति । अतः एताः संख्याः निकटतम-सहस्रपर्यन्तं 1000 संख्यारूपेण सन्निकटिताः कुर्मः । संख्या 500 तु द्वयोर्मध्ये अस्ति । साधारणरूपेण वयं तां 500 संख्यां 1000 संख्यारूपेण सन्निकटतांसन्निकटतां कुर्मः ।

अधोलिखिताः सन्निकटताः संख्याः सम्यगेव सन्ति उत न इति परीक्षणं कुर्वन्तु । यदि दोषः अस्ति तर्हि निवारयन्तु ।

2573	⟶	3000	53552	⟶	53000
6404	⟶	6000	65437	⟶	65000
7805	⟶	7000	3499	⟶	4000

प्रयत्नं कुर्वन्तु

दत्तसंख्याः निकटतम-दशक-शतक-सहस्र-दशसहस्रपर्यन्तं सन्निकर्षतां कुर्वन्तु।

दत्तसंख्याः	निकटतनपर्यन्तम्	सन्निकटितसंख्याः
75847	दशकम्	_____
75847	शतकम्	_____
75847	सहस्रम्	_____
75847	दशसहस्रम्	_____

1.3.5 संख्या-सङ्क्रियाणां परिणामानां आकलनम्।

वयं कथं संख्यानां योजनं कुर्मः ? वयं दत्तविधीनां नियमबद्धरूपेण प्रयोगं कृत्वा संख्यानां योजनं कुर्मः। वयं तु संख्यानां एकक-दशक-शतक-स्थानानां अङ्काः यथा एकस्मिन्नेव स्तम्भे यथा स्युः तथा अवधानं दत्वा एव लेखनं कुर्मः। उदाहरणार्थं 3946 + 6579 + 2050 इदं समीकरणम् एवं लिखामः।

	TTh	Th	H	T	O
		3	9	4	6
		6	5	7	9
	+	2	0	5	0

अनन्तरं वयम् एककस्थानस्य स्तम्भस्य अङ्कान् योजयामः। यदि आवश्यकता भवति तर्हि वयं उचित-संख्यां प्राप्तरूपेण दशकस्थाने नेष्यामः। ततः वयं दशकस्थानस्य स्तम्भस्य अङ्कान् योजयामः। एवमेव भवन्तः अग्रे कर्तुं पारयन्ति। अस्यां प्रक्रियायां समयः अपेक्षते।

अनेकस्थितिषु अस्माकं कृते बहुवेगेन उत्तरान्वेषणास्य आवश्यकता भवति। उदाहरणार्थं भवन्तः स्वल्पं धनं स्वीकृत्य विपणीं गच्छन्ति। तदा आकर्षकवस्तूनां विविधतां दृष्ट्वा तान् क्रेतुम् इच्छा भवति। तदा केषां वस्तूनां क्रयणं कर्तव्यम् इत्यस्य निर्णयं शीघ्रं स्वीकर्तव्यं भवति। तदा धनराशेः आकलनस्य आवश्यकता भवति। सः एव भवद्भिः स्वीकरिष्यमाणानां वस्तूनां मूल्यानां योगः अपि भवति।

एकेन वणिजा स्थानद्वयात् धनं प्राप्तव्यम् अस्ति। एकस्मात् पक्षतः 13,569 रू अन्यस्मात् 26,785 रू प्राप्तव्यम्। तेन सायंकालपर्यन्तं अन्यस्य कृते 37,000 रू धनं देयम् अस्ति। सः संख्यानां निकटतम-सहस्रपर्यन्तं सन्निकटतां कृत्वा शीघ्रातिशीघ्रं सामान्य-उत्तरं प्राप्नोति। सः सन्तोषमपि अनुभवति यत् तस्य समीपे आवश्यक-धनराशिः अस्ति इति।

किं भवन्तः अपि चिन्तयन्ति यत् तस्य समीपे आवश्यक-धनराशिः अस्ति ? किं भवन्तः यथार्थयोगेन विना वक्तुं शक्नुवन्ति ?

शीला-मोहनाभ्यां मासिकं व्ययविवरणं करणीयम् अस्ति । तौ तयोः परिवहनस्य, शालायाः आवश्यकसमग्र्याः, गृहोपयोगिसामग्र्याः, क्षीरस्य वस्त्रस्य च मासिक-व्ययं जानीतः । अस्मिन् मासे कुत्रापि गन्तव्यमपि अस्ति एवम् उपयनस्य क्रयणमपि कर्तव्यम् अस्ति । तौ एतेभ्यः सर्वेभ्यः सम्भविष्यमाणस्य व्ययस्य आकलनं कुरुतः । अपि च तौ पश्यतः यत् तावान् धनराशिः तयोः पार्श्वे अस्ति वा ? धनराशिः पर्याप्तः भवति वा ? अथवा न भवति ? इति ।

किं तौ सहस्रपर्यन्तं सन्निकटतां कुर्वन्ति यथा व्यापारी कृतवान् आसीत् ?

एवमेव पञ्चप्रसङ्गान् चिन्तयन्तु यत्र वयं योगेषु अथवा अन्तरेषु आकलनं कुर्मः ।

किं वयं सर्वत्र एकस्मिन्नेव स्थाने एव संख्यानां सन्निकटतां कृतवन्तः ?

यत्र वयं संख्यानां परिणामानाम् आकलनं कुर्मः तत्र सर्वत्र कोऽपि निश्चितः नियमः नास्ति । अस्य विधेः अपेक्षा तु कियन्ती परिशुद्धता अपेक्षते, कियत् शीघ्रं अपेक्षते, अनुमानित-उत्तरं कियत् अर्थपूर्णम् अस्ति इत्येतेषाम् उपरि एव अवलम्बिता भवति ।

1.3.6 योगस्य अथवा अन्तरस्य आकलनम्

वयम् उपरि दृष्टवन्तः यत् एकां संख्यां किमपि स्थानपर्यन्तं सन्निकटतां कुर्मः । व्यापारी तु धनराशिं निकटतम-सहस्रपर्यन्तं सन्निकटतां कृतवान् अपि च सन्तुष्टः अभवत् यत् तस्य समीपे पर्याप्तः धनराशिः अस्ति इति । अतः यदि भवतां कृते कस्यापि योगस्य अथवा अन्तरस्य आकलन-अपेक्षा अस्ति चेत् तर्हि भवतां कृते अवधानम् अपेक्षते यत् किमर्थं भवन्तः आकलनम् इच्छन्ति अपि च किं स्थानपर्यन्तं भवन्तः सन्निकर्षणम् इच्छन्ति इति ।

अधोलिखितानि उदाहरणानि पश्यन्तु ।

उदाहरणम् 5 : 5,290 + 17,986 इत्यस्य आकलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम्: वयं पश्यामः यत् 17,986 > 5,290 अस्ति ।

वयं निकटतम-सहस्रपर्यन्तं सन्निकटतां कुर्मः ।

17,986 सन्निकटतासन्निकटता भवति		18,000
+5,290 सन्निकटतासन्निकटता भवति	+	5,000
आकलितस्य योगः	=	23,000

किम् एषः विधिः कार्यं करोति ? भवन्तः यथार्थ-उत्तरम् अन्विष्य आकलनेन सह तस्य तुलनां कृत्वा पश्यन्तु यत् एतत् आकलनं विवेकपूर्णम् अस्ति उत न इति ।

उदाहरणम् 6 : 5,673 – 436 इत्यस्य आकलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : प्रारम्भे तु वयं सहस्रपर्यन्तं सन्निकटतांसन्निकटतां कुर्मः । (किमर्थम् ?)

5,673 सन्निकटतासन्निकटता भवति		6,000
– 476 सन्निकटतासन्निकटता भवति	–	0
आकलितस्य अन्तरम्	=	6,000

एतत् विवेकपूर्णम् आकलनं नास्ति । किमर्थं विवेकपूर्णं नास्ति ? आयान्तु निकटतम-आकलनस्य प्राप्त्यर्थं निकटतम-शतकपर्यन्तम् आकलनं कुर्मः ।

5,673 सन्निकटता भवति		5,700
– 476 सन्निकटता भवति	–	400
आकलितस्य अन्तरम्	=	5,300

1.3.7 गुणनफलस्य आकलनम्

वयं कथं गुणनफलस्य आकलनं कुर्मः ?

19 x 78 इत्यस्य आकलनं किम् ?

स्पष्टता अस्ति यत् इदं गुणनफलं 2000 तः न्यूनम् अस्ति। कथम् ? यदि वयं 19 इत्यस्याः निकटतम-दशकपर्यन्तं स्वीकुर्मः तर्हि 20 लभ्यते। 78 इत्यस्याः निकटतम-दशकपर्यन्तं स्वीकुर्मः तर्हि 80 लभ्यते।

अधुना 20 x 80 = 1600 अस्ति।

62 x 182 अत्र पश्यन्तु।

यदि वयं संख्याद्वयस्यापि शतकपर्यन्तं सन्निकट-मानं स्वीकुर्मः तर्हि 100 x 200 = 20,000 भवति। एतत्तु वास्तविक-गुणनफलापेक्षया बहु अधिकम् अस्ति। अतः अधुना वयं किं कुर्मः ? यदि अस्माकं कृते विवेकपूर्णम् आकलनम् अपेक्षते तर्हि द्वयोः अपि निकटतम-दशकपर्यन्तं सन्निकटित-संख्यां स्वीकुर्मः। एते क्रमशः 60, 180 स्तः। इदानीं 60 x 180 = 10,800 भवति। इदम् एकं उत्तमम् आकलनम् अस्ति परन्तु तावत् शीघ्रं अस्य प्राप्तिः न भवति। यदि वयं 63 संख्यां निकटतम-दशकपर्यन्तं 60 इति स्वीकुर्मः तथैव 182 संख्यां निकटतम-शतकपर्यन्तं 200 इति स्वीकुर्मः चेत् तर्हि अस्माकं कृते 60 x 200 = 12,000 इत्यस्य उत्तरस्य प्राप्तिः भवति। इदं गुणनफलस्य एकम् उत्तमम् आकलनम् अस्ति अपि च बहु शीघ्रेणापि अस्य प्राप्तिः भवति।

सन्निकटनस्य व्यापकखं नियमः अस्ति यत् प्रत्येकं गुणनसंख्यां तदीय-बृहत्तम-स्थानपर्यन्तं सन्निकटतां कुर्वन्तु अपि च सन्निकटतसंख्यानां गुणनं कुर्वन्तु। अनेन प्रकारेण उपरि प्रदर्शित-उदाहरणे वयं 63 संख्यां दशकपर्यन्तं 182 संख्यां शतकपर्यन्तं सन्निकटतां कृतवन्तः।

अधुना उपरि उक्त-नियमानुसारेण 81 x 479 इत्यस्य आकलनं कुर्वन्तु।

479 सन्निकटता भवति 500 (शतकपर्यन्तम्)

81 सन्निकटता भवति 80 (दशकपर्यन्तम्)

अतः आकलितं गुणनफलं = 500 x 80 = 40,000 अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां गुणनफलानां आकलनं कुर्वन्तु।

(a) 87 x 313 (b) 9 x 795

(c) 898 x 785 (d) 958 x 387

एवमेव पञ्च-प्रश्नानां निर्माणं कुर्वन्तु अपि च समाधानं यच्छन्तु।

भवतां कृते आकलनस्य बहु-महत्त्वपूर्ण-उपयोगः एषः अस्ति यत् भवन्तः भवताम् उत्तरस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति। चिन्तयन्तु, भवन्तः 37 x 1889 इत्यस्य समाधानं कृतवन्तः, परन्तु निश्चितं नास्ति यत् उत्तरं

सम्यक् अस्ति उत न इति। अस्य गुणनफलस्य शीघ्रातिशीघ्रं प्राप्तुं योग्यम् एकं विवेकपूर्णम् आकलनम् 40 x 2000 = 80000 अस्ति। यदि भवताम् उत्तरं 80000 इत्यस्याः निकटे अस्ति चेत् प्रायः भवताम् उत्तरं सम्यक् अस्ति। किन्तु यदि उत्तरं 8000 अथवा 8,00,000 इत्यस्याः संख्यायाः निकटे भवति चेत् तर्हि गुणन-करण-समये अवश्यं कुत्रापि दोषः आचरितः एव अस्ति।

अभ्यासः 1.3

1. व्यापक-नियमस्य उपयोगं कृत्वा अधोलिखितानां सर्वेषाम् आकलनं कुर्वन्तु।

   (a) 730 + 998 (b) 796 – 314

   (c) 12,904 + 2,888 (d) 28,292 – 21, 496

   एवमेव इतोऽपि दश-उदाहरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

2. एकं सामान्यम् आकलनं (शतकपर्यन्तं सन्निकटितं) अपि च एकं निकटतम-आकलनं (दशकपर्यन्तं) ददतु।

   (a) 439 + 334 + 4,317 (b) 1,08,734 – 47,599

   (c) 8325 – 491 (d) 4,89,348 – 48,365

   एवमेव इतोऽपि चत्वारि-उदाहरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

3. व्यापकनियमस्य उपयोगं कृत्वा अधोलिखितानां गुणनफलानाम् आकलनं कुर्वन्तु।

   (a) 578 x 161 (b) 5281 x 3491

   (c) 1291 x 592 (d) 9250 x 29

   एवमेव इतोऽपि चत्वारि-उदाहरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

1.4 कोष्ठकानां प्रयोगः

सुमनः आपणतः 6 अभ्यासपुस्तकानां क्रयणं कृतवान्। प्रत्येकं पुस्तकस्य मूल्यं 10 रूप्यकाणि आसन्। तस्य भगिनी सामा एवमेव 7 अभ्यासपुस्तकस्य क्रयणं कृतवती। तयोः द्वारा दत्तस्य धनराशेः योगं अन्विषन्तु।

सीमा एवं परिकलनं कृतवती	**मीरा एवं परिकलनं कृतवती**
6 x 10 + 7 x 10	6 + 7 = 13
= 60 + 70	13 x 10
उत्तरम् = 130 रू	उत्तरम् = 130 रू

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् उत्तरं प्राप्तुं सीमया अपि च मीरया स्वीकृत-विधयः भिन्नाः आसन् परन्तु द्वयोः उत्तरं समानम् अस्ति अपि च प्राप्तः परिणामः अपि सम्यक् अस्ति। किमर्थम् ?

सीमा उक्तवती यत् मीरा 7 + 6 x 10 कृत्वा उत्तरं प्राप्तवती।

अप्पूः वदति यत् 7 + 6 x 10 = 7 + 60 = 67 इति। किन्तु मीरा यत् उत्तरं प्राप्तवती तत् उत्तरं एतेन समानं नास्ति। एते त्रयः अपि छात्राः भ्रमिताः अभवन्।

एतादृश-स्थितिषु भ्रमस्य निवारणार्थं वयं कोष्ठकानां प्रयोगं कुर्मः। कोष्ठकस्य प्रयोगं कृत्वा 6 अपि

च 7 एतयोः एकं समूहं कर्तुं शक्यते। अनेन प्रकारेण अस्य उत्तरं प्राप्तुं शक्यते। कथमिति पश्यन्तु।

(6+7) x 10 = 13 x 10

मीरा इदमेव कृतवती। सा प्रथमं 6 अपि च 7 एतयोः योगं कृतवती। अनन्तरं प्राप्तं योगं 10 संख्याद्वारा गुणनं कृतवती।

कोष्ठकानां प्रयोगेण स्पष्टं ज्ञायते यत् प्रथमं यावत् कोष्ठकानां ( ) अन्तः संख्याः एकं समूहं कृत्वा अनन्तरं बहिः स्थिता संक्रिया करणीया इति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कोष्ठकानां प्रयोगं कृत्वा अधोलिखितानां कृते व्यञ्जकं लिखन्तु।
   (a) नवद्वि-संख्ययोः योगस्य सङ्ख्याचतुष्टयेन गुणनम्।
   (b) अष्टादश तथा च षड् इति संख्यायोः वियोगस्य चतुर्भिः अङ्कैः विभजनम्।
   (c) पञ्चचत्वारिंशतः त्रयाणां द्वयोः च योगस्य त्रिगुणितेन विभजनम्।
2. (5 + 8) x 6 इत्यस्य विभिन्नं स्थितित्रयं लिखन्तु।
   (एतादृशी काचित् स्थितिः अस्ति - सोहनी रीता च 6 दिनानि कार्यं कृतवत्यौ। सोहनी प्रतिदिनं 5 होराः यावत् कार्यं कृतवान् तथा च रीता प्रतिदिनं 6 होराः यावत् कार्यं करोति। उभौ मिलित्वा एकस्मिन् सप्ताहे आहत्य कति घण्टाः यावत् कार्यं कृतवत्यौ ?
3. अधोलिखितानां कृते पञ्च-सन्दर्भान् लिखन्तु यत्र च कोष्ठकानां प्रयोगस्य आवश्यकता स्यात्।
   (a) 7 (8 – 3) (b) (7 x 2) (10 – 3)

1.4.1 कोष्ठकानां विस्तारणम्।

अधुना पश्यन्तु केन प्रकारेण कोष्ठकानां प्रयोगः करणीयः अपि च तेषां विस्तारणेन कार्यं क्रमबद्धरूपेण प्रचलति इति। किं भवन्तः कोष्ठकाणां प्रयोगेण विना वयं केषां सोपानानाम् अनुसरणं कुर्मः इति जानन्ति इति चिन्तयन्ति ?

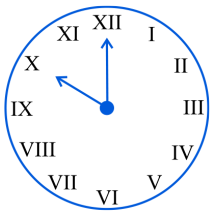
(i) 7 x 109 = 7 x (100 + 9) = 7 x 100 + 7 x 9 = 700 + 63 = 763

(ii) 102 x 103 = (100 + 2) x (100 + 3)
= 100 x 100 + 2 x 100 + 100 x 3 + 2 x 3
= 10,000 + 200 + 300 + 6 = 10,000 + 500 + 6
= 10,506

(iii) 17 x 109 = (10 x 7) x 109 = 10 x 109 + 7 x 109
= 10 x (100 + 9) + 7 x (100 + 9)
= 10 x 100 + 10 x 9 + 7 x 100 + 7 x 9
= 1000 + 90 + 700 + 63 = 1,790 + 63 = 1,853

1.5 रोमन-संख्याङ्कः

अद्यपर्यन्तं वयं हिन्दू-अरबीय-संख्याङ्क-पद्धतेः एव प्रयोगं कुर्वन्तः स्मः। किन्तु एतां पद्धतिम् अतिरिच्य अपि पद्धतयः सन्ति। तासु पुरातन-संख्याङ्कपद्धतिषु रोमन्-पद्धतिः अपि काचित् अस्ति।



अधुना अपि केषुचित् स्थलेषु अस्य उपयोगं कुर्मयं कुर्मः। उदाहरणार्थं वयं भित्तिघटिषु रोमन्-संख्यां द्रष्टुं शक्नुमः । वयं विद्यालयस्य समयसारिण्याम् अपि अस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः।

एवमेव इतोऽपि त्रीणि उदाहरणानि लिखन्तु यत्र वयं रोमन्-अङ्कानां प्रयोगं कुर्मः।

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX	X

क्रमशः संख्याः 1,2,3,4,5,6,7,8,9 अपि च 10 एतासां व्यञ्जनं कुर्वन्ति। ततः 11 कृते XI , 12 कृते XII ,… 20 कृते XX इत्यस्य उपयोगं कुर्मः।

अस्यां पद्धत्याम् हिन्दू-अरेबिक् संख्याभिः सह इतोऽपि अन्य-संख्याङ्काः च अपि लिख्यन्ते।

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

पद्धतेः नियमाः एवं सन्ति।

(a) यदि कस्याः अपि संख्यायाः पुनरावृत्तिः भवति तर्हि सा संख्या कतिवारम् आगच्छति तावत् वारं तस्याः मानस्य योगः भवति। अर्थात् II = 2 अस्ति , XX = 20 अस्ति। XXX = 30 अस्ति।

(b) यः कोऽपि सङ्केतः चतुर्वारं न आगच्छति। अपि च कदापि V, L, D एतेषां सङ्केतानां पुनरावृत्तिः न भवति।

(c) यदि लघु-मानं बृहत्-मानस्य दक्षिणभागे भवति चेत् तर्हि बृहत्-मानेन सह लघु-मानस्य योजनं भवति। यथा

VI = 5 + 1 = 6 XII = 10 + 2 = 12

LXV = 50 +10 +5 = 65

(d) यदि लघु-मानं बृहत्-मानस्य वामभागे भवति चेत् तर्हि बृहत्-मानात् लघु-मानस्य व्यवकलनं भवति। यथा

IV = 5 – 1 = 4 IX = 10 – 1 = 9

XL = 50 – 10 = 40 XC = 100 – 10 = 90

(e) सङ्केतान् V, L, D एतान् बृहत्-मानस्य वामभागे अथवा दक्षिणभागे कदापि न लिखामः। कदापि सङ्केतानां V, L, D एतेषां मानस्य व्यवकलनं न भवति।

सङ्केतम् I केवलम् V एवं च X अनयोः व्यवकलनं कर्तुं शक्यते। संकेतम् X केवलं L,M,C च इत्येतेषु व्यवकलनं कर्तुं शक्यते।

एतेषां नियमानां पालनेन एते अंशाः प्राप्ताः भवन्ति।

1	=	I	20	=	XX
2	=	II	30	=	XXX
3	=	III	40	=	XL
4	=	IV	50	=	L
5	=	V	60	=	LX
6	=	VI	70	=	LXX
7	=	VII	80	=	LXXX
8	=	VIII	90	=	XC
9	=	IX	100	=	C
10	=	X			

(a) उपरि दत्तसारिण्यां लुप्त-संख्याः रोमन् पद्धतौ लिखन्तु।

(b) XXXX, VX, IC, XVV इत्यादीन् लेखितुं न शक्नुमः। किमर्थम् इति भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?

उदाहरणम् 7 : अधोलिखिताः संख्याः रोमन्- पद्धत्यां लिखन्तु।

(a) 69 (b) 98

समाधानम् : (a) $69 = 60 + 9$

$= (50 + 10) + 9$

$= LX + IX$

अतः $69 = LXIX$

(b) $98 = 90 + 8$

$= (100 - 10) + 8$

$= XC + VIII$

अतः $98 = XCVIII$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

रोमन्- पद्धत्यां लिखन्तु

(a) 73 (b) 92

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. द्वयोः संख्ययोः मध्ये सा एव संख्या बृहती भवति यस्याम् अङ्कानां संख्या अधिका भवति। यदि द्वयोः मध्ये अङ्कानां संख्या समाना भवति तर्हि वयं वामभागे स्थितानां अङ्कानां तुलनां कुर्मः। अपि च यस्यां संख्यायां वाम-अङ्कः महान् भवति सा एव संख्या बृहती अपि भवति। पुनः एषः अङ्कः अपि समानः भवति चेत् एवमेव अङ्कानां तुलनां कृत्वा अग्रे सरामः।
2. दत्त-अङ्कानां संख्यायाः उल्लेखन-समये अवधानं देयं यत् केन प्रतिबन्धेन सह संख्यानां लेखनं करणीयम् इति। यथा 7, 8, 3, 5 एतान् अङ्कान् एकवारमेव उपयुज्य चतुर्णाम् अङ्कानां बृहत्-संख्यायाः निर्माणं कर्तुं बृहत्तमम् अङ्कं सर्वेषां वामभागे एव लेखनीयम्। तदनन्तरं तदपेक्षया लघु-अङ्कानां लेखनं करणीयम्।
3. चतुरङ्कानां लघुतमा संख्या अस्ति 1000। अर्थात् अङ्कत्रयस्य लघुतमा संख्या 999 भवति। पञ्च-अङ्कानां लघुतमा संख्या अस्ति 10000। अर्थात् चतुरङ्कानां लघुतमा संख्या 9999

भवति । एवमेव षड्-अङ्कानां लघुतमा संख्या अस्ति 100000 । अर्थात् पञ्च -अङ्कानां लघुतमा संख्या 99999 भवति । अग्रिम-संख्यानां कृते अपि अस्य एव क्रमस्य अनुसरणं कुर्मः ।

4. अल्पविरामानां प्रयोगः संख्यानां पठने लेखने च सहायतां करोति । भारतीय-संख्याङ्कन-पद्धत्याम् अल्पविरामस्य प्रयोगः दक्षिणभागतः त्रयाणाम् अङ्कानाम् अनन्तरं आरभ्य द्वयोः द्वयोः अङ्कानां कृते भवति । अन्ताराष्ट्रिय- संख्याङ्कन-पद्धत्याम् अल्पविरामस्य प्रयोगः दक्षिणभागतः त्रयाणाम् अङ्कानाम् अनन्तरं आरभ्य त्रयाणां त्रयाणाम् अङ्कानां कृते भवति । त्रयाणाम् अपि च षण्णाम् अङ्कानां प्रयुज्यमानः अल्पविरामः क्रमशः सहस्रम् मिलियन् इत्येताः संख्याः पृथक्-करोति ।
5. दैनिक-जीवने भिन्न-भिन्न-स्थानेषु अस्माकं कृते बृहत्-संख्यानाम् आवश्यकता भवति । यथा कस्मिंश्चित् विद्यालये छात्राणां संख्या, ग्रामस्य अथवा नगरस्य जनसंख्या, बृहत्-वस्तूनां क्रय-विक्रयणे धनराशिः, द्वयोः बृहत्-नगरयोः मध्ये दूरमापनम् इत्येतेषु स्थानेषु आवश्यकता भवति ।
6. स्मरन्तु यत् किलो इत्यस्य अर्थः भवति सहस्रम् । सेण्टी इत्यस्य अर्थः भवति शतभागः । मिली इत्यस्य अर्थः भवति सहस्रभागः । अपि च 1 किलोमीटर् = 1000 मीटर्, 1 मीटर् = 100 सेण्टीमीटर् = 1000 मिलीमीटर् भवति ।
7. अनेक-स्थितिषु अस्माकं कृते निश्चित-संख्यानाम् आवश्यकता न भवति किन्तु उपयुक्त-आकलनेन एव कार्यं प्रचलति । यथा एकस्याम् अन्ताराष्ट्रीय-हाकी-क्रीडायाः दर्शकानां संख्यां वक्तुं प्रायः 51,000 दर्शकाः क्रीडां दृष्टवन्तः इति वदामः । अत्र अस्माकं कृते निश्चित-संख्यायाः आवश्यकता नास्ति ।
8. आकलने तु अपेक्षानुसारेण संख्यानां परिशुद्धता क्रियते । यथा 4117 इत्यस्य सन्निकटता संख्या सहस्रे 4000 भवति शतके 4100 भवति ।
9. अनेक-सन्दर्भेषु सङ्क्रियाणां फलस्य अपि आकलनम् अपेक्षते । तदा वयं प्रयुक्त-संख्यानाम् आकलनं कृत्वा तेषां सङ्क्रियां कुर्मः येन शीघ्रतया फलं प्राप्नुमः ।
10. सङ्कियाणां फलस्य आकलनम् उत्तरस्य तोलने सहकरोति ।
11. अधिक-सङ्क्रियाणां फलान्वेषणे भ्रमस्य वारणाय कोष्ठकानां ( ) प्रयोगः क्रियते ।
12. वयं हिन्दू-अरेबिक् संख्याङ्क-पद्धत्याः प्रयोगं कुर्मः । एवमेव अन्या पद्धतिः अस्ति रोमन्-संख्याङ्क-पद्धतिः ।

पूर्ण-संख्याः

अध्यायः 2

2.1 भूमिका

वयं जानीमः यत् यदा वयं संख्यानां गणनस्य प्रारम्भं कुर्मः तदा 1, 2, 3, 4, ... इत्येतासां संख्यानां प्रयोगं कुर्मः । यदि गणनस्य प्रारम्भं कुर्मः तर्हि अस्माकं पुरतः स्वाभाविकरूपेण एताः एव संख्याः आगच्छन्ति । अत एव गणितज्ञाः एतासां संख्यानां कृते प्राकृतिक-संख्याः इति कथयन्ति ।

पूर्ववर्तिनी अपि च परवर्तिनी संख्या

प्रदत्तायां प्राकृतिक-संख्यायां यदि 1 इति इमां संख्यां योजयामः तर्हि भवन्तः अग्रिमां प्राकृतिकसंख्यां प्राप्नुं शक्नुवन्ति । अर्थात् भवन्तः तस्याः सङ्ख्यायाः परवर्तिनिसंख्यां प्राप्तुं शक्नुवन्ति ।

16 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः परवर्तिनी संख्या 16 + 1 = 17 इति अस्ति, 19 इत्यस्याः परवर्तिनी संख्या 19 + 1 = 20 अस्ति । अनेन प्रकारेण अग्रे अपि प्रचलति ।

16 संख्या 17 संख्यातः पूर्वम् आगच्छति । वयं कथयामः यत् 17 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी संख्या 17 – 1 = 16 अस्ति, 20 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी संख्या 20 – 1 = 19 अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. 19; 1997; 12000; 49; 100000; 2440701; 100199 अपि च 208090 एतासां पूर्ववर्तिनीं परवर्तिनीं च संख्यां लिखन्तु ।
2. किं कापि प्राकृतसंख्या अस्ति यस्याः पूर्ववर्तिनी संख्या एव नास्ति ?
3. किं कापि प्राकृतसंख्या अस्ति यस्याः परवर्तिनी संख्या एव नास्ति ? कापि अन्तिम-प्राकृतसंख्या अस्ति किम्?

3 इत्यस्याः संख्यायाः एका पूर्ववर्तिनी संख्या अस्ति एका च परवर्तिनी संख्या अस्ति । 2 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ? अस्याः परवर्तिनी 3 अस्ति अपि च पूर्ववर्तिनी 1 अस्ति । किं 1 इत्यस्याः परवर्तिनी अपि च पूर्ववर्तिनी द्वयमपि अस्ति ?

वयम् अस्माकं विद्यालयस्य छात्राणां संख्यायाः गणनां कर्तुं शक्नुमः । वयं कस्मिन्नपि नगरे विद्यमानानां जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । वयं सम्पूर्ण-भारते विद्यमानानां जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । सम्पूर्ण-विश्वस्य जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । एवमपि स्यात् यत् आकाशे विद्यमानानां नक्षत्राणाम् अपि च अस्माकं शिरसि विद्यमान-केशानां गणनां कर्तुं प्रायः न शक्नुमः, यदि शक्नुमः तर्हि तस्यापि एका संख्या आवश्यकी भविष्यति अपि च तत्र वयं 1 योजयित्वा तस्याः अपि बृहत्-संख्यां प्राप्नुमः ।

अधुना प्रायः एतत् स्पष्टमस्ति यत् बृहत्तम-प्राकृतसंख्या नास्ति एव । प्राकृत-संख्याभिः सह कार्यकरण-सन्दर्भे उपरि उक्त-विचारान् विहाय इतोऽपि अन्यप्रश्नाः अस्माकं पुरतः आयान्ति । एवमेव भवन्तः अन्य-प्रश्नानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति अपि च तेषां विषये मित्रैः सह चर्चां कर्तुं शक्नुवन्ति । किन्तु सर्वेषां प्रश्नानां समाधानं प्राप्तुं प्रायः न पारयन्ति ।

2.2 पूर्ण-संख्याः

वयं तु दृष्टवन्तः यत् प्राकृतिक-संख्या 1 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी संख्या नास्ति एव । प्राकृतिक-संख्यानां सङ्ग्रहे वयं शून्यं (0) 1 इत्यस्याः पूर्ववर्तिन्याः संख्यायाः रूपेण स्थापयामः ।

प्राकृत-संख्याः शून्येन सह मिलित्वा पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहं कुर्वन्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं सर्वाः प्राकृतसंख्याः पूर्ण-संख्याः अपि सन्ति ?
2. किं सर्वाः पूर्ण-संख्याः प्राकृतसंख्याः अपि सन्ति ?
3. लघुतमा पूर्णसंख्या का अस्ति ?
4. बृहत्तमा पूर्णसंख्या का अस्ति ?

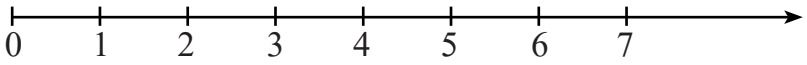
पूर्व-कक्ष्यासु भवन्तः पूर्ण-संख्याभिः सह यथा योगस्य,व्यवकलनस्य, गुणनस्य, विभाजनस्य अपि च सर्वविध-मूलभूतप्रक्रियाणां शिक्षणं प्राप्तवन्तः । इदमपि भवन्तः जानन्ति यत् एतादृश-प्रश्नानां समाधानं कर्तुं केन प्रकारेण अनुप्रयोगं कुर्मः इति । आयान्तु , एताः सङ्क्रियाः एकस्याः संख्यारेखायाः उपरि कुर्वन्तु । परन्तु प्रथमं तावत् संख्यारेखां जानन्तु ।

2.3 संख्या-रेखा

एकां रेखाम् आलिखन्तु । तदुपरि एकं बिन्दुं स्थापयन्तु । अस्य बिन्दोः 0 इति नाम ददतु । 0 इत्यस्य दक्षिणभागे पुनः एकं बिन्दुं स्थापयन्तु । तस्य 1 इति नाम ददतु । 0 अपि च 1 एतयोः मध्ये विद्यमानं

दूरम् एक-मात्रात्मकम् इत्युच्यते। एवमेव 1 इत्यस्याः संख्यायाः दक्षिणभागे एक-मात्रात्मके दूरे पुनः एकं बिन्दुं स्थापयित्वा तस्य 2 इति नाम प्रददतु। एवमेव अनेन विधिना एक-मात्रात्मक-दूरे संख्या-रेखायाः उपरि बिन्दूनां 3,4,5,... इति नामाङ्कनं कुर्वन्तु। भवन्तः रेखायाः दक्षिणभागे कामपि पूर्णसंख्यापर्यन्तं लेखितुं शक्नुवन्ति।

अधोभागे प्रदत्त-रेखा पूर्णसंख्यानां कृते संख्या-रेखा अस्ति।



बिन्दोः 2 अपि च 4 इत्यनयोः मध्ये कियद् अन्तरालम् अस्ति ? निश्चयेन एतद् अन्तरालं द्विमात्रात्मकम् अस्ति। किं भवन्तः बिन्दोः 2 अपि च 6, अपि च 2 अपि च 7 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरालं सूचयितुं शक्नुवन्ति ?

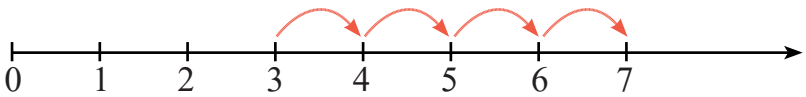
संख्या-रेखायां भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 7 संख्या 4 संख्यायाः दक्षिणतः अस्ति। अपि च 7 संख्या 4 संख्यापेक्षया बृहती अस्ति। अर्थात् $7 > 4$ अस्ति। 8 संख्या 6 संख्यायाः दक्षिणतः अस्ति। अर्थात् 6 अस्ति। एतत् आधारीकृत्य वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसंख्याद्वये सा एव बृहती भवति या संख्या संख्यारेखायाः उपरि अन्यसंख्यायाः दक्षिणभागे भवति। वामभागे या पूर्णसंख्या भवति सा लघ्वी भवति। उदाहरणार्थं, $4 < 9$ अस्ति ; 4 संख्या 9 संख्यायाः वामभागे अस्ति। एवमेव $12 > 5$ अस्ति ; 12 संख्या 5 संख्यायाः दक्षिणतः अस्ति।

भवन्तः 10 अपि च 20 इत्येतयोः विषये किं वक्तुं प्रभवन्ति ?

संख्या-रेखायां 30, 12, 18 इत्येतासां स्थितिं पश्यन्तु। का संख्या अतीव वामतः अस्ति ? किं भवन्तः 1005 अपि च 9756 एतयोः संख्ययोः मध्ये का संख्या अन्यापेक्षया दक्षिणभागे अस्ति ? संख्यारेखायां 12 इत्यस्याः परवर्तिनीं 7 संख्यायाः पूर्ववर्तिनीं च दर्शयन्तु।

संख्या-रेखायाः उपरि योगः

पूर्ण-संख्यानां योगं संख्या-रेखायाः उपरि दर्शयन्ति। आयान्तु 3 अपि च 4 इत्येतयोः योगं पश्यन्तु।

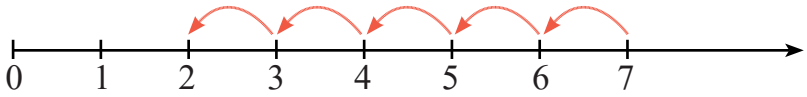


शरस्य प्रान्तभागे बिन्दुः 3 अस्ति। 3 संख्यातः प्रारम्भं कुर्वन्तु। यतः अस्यां संख्यायां 4 संख्यां योजनीयम् अस्ति। अतः वयं दक्षिणभागे 3 संख्यातः आरभ्य चत्वारि पदानि 4, 5, 6, 7 पर्यन्तं चलामः यथा उपरि दर्शितमस्ति। चतुर्थ-पदस्य अन्तिम-शरस्य प्रान्ते बिन्दुः 7 अस्ति। अनेन प्रकारेण 3 अपि च 4 इति एतयोः योगः 7 अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ अपि च $1 + 6$ एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं कुर्वन्तु।

व्यवकलनम् : द्वयोः पूर्णसंख्ययोः व्यवकलनम् अपि संख्या-रेखायाः उपरि दर्शयितुं शक्यते । आयान्तु 7 – 5 अभिजानन्तु ।

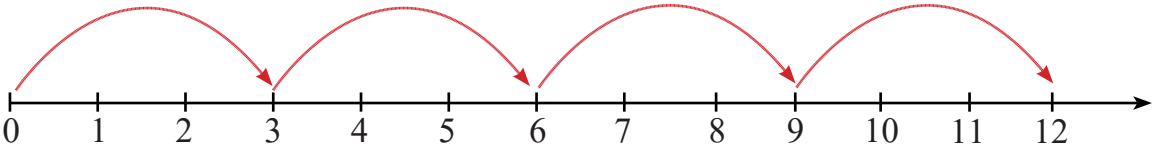


शरस्य प्रान्ते बिन्दुः 7 अस्ति । यतः 5 इत्यस्याः संख्यायाः व्यवकलनं करणीयम् । अतः वयं पञ्चपदानि वामभागे चलामः । वयं 2 बिन्दुं प्राप्नुमः । वयं 7 – 5 = 2 इति प्राप्नुमः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा 8 – 3 ; 6 – 2 अपि च 9 – 6 एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं प्राप्नुवन्तु कुर्वन्तु ।

गुणनम् : अधुना वयं संख्या-रेखायाः उपरि पूर्ण-संख्यानां गुणनं पश्यामः ।



आयान्तु 4 x 3 अभिजानन्तु ।

0 संख्यातः प्रारम्भं कुर्वन्तु अपि च दक्षिणभागे 3 मात्रात्मकं पदं चतुर्वारं चलन्तु । भवन्तः कं बिन्दुं प्राप्नुवन्ति ? भवन्तः 12 बिन्दुं प्राप्नुवन्ति । अतः वयं कथयामः यत् 4 x 3 = 12 अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा 2 x 6 ; 3 x 3 अपि च 4 x 2 एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं कुर्वन्तु ।

अभ्यासः 2.1

1. 10999 इति अस्याः अनन्तरं अग्रिमं प्राकृत-संख्यात्रयं लिखन्तु ।
2. 10001 इत्यस्याः संख्यायाः पूर्वतनं पूर्ण-संख्यात्रयं लिखन्तु ।
3. लघुतमा पूर्णसंख्या का अस्ति ?
4. 32 अपि च 53 इत्येतयोः मध्ये कति पूर्णसंख्याः सन्ति ?
5. अधोलिखितानां परवर्तिनीं संख्यां लिखन्तु ।
   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. अधोलिखितानां पूर्ववर्तिनीं संख्यां लिखन्तु ।
   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. संख्यानाम् अधोलिखितानां युग्मानां प्रत्येकम् अपि संख्यायाः कृते संख्या-रेखायाः उपरि कीदृशी पूर्णसंख्या अन्यसंख्यायाः वामभागे अस्ति । एतयोः मध्ये उपयुक्तानां चिह्नानां (>, <) प्रयोगमपि कुर्वन्तु ।

(a) 530, 503 (b) 370, 307

(c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001

8. अधोलिखितेषु कथनेषु किं कथनं सत्यं किं कथनम् असत्यं इति लिखन्तु।

(a) शून्यम् इति लघुतमा प्राकृतसंख्या अस्ति।

(b) 400 संख्या, 399 इति संख्यायाः पूर्ववर्तिनी अस्ति।

(c) शून्यं लघुतमा पूर्णसंख्या अस्ति।

(d) 600 संख्या, 599 संख्यायाः परवर्तिनी अस्ति।

(e) सर्वाः प्राकृतसंख्याः पूर्णसंख्याः एव सन्ति।

(f) सर्वाः पूर्णसंख्याः प्राकृतसंख्याः एव सन्ति।

(g) अङ्कद्वयात्मिकायाः पूर्णसंख्यायाः पूर्ववर्तिनी संख्या कदापि एक-अङ्कात्मिका न भवितुं शक्नोति।

(h) 1 लघुतमा पूर्णसंख्या अस्ति।

(i) प्राकृतसंख्यायाः 1 इत्यस्याः कापि पूर्ववर्तिनी संख्या नास्ति।

(j) पूर्णसंख्यायाः 1 इत्यस्याः कापि परवर्तिनी संख्या नास्ति।

(k) पूर्णसंख्या 13 इति, 11-12 इति अनयोः संख्ययोः मध्ये स्थिता अस्ति।

(l) पूर्णसंख्यायाः 0 इत्यस्याः कापि पूर्ववर्तिनी संख्या नास्ति।

(m) अङ्कद्वयात्मिकायाः संख्यायाः परवर्तिनी संख्या सदैव अङ्कद्वयात्मिका एका संख्या भवति।

2.4 पूर्णसंख्यानां गुणाः

यदा वयं सावधानं पूर्णसंख्यानाम् उपरि जायमानां विभिन्नप्रक्रियाणां निरीक्षणं कुर्मः तदा तासु अनेकगुणाः दृश्यन्ते। एतैः गुणैः वयम् उत्तमप्रकारेण संख्यानां विषये अवगन्तुं साहाय्यं प्राप्नुमः। अनेन सह एव, एते गुणाः बहूनां सङ्क्रियाणां सरलीकरणमपि कुर्वन्ति।

एतत् कुर्वन्तु

भवतः कक्ष्यायाः प्रत्येकं छात्रं कामपि अङ्कद्वयात्मिकां पूर्णसंख्यां स्वीकृत्य तयोः योगं कर्तुं वदन्तु। किं फलितांशः सर्वदा एका पूर्णसंख्या एव भवति ? योगः अनेन प्रकारेण भवितुम् अर्हति।

7	+	8	=	15, एका पूर्णसंख्या
5	+	5	=	10, एका पूर्णसंख्या
0	+	15	=	15, एका पूर्णसंख्या
.	+	.	=	…
.	+	.	=	…

एवमेव इतोऽपि पूर्णसंख्यानां पञ्चयुग्मान् स्वीकृत्य योगं कुर्वन्तु। किं योगः सदैव एका पूर्णसंख्या अस्ति ?

किं भवन्तः कमपि तादृशं युग्मं प्राप्तवन्तः, यस्य योगः एका पूर्णसंख्या नास्ति ? एतादृशयोः पूर्णसंख्याद्वययोः प्राप्तिः भवितुं न शक्यते, ययोः योगः एका पूर्णसंख्या भवितुं नार्हति। वयं वदामः यत् द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगः

एका पूर्णसंख्या एव भवति। यतः पूर्णसंख्यानां योगेन पूर्णसंख्या एव प्राप्यते। अतः पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहः योगस्य अन्तर्गतः संवृतः अस्ति। इदमेव पूर्नसंख्यानां योगस्य संवृतगुणः इति कथयन्ति।

किं पूर्णसंख्याः गुणनस्य अन्तर्गताः संवृताः अपि सन्ति ? भवन्तः कथम् अस्य समाधानस्य अन्वेषणं कुर्वन्ति ?

अनेन प्रकारेण गुणनं कर्तुं शक्यते।

7	X	8	=	56, एका पूर्णसंख्या
5	X	5	=	25,एका पूर्णसंख्या
0	X	15	=	0,एका पूर्णसंख्या
.	X	.	=	…
.	X	.	=	…

द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलमपि एका पूर्णसंख्या एव भवति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहः गुणनस्य अन्तर्गतः संवृतः अस्ति।

संवृतः गुणः – पूर्णसंख्याः योग-गुणनयोः अन्तर्गतः संवृतः अस्ति।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु, लिखन्तु च।

1. पूर्णसंख्याः व्यवकलनस्य अन्तर्गतसंवृताः न भवन्ति। किमर्थम् ? व्यवकलनम् अनेन प्रकारेण भवितुम् अर्हति।

6	–	2	=	4, एका पूर्णसंख्या
7	–	8	=	?, एका पूर्णसंख्या न
5	–	4	=	1, एका पूर्णसंख्या
3	–	9	=	?, एका पूर्णसंख्या न

भवतां पक्षतः इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य उपरि उक्त-कथनं पुष्टीकुर्वन्तु।

2. किं पूर्णसंख्याः विभजनस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति ? नैव। अधोलिखित-सारिणीं पश्यन्तु।

8	÷	4	=	2, एका पूर्णसंख्या
5	÷	7	=	5/7, एका पूर्णसंख्या न
12	÷	3	=	4, एका पूर्णसंख्या
6	÷	5	=	6/5, एका पूर्णसंख्या न

भवतां पक्षतः इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य उपरि उक्त-कथनं पुष्टीकुर्वन्तु।

शून्यद्वारा विभाजनम्

एकस्याः संख्यायाः विभाजनम् इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् तस्याः सङ्ख्यायाः पुनः पुनः व्यवकलनम् इति।

आयान्तु 8 ÷ 2 जानन्तु।

अष्टसङ्ख्यातः सङ्ख्याद्वयं पुनः पुनः वियोज्यताम्।

	8		
-	2	…… 1	
	6		कतिवारं व्यवकलिते सति वयं 0 पर्यन्तं
-	2	…… 2	प्राप्तवन्तः? चतुर्वारम् ।
	4		अतः वयं 8 ÷ 2 = 4 इति लिखामः।
-	2	…… 3	
	2		
-	2	…... 4	
	0		

अनेन विधिना 24 ÷ 8 अपि च 16 ÷ 4 इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

आयान्तु अधुना 2 ÷ 0 इमां सङ्क्रियां ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

	2		
-	0	…… 1	
	2		प्रतिवारं व्यवकलनेन वयं 2 संख्यां
-	0	…… 2	प्राप्नुमः। किं एषा प्रक्रिया कदाचित् समाप्तिं
	2		यास्यति ? नैव।
-	0	…… 3	**अतः वयं 2 ÷ 0 इति परिभाषिता नास्ति इति**
	2		**वदामः।**
-	0	…... 4	

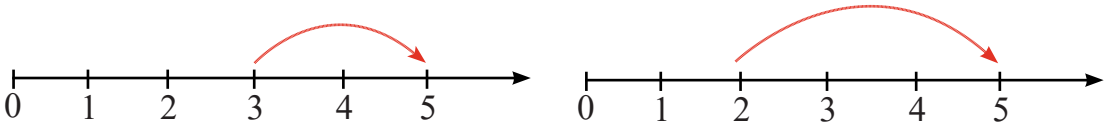
आयान्तु अधुना 7 ÷ 0 इमां सङ्क्रियां ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

	7		व्यवकलनस्य कस्मिन्नपि स्तरे शून्यस्य (0)
-	0	…… 1	प्राप्तिः न भवति।
	7		**अतः वयं 7 ÷ 0 अस्याः परिभाषा नास्ति इति**
-	0	…… 2	**वदामः।**
	7		5 ÷ 0 अपि च 16 ÷ 0 एतयोः कृते अपि अस्य
-	0	…… 3	परीक्षणं कुर्वन्तु।
	7		

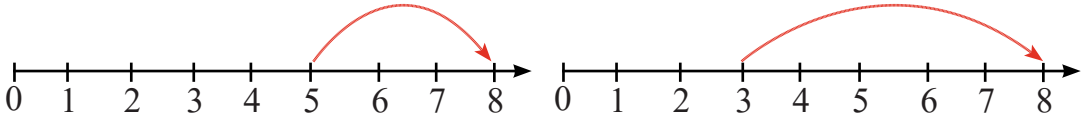
पूर्णसंख्यानां शून्येन विभाजनं परिभाषितं नास्ति।

योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमेयता

संख्या-रेखायाः अधोलिखितं चित्रं किं दर्शयति ? स्थितिद्वये अपि वयं 5 संख्यां प्राप्नुमः ।



अतः 3 + 2 अपि च 2 + 3 एतत् द्वयम् अपि समानम् अस्ति । उभाभ्यां 5 इति उत्तरं प्राप्यते ।
अनेन प्रकारेण 5 + 3 अपि च 3 + 5 एतत् द्वयमपि समानम् अस्ति ।



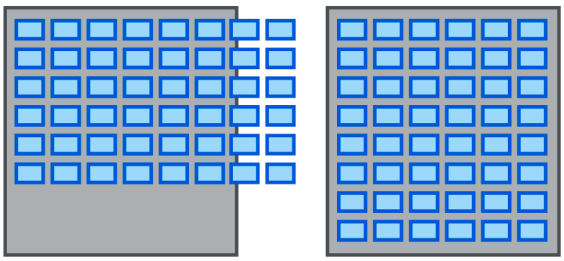
अनेन प्रकारेण 4 + 6 अपि च 6 + 4 इत्यनयोः अपि एवमेव कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । किम् एतत् तदा अपि सत्यं भविष्यति ? यदा यदा वयं द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगं कुर्मः तदा सर्वदा संख्ययोः क्रमविनिमयेन अपि योगस्य फलं समानं भवति ।

भवन्तः पूर्णसंख्याद्वयं केनापि क्रमेण योजयितुं शक्नुवन्ति ।

वयं वदामः यत् पूर्णसंख्यानां कृते योगः क्रमविनिमयः अस्ति । अमुमेव गुणं योगस्य क्रमविनिमयता इति वदामः ।

मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु ।

भवतां गृहे कश्चन प्रीतिभोजकार्यक्रमः अस्ति । भवन्तः बान्धवानां कृते आसन्दानां 6 पङ्क्तीनां स्थापनं कुर्वन्ति यस्यां प्रत्येकं पङ्क्तौ 8 आसन्दाः सन्ति । प्रकोष्ठः तावान् विशालः नास्ति यत्र आसन्दानां 8 पङ्क्तीनां स्थापनं कर्तुं शक्यते । भवन्तः इत्थं चिन्तयन्तु यत् 8 पङ्क्तीनां स्थापनं कुर्मः यत्र प्रत्येकं पङ्क्तौ 6 आसन्दाः भवेयुः इति । तथा कर्तुं भवतां कृते इतोऽपि अधिकाः आसन्दाः अपेक्षन्ते किम् ?



किं गुणनस्यापि क्रमविनिमयता-गुणः भवति ? संख्ययोः 4 अपि च 5 एतयोः गुणनं भिन्न-भिन्न-क्रमेण कुर्वन्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् 4 x 5 = 5 x 4 अस्ति ।
किम् इदं 3 x 6 अपि च 5 x 7 इत्यत्रापि सत्यम् अस्ति ?

भवन्तः केनापि क्रमेण द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

वयं वदामः यत् पूर्णसंख्यानां कृते गुणनं क्रमविनिमयः अस्ति ।
इत्थं च **पूर्णसंख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमयता अस्ति ।**

परीक्षणं कुर्वन्तु ।

i) पूर्णसंख्यानां कृते व्यवकलनस्य क्रमविनिमयता नास्ति । संख्यानां विभिन्नं युग्मत्रयं स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

ii) किं $6 \div 3$ अपि च $3 \div 6$ एतत् द्वयमपि समानम् ?

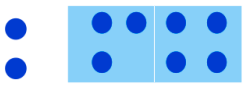
पूर्णसंख्यानां इतोऽपि युग्म स्वीकृत्य स्व-उत्तरान् पुष्टीकुर्वन्तु ।

योगस्य अपि च गुणनस्य सहचारिता

अधोलिखितानि चित्राणि पश्यन्तु ।

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



उपरि, (a) इत्यस्य अनुसारेण भवन्तः प्रथमतया 2 अपि च 3 एतयोः योगेन सह 4 इत्यस्य योगं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

एवमेव (b) इत्यस्य अनुसारेण भवन्तः प्रथमतया 3 अपि च 4 एतयोः योगेन सह 2 इत्यस्य योगं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

किं द्वयोः फलितांशः समानः नास्ति ?

वयम् इदमपि प्राप्नुमः यत्

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ तथा $5 + (7+ 3) = 5 + 10 = 15$ अस्ति ।

अतः $(5 + 7) + 3 = 5 + (7+ 3)$ अभवत् ।

एषः एव गुणः पूर्णसंख्यानां योगस्य साहचर्य-गुणः इत्युच्यते ।

संख्याः 2, 8, अपि च 6 एतासां कृते अस्य गुणनस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

उदाहरणम् 1 : संख्याः 234, 197 अपि च 103 इत्येतासां योगं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : $234 + 197 + 103 = 234 + (197 + 103)$

$= 234 + 300$

$= 534$

अवधानं यच्छन्तु परिशीलयन्तु यत् योगस्य सरलीकरणार्थं वयं केन प्रकारेण संख्ययोः समूहं कुर्मः इति ।

क्रीडां क्रीडन्तु ।

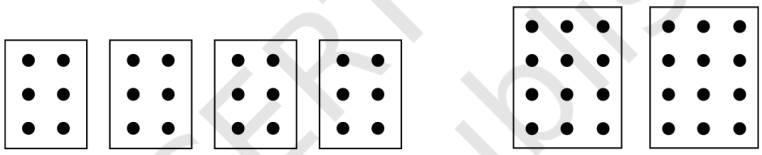
भवन्तः मित्रैः सह इमां क्रीडां क्रीडितुं शक्नुवन्ति ।

भवन्तः 1 संख्यातः 10 पर्यन्तं कामपि संख्यां वदन्तु । अधुना भवतां मित्रम् तया संख्यया सह 1 संख्यातः 10 पर्यन्तं कामपि संख्यां योजयति । पुनः भवतां क्रमः अस्ति । अपि च पुनः पुनः द्वौ मिलित्वा क्रमेण क्रीडन्तु । यः पूर्वं 100 संख्यां प्राप्नोति सः विजयशाली विजयी भविष्यति । यदि भवन्तः एव सर्वदा विजयशालिनः भवितुम् इच्छन्ति तर्हि भवतां युक्तिः कथं भवेत् ?

(a) (b)

अधोलिखितासु आकृतिषु प्रदर्शितं गुणनतथ्यं पश्यन्तु। (आकृतिः 2.1)

(a) अपि च (b) इत्येतयोः बिन्दूनां संख्यां गणयन्तु। भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? द्वयोः अपि बिन्दूनां संख्या समाना अस्ति। (a) इत्यत्र प्रत्येकं कोष्ठके 2 x 3 बिन्दवः सन्ति। अतः आहत्य बिन्दूनां संख्या (2 x 3) x 4 = 24 अस्ति।



(a) (b)

आकृतिः 2. 1

(b) इत्यत्र प्रत्येकं कोष्ठके 3 x 4 बिन्दवः सन्ति। अतः आहत्य बिन्दूनां संख्या 2 x (3 x 4) = 24 अस्ति। अपि च (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4) अस्ति। अनेन प्रकारेण भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् (3 x 5) x 4 = 3 x (5 x 4) अस्ति।

अमुमेव पूर्णसंख्यानां गुणनस्य साहचर्य-गुणः इति वदामः।

चिन्तयन्तु, इत्थम् अभिजानन्तु च।

कीदृशं गुणनं सरलम् अस्ति ? किमर्थं कुतः सरलम् अस्ति ?

(a) (6 x 5) x 3 अथवा 6 x (5 x 3)

(b) (9 x 4) x 25 अथवा 9 x (4 x 25)

उदाहरणम् 2 : 14 + 17 + 6 इमां सङ्क्रियां विधिद्वयेन अभिजानन्तु।

समाधानम् : 14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37

14 + 17+ 6 = 14 + (17 + 6) = 14 + 23 = 37

अत्र भवन्तः योगस्य साहचर्यगुणस्य अपि च क्रमविनिमयतागुणस्य च संयोजनस्य प्रयोगं कृतवन्तः। किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् क्रमविनिमेमय-साहचर्यगुणयोः प्रयोगेन परिकलनं सरलं भवति इति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

7 + 18 + 13 अपि च 16 + 12 + 4 इमां सङ्क्रियाम् अभिजानन्तु।

गुणनस्य साहचर्यनियमः अधोलिखितप्रश्नानां समाधाने उपयोगी भवति।

उदाहरणम् 3 : 12 x 35 इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

समाधानम् : 12 x 35 = (6 x 2) x 35 = 6 x (2 x 35) = 6 x 70 = 420

अस्मिन् उदाहरणे वयं लघुतमां समसंख्यां 5 संख्यायाः गुणजेन गुणनं कृत्वा सरलतया उत्तरं प्राप्तुं साहचर्य-गुणस्य उपयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणम् 4 : 8 x 1769 x 125 इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

समाधानम् : 8 x 1769 x 125 = 8 x 125 x 1769 (भवन्तः अत्र कस्य गुणस्य प्रयोगं कुर्वन्तः सन्ति?)

= (8 x 125) x 1769 = 1000 x 1769 = 1769000

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अभिजानन्तु।

25 x 8358 x 4 ; 625 x 3759 x 8

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

किं (16 ÷ 4) ÷ 2 = 16 ÷(4 ÷ 2) अस्ति ?

किं विभाजनस्य कृते अपि साहचर्य-गुणस्य अन्वयः भवति ? नास्ति।

मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। किं (28 ÷ 14) ÷ 2 अपि च 28 ÷ (14 ÷ 2) एतत् द्वयमपि समानम् ?

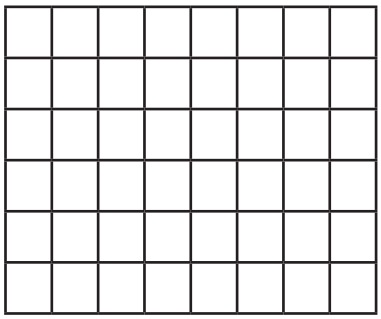
एतत् कुर्वन्तु

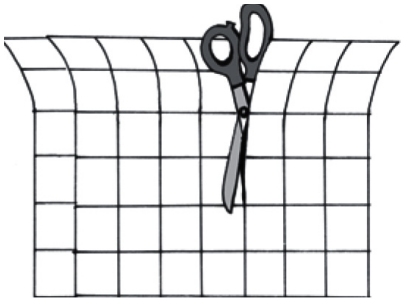
योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणम्

6 सेमी x 8 सेमी मापस्य एकं एकम् आलेखपत्रं लिखन्तु यत्र

1 सेमी x 1 सेमी मापस्य वर्गः स्यात्।

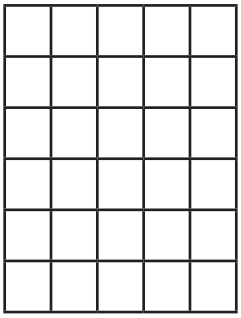
भवतां समीपे आहत्य कति वर्गाः सन्ति ?



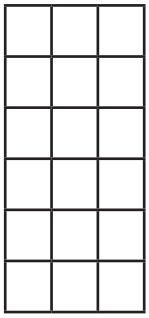


किं एषा संख्या 6 x 8 अस्ति ?

अधुना एतत् पत्रं 6 सेमी x 5 सेमी अपि च 6 सेमी x 3 सेमी मापस्य भागद्वयं कुर्वन्तु। यथा चित्रे प्रदर्शितम् अस्ति।



वर्गाणां संख्या : किम् एतत् 6 x 5 अस्ति ?



वर्गाणां संख्या : किम् एतत् 6 x 3 अस्ति ?

भागद्वये आहत्य कति वर्गाः सन्ति ?

किम् एतत् (6 x 5) + (6 x 3) अस्ति ? किम् अस्य अर्थः 6 x 8 = (6 x 5) + (6 x 3) एवम् अस्ति ?

किन्तु, 6 x 8 = 6 x (5 + 3) अस्ति। किम् इदं दर्शयति यत् 6 x (5 + 3) = (6 x 5) + (6 x 3)

एवमेव भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् 2 x (3 + 5) = (2 x 3) + (2 x 5) अस्ति।

अमुमेव गुणं योगस्य उपरि गुणनस्य वितरण-गुणः इति वदामः।

वितरण-गुणस्य प्रयोगद्वारा 4 x (5 + 8) ; 6 x (7 + 9) अपि च 7 x (11 + 9) एतत् सर्वम् अभिजानन्तु।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

अधुना अधोलिखित-गुणनप्रक्रियां पश्यन्तु अपि च चर्चां कुर्वन्तु यत् किं वयं संख्यानां गुणनसमये योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणगुणस्य प्रयोगं कुर्मः ?

	425		
X	136		
	2550	425 x 6	(6 एककैः गुणनम्)
	12750	425 x 30	(3 दशकैः गुणनम्)
	42500	425 x 100	(1 शतकैः गुणनम्)
	57800	425 x (6 + 30 + 100)	

उदाहरणम् 5 : एकस्य विद्यालयस्य उपाहारगृहे प्रतिदिनं भोजनार्थं 20 रूरूप्यकाणि अपि च क्षीरार्थं 4 रूप्यकाणि स्वीकुर्वन्ति। तर्हि भवन्तः 5 दिनेषु आहत्य कियतः धनस्य व्ययं कुर्वन्ति ?

समाधानम् : अमुं प्रश्नं विधिद्वयेन समाधातुं शक्यते शक्नुमः।

विधि 1 : भोजनार्थं 5 दिनानां धनराशिं जानन्तु।

क्षीरार्थं 5 दिनानां धनराशिं जानन्तु।

पुनः द्वयोः योजनं कुर्वन्तु।

भोजनस्य मूल्यम् = 5 x 20 रू.

क्षीरस्य मूल्यम् = 5 x 4 रू.

आहत्य मूल्यम् = (5 x 20) रू + (5 x 4) रू = (100 + 20) रू

= 120 रू

विधि 2 : एकस्य दिनस्य आहत्य धनराशिं जानन्तु।

पुनः तं 5 तः गुणनं कुर्वन्तु।

एकस्य दिनस्य (भोजनम् + क्षीरम्) आहत्य मूल्यम् = (20 x 4) रू

5 दिनानां आहत्य मूल्यम् = 5 x (20 + 4) रू = (5 x 24) रू

= 120 रू

इदम् उदाहरणं दर्शयति यत्

5 x (20 + 4) = (5 x 20) + (5 x 4) अस्ति।

एषः एव योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणगुणः अस्ति।

उदाहरणम् 6 : वितरणगुणस्य प्रयोगं कृत्वा 12 x 35 अभिजानन्तु।

समाधानम् : 12 x 35 = 12 x (30 +5) = 12 x 30 + 12 x 5

= 360 + 60 = 420

उदाहरणम् 7 : सरलं कुर्वन्तु : 126 x 55 + 126 x 45

समाधानम् : 126 x 55 + 126 x 45 = 126 x (55 + 45) = 126 x 100

= 12600

प्रयत्नं कुर्वन्तु

वितरण-गुणस्य प्रयोगं कृत्वा 15 x 68, 17 x 23 अपि च 69 x 78 + 22 x 69 एतासां सङ्क्रियाणां फलं जानन्तु।

तत्समकः अवयवः (योगस्य अपि च गुणनस्य कृते)

पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहः प्राकृतसंख्यानां सङ्ग्रहाणाम् अपेक्षया कथं भिन्नः अस्ति ? भिन्नता तु केवलं पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहे 'शून्यस्य' उपस्थितिमात्रेण अस्ति। योगे तु 'शून्यस्य' महत्त्वं पात्रम् अस्ति।

अधोलिखित-कोष्ठकं भवतां कृते शून्यस्य महत्त्वं ज्ञातुं साहाय्यं करोति।

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	....	=	....

यदि भवन्तः पूर्णसंख्यासु शून्यस्य योगं कुर्वन्ति चेत् तर्हि फलितांशः कः भवति ?

एषा तु पुनः समाना पूर्णसंख्या अस्ति। अतः 'शून्यं' पूर्णसंख्यानां तत्समक-अवयवः अथवा योज्य-तत्समकः इत्युच्यते।

गुणने अपि शून्यस्य महत्त्वं स्थानम् अस्ति । कामपि संख्यां शून्येन सह गुणनं कुर्मः चेत् फलितांशः 'शून्यम्' एव भवति ।

उदाहरणार्थम् अधोलिखितं प्रतिरूपं पश्यन्तु ।

5 x 6 = 30
5 x 5 = 25
5 x 4 = 20
5 x 3 =15
5 x 2 = …
5 x 1 = …
5 x 0 = ?

पश्यन्तु कथं गुणनफलं न्यूनं भवति इति ।
किं भवन्तः प्रतिरूपं पश्यन्तः सन्ति?
किं भवन्तः अन्तिम-चरणस्य अनुमानं कर्तुं प्रभवन्ति ?
किम् एतत् प्रतिरूपं अन्य-पूर्णसंख्यानां कृते अपि सत्यम् ?
अन्येन पूर्णसंख्याद्वयेन सह अस्य प्रयोगं कुर्वन्तु ।

भवन्तः पूर्णसंख्यानां कृते एकं योज्य-तत्समकं प्राप्तवन्तः । पूर्णसंख्यासु शून्य-योजनेन सा एव पूर्णसंख्या प्राप्यते । पूर्णसंख्यानां कृते गुणनात्मक-तत्समकस्य अपि स्थितिः एवमेव अस्ति । कोष्ठकं पश्यन्तु ।

7	X	1	=	7
5	X	1	=	5
1	X	12	=	12
1	X	100	=	100
1	X	….	=	….

भवतां चिन्तनं सम्यक् अस्ति । पूर्णसंख्यानां गुणनस्य कृते '1' तत्समकः अवयवः अथवा गुणनात्मक-तत्समकः अस्ति ।

अभ्यासः 2.2

1. युक्ते क्रमे संस्थाप्य योगफलम् अभिजानन्तु ।
   (a) 837 + 208 + 363 (b) 1962 + 453 + 1538 + 647
2. युक्ते क्रमे संस्थाप्य गुणनफलम् अभिजानन्तु ।
   (a) 2 x 1768 x 50 (b) 4 x 166 x 25
   (c) 8 x 291 x 125 (d) 625 x 279 x 16
   (e) 285 x 5 x 60 (f) 125 x 40 x 8 x 25
3. अधोलिखितानां सङ्क्रियाणां मूल्यम् अभिजानन्तु ।
   (a) 297 x 17 + 297 x 3 (b) 54279 x 92 + 8 x 54279
   (c) 81265 x 169 – 81265 x 69 (d) 3845 x 5 x 782 + 769 x 25 x 218
4. उपयुक्त-गुणनस्य प्रयोगपुरस्सरं गुणनफलम् अभिजानन्तु ।
   (a) 738 x 103 (b) 854 x 102 (c) 258 x 1008 (d) 1005 x 168

5. एकः वाहनचालकः तस्य वाहनस्य पेट्रोल्-टेंक् मध्ये सोमवासरे 40 लीटर् पेट्रोल् तैलस्य भरणं कृतवान् पूरितवान्। अग्रिमदिने सः 50 लीटर् तैलस्य भरणं कृतं पूरितवान् वान्। यदि पेट्रोल्शिलातैल-मूल्यं प्रति लीटर् कृते 44 रू. भवति तर्हि सः पेट्रोल् शिलातैल-कृते आहत्य कियद्धनस्य व्ययं कृतवान् ?

6. एकः क्षीरविक्रेता एकस्मै उपाहारगृहाय प्रातःकाले 32 लीटर् लीटरपरिमित-क्षीरं ददाति । अपि च सायंकाले 68 लीटर् लीटर्-क्षीरं ददाति । यदि क्षीरस्य मूल्यं प्रति लीटर् कृते 15 रू भवति तर्हि क्षीरविक्रेता प्रतिदिनं कियद्धनराशिं कियन्तं धनराशिं प्राप्नोति ?

7. संयोजयन्तु।

(a) 425 x 136 = 425 x (6 + 30 +100)	(a) गुणनस्य क्रमविनिमेयताक्रमविनिमयता
(b) 2 x 49 x 50 = 2 x 50 x 49	(b) योगस्य क्रमविनिमेयताक्रमविनिमयता
(c) 80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005	(c) योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणम्

2.5 पूर्णसंख्यानां प्रतिरूपम्।

वयं बिन्दूनां द्वारा प्रारम्भिक-आकाराणां रूपेण संख्याः व्यवस्थिताः कुर्मः। वयं तादृशान् आकारान् स्वीकुर्मः ते च (1) एका रेखा (2) एकः आयतः (3) एकः वर्गः (4) एकः त्रिभुजः इति । प्रत्येकं संख्याम् एतेषु आकारेषु एव व्यवस्थितां कुर्मः।

- प्रत्येकं संख्याम् एकस्यां रेखायां व्यवस्थितां व्यवस्थिता कर्तुं शक्यते शक्यते।

  संख्याम् 2 इमाम् इति सङ्ख्या अनेन प्रकारेण दर्शयितुं शक्यते ● ●

  संख्याम् 3 इति सङ्ख्या इमाम् अनेन प्रकारेण दर्शयितुं शक्यते ● ● ●

- काश्चन संख्याः आयतेन दर्शयितुं शक्यन्ते। उदाहरणार्थम् -

  संख्यां 6 इमाम् इति सङ्ख्या आयतेन दर्शयितुं शक्यते शक्यते।

  अवधानेन पश्यन्तु अत्र 2 पङ्क्तयः 3 स्तम्भाः सन्ति।

- काश्चन संख्याः यथा 4 अपि च 9 एते वर्गेन दर्शयितुं शक्यते शक्यन्ते।

4 ⟶ ●● ●● 9 ⟶ ●●● ●●● ●●●

काश्चन संख्याः त्रिभुजरूपेण दर्शयितुं शक्यन्ते। उदाहरणार्थम्

3 ⟶ ● ●● 6 ⟶ ● ●● ●●●

अवधानं ददतुसावधानं परिशीलयन्तु, यत् त्रिभुजस्य भुजद्वयं अवश्यं समानं भवेत् । अधस्तात् आरम्भं कृत्वा पङ्क्तिषु बिन्दूनां संख्या 4, 3, 2, 1 अपि च क्रमेण भवेत्। उपरितन-पङ्क्तौ केवलं एकः एव बिन्दुः भवेत्।

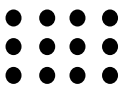
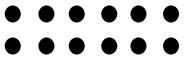
अधुना, कोष्ठकं पूरयन्तु।

1, एका विशेष-संख्या अस्ति।

संख्या	रेखा	अयतः	वर्गः	त्रिभुजः
2	आम्	न	न	न
3	आम्	न	न	आम्
4	आम्	आम्	आम्	न
5	आम्	न	न	न
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कासां संख्यानां दर्शनं केवलं संख्यारूपेण भवितुं शक्यते ?
2. कासां संख्यानां दर्शनं वर्गरूपेण भवितुं शक्यते ?
3. कासां संख्यानां दर्शनं आयतरूपेण भवितुं शक्यते ?
4. आदिमाः सप्त त्रिभुजाकार-संख्याः लिखन्तु। उदाहरणार्थम् 3, 6 .. इत्यादिः।
5. कासाञ्चन-संख्यानां दर्शनं आयताकारद्वयेन कर्तुं शक्यते। उदाहरणार्थम् 12

12 →  अथवा 

3 x 4 2 x 6

अनेन प्रकारेण न्यूनातिन्यूनं पञ्च-उदाहरणानि दीयताम्।

प्रतिरूपाणां निरीक्षणम्

प्रतिरूपाणां निरीक्षणेन भवन्तः प्रक्रियाणां सरलीकर्णार्थं सरलीकरणार्थं मार्गदर्शनं प्राप्तुं शक्नुवन्ति। अधोलिखितानां अध्ययनं कुर्वन्तु।

(a) $117 + 9 = 117 + 10 - 1 = 127 - 1 = 126$

(b) $117 - 9 = 117 - 10 + 1 = 107 + 1 = 108$

(c) $117 + 99 = 117 + 100 - 1 = 217 - 1 = 216$

(d) $117 - 99 = 117 - 100 + 1 = 17 + 1 = 18$

किम् एतत् प्रतिरूपं 9, 99, 999, ... इत्यादि संख्यानां योजने अथवा व्यवकलने भवतां साहाय्यं करोति ?

अत्र इतोऽपि एकं प्रतिरूपं पश्यन्तु।

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

किं भवतां कृते कामपि संख्यां 9, 99, 999, ... इत्यादि संख्याभिः सह गुणनं कर्तुं संक्षिप्तविधिः लभ्यते ?

भवन्तः अधोलिखितेन प्रतिरूपेण कामपि संख्यां 5, 25 अथवा 125 तः गुणनं कर्तुं एकम् आकर्षकं विधिं प्राप्नुवन्ति।

(भवन्तः एताः संख्याः अग्रे अपि वर्धयितुं शक्नुवन्ति।)

(i) $96 \times 5 = 96 \times 10/2 = 960/2 = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times 100/4 = 9600/4 = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times 1000/8 = 96000/8 = 12000$ .....

अधोलिखिते प्रतिरूपे प्रतिरूपात् किं मार्गदर्शनं लभ्यते ?

(i) $64 \times 5 = 64 \times 10/2 = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times 30/2 = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times 50/2 = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times 70/2 = 32 \times 70 = 320 \times 7$ .....

अभ्यासः 2.3

1. अधोलिखितासु सङ्क्रियासु कया शून्यस्य निरूपणं न भवति।

(a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d) $\frac{10 - 10}{2}$

2. यदि द्वयोः पूर्णसंख्यायोः गुणनफलं शून्यम् अस्ति तर्हि किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः मध्ये एका संख्या अथवा द्वे अपि संख्ये शून्ये एव स्तः? उदाहरणेन सह भवताम् उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

3. यदि द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलं 1 इतीयं संख्या अस्ति तर्हि किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः मध्ये एका संख्या अथवा संख्याद्वयमपि 1 एव अस्ति ? उदाहरणेन सह भवताम् उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

4. वितरणविधिना अभिजानन्तु।

(a) 728 x 101 (b) 5437 x 1001 (c) 824 x 25

(d) 4275 x 125 (e) 504 x 35

5. वितरणविधिना अभिजानन्तु।

1 x 8 + 1 = 9

12 x 8 + 2 = 98

123 x 8 + 3 = 987

1234 x 8 + 4 = 9876

12345 x 8 + 5 = 98765

अग्रिमं चरणद्वयं लिखन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् प्रतिरूपं कीदृशं कार्यं करोति ?

(सङ्केतः – 12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1)

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. संख्याः 1, 2, 3, …. गणनार्थं वयं यासां प्रयोगं कुर्मः तासां संख्यानां कृते प्राकृतसंख्याः इति कथयामः।
2. यदि भवन्तः 1 संख्यां कयापि प्राकृतसंख्यया सह योगं कुर्वन्तियोजयन्ति तर्हि परवर्तिनी प्राकृतसंख्या लभ्यते। यदि व्यवकलनं कुर्वन्ति तर्हि पूर्ववर्तिनी प्राकृतसंख्या लभ्यते।
3. प्रत्येकम् अपि प्राकृतसंख्यायाः एका परवर्तिनी भवति । 1 संख्यां परित्यज्य प्रत्येकम् अपि प्राकृतसंख्यायाः एका काचित् पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या भवति।
4. यदि प्राकृत-संख्यानां सङ्ग्रहे वयं 0 संख्यां योजयामः तर्हि पूर्णसंख्यानां सङ्ग्रहः प्राप्यते। यथा अनेन प्रकारेण 0, 1, 2, 3, …. इत्येताः सङ्ख्याः पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहं निर्मान्ति।
5. प्रत्येकम् अपि पूर्णसंख्यायाः एका परवर्तिनी भवति। 0 संख्यां परित्यज्य प्रत्येकम् अपि पूर्णसंख्यायाः एका पूर्ववर्तिनी भवति।
6. सर्वाः प्राकृतसंख्याः पूर्णसंख्याः अपि सन्ति। किन्तु सर्वाः पूर्णसंख्याः प्राकृतसंख्याः न सन्ति।
7. वयम् एकां रेखां स्वीकुर्मः। रेखायाः उपरि एकं बिन्दुं स्थापयामः अङ्कयामः तस्य 0 इति नामाङ्कनं कुर्मः। पुनः वयं 0 इत्यस्य समानान्तरे दूरेराले एकं बिन्दुं स्थापयित्वा तस्य 1 इति नामाङ्कनं कुर्मः। एवमेव अग्रे अपि समान दूररत्वे बिन्दून् स्थापयित्वा 2, 3, .. इति नामाङ्कनं कुर्मः। अनेन प्रकारेण संख्यारेखा लभ्यते यस्योपरि पूर्णसंख्याः दर्शयितुं शक्यते। वयं अस्याः रेखायाः उपरि सरलतया योगं, व्यवकलनं, गुणनम् अपि च भागं विभाजनं कर्तुं शक्नुमः।
8. संख्यारेखायाः उपरि दक्षिणभागे चलामः चेत् अपेक्षितं योगं प्राप्नुमः, यदि वामभागे चलामः तर्हि अपेक्षितं व्यवकलनं प्राप्नुमः। शून्येन शून्यात् आरभ्य समानान्तरेण यदि पादं स्थापयामः तर्हि गुणनम् अपि प्राप्तुं शक्नुमः।

9. द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगः सर्वदा एका पूर्णसंख्या एव भवति। एवमेव द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलम् अपि एका पूर्णसंख्या एव भवति । वयं कथयामः यत् पूर्णसंख्याः योगस्य अपि च गुणनफलस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति इति। तथा अपरञ्च, पूर्णसंख्याः व्यवकलनस्य अपि च भागस्य अन्तर्गताः संवृताः न सन्ति।

10 शून्येन भागः विभाजनं न भवति।

11 शून्यं पूर्णसंख्यानां योगस्य तत्समक-अवयवः अथवा योज्य-तत्समकः इति वदामः । 1 संख्यां पूर्णसंख्यानां गुणनस्य तत्समकः इति वदामः।

12 भवन्तः पूर्णसंख्याद्वयं केनापि क्रमेण योजयितुं शक्नुवन्ति। तथैव गुणनमपि कर्तुं शक्नुवन्ति। वयं वदामः यत् पूर्णसंख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमेयता क्रमविनिमयता अस्ति।

13 पूर्णसंख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य साहचर्यता साहचर्यम् अस्ति।

14 पूर्णसंख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य वितरणं भवति।

15 पूर्णसंख्यानां क्रमविनिमेयताक्रमविनिमयता, सहचर्यता अपि च वितरणगुणाः परिकलनानां सरलीकरणार्थम् उपयुज्यन्ते तथा वयं अज्ञात्वा एव एतेषाम् उपयोगं कुर्मः।

16 संख्यानां प्रतिरूपं प्रतिरूपाणि न केवलं रुचिकरंराः भवन्ति परं तुअपि तु मौखिक-परिकलने प्रामुख्यं भजन्ते अपि च संख्यानां गुणान् ज्ञातुं साहाय्यं करोति कुर्वन्ति।

सङ्ख्याभिः सह क्रीडा

अध्यायः 3

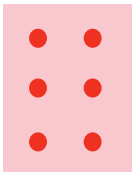
3.1 भूमिका

रमेशस्य समीपे 6 काचगुलिकाः सन्ति। सः ताः गुलिकाः प्रत्येकं पङ्क्तिषु समानरीत्या स्थापयितुम् इच्छति। सः तान् अधोलिखितरीत्या स्थापयति अपि च काचगुलिकानां संख्यां गणयति।

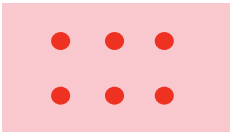
(i) प्रत्येकं पङ्कौ 1 मणिः

पङ्क्तीनां संख्या = 6
काचगुलिकानाम् आहत्य संख्या = 1 x 6 = 6

(ii) प्रत्येकं पङ्कौ 2 मणिः
पङ्क्तीनां संख्या = 3
काचगुलिकानाम् आहत्य संख्या = 2 x 3 = 6



(iii) प्रत्येकं पङ्कौ 3 मणिः
पङ्क्तीनां संख्या = 2
काचगुलिकानाम् आहत्य संख्या = 3 x 2 = 6



(iv) सः कामपि एतादृशीं व्यवस्थां चिन्तयितुं नाशक्नोत् यत्र प्रत्येकं पङ्क्तौ 4 अथवा 5 मणयः स्युः । अतः अधुना केवलम् एका एव व्यवस्था अस्ति यत्र एकस्यां पङ्कौ 6 काचगुलिकानाम् अपि स्थापनं कर्तुं शक्यते ।

पङ्क्तीनां संख्या = 1

काचगुलिकानाम् आहत्य संख्या = 6 x 1 = 6

एतेषु परिकलनेषु रमेशः पश्यति यत् 6 सङ्ख्या विभिन्नप्रकारकेषु द्वयोः संख्ययोः गुणनफलरूपेण लेखितुं शक्यते इति ।

6 = 1 x 6; 6 = 2 x 3; 6 = 3 x 2; 6 = 6 x 1;

6 = 2 x 3 इत्यनेन इदं वक्तुं शक्यते यत् 2 अपि च 3 संख्याद्वयं 6 संख्यां सम्पूर्णम् विभजति इति । गुणनफलेन 6 = 1 x 6 अनेन 6 संख्यायाः अन्यौ विभाजकौ 1 अपि च 6 प्राप्येते ।

अनेन प्रकारेण 1, 2, 3, अपि च 6 एताः संख्याः 6 संख्यायाः विभाजकाः सन्ति । एते 6 संख्यायाः गुणनखण्डाः इत्युच्यन्ते ।

18 काचगुलिकाः पङ्क्तिषु व्यवस्थिताः कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु अपि च 18 संख्यायाः गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ।

3. 2 गुणनखण्डः अपि च गुणजः

मेरीमहोदया ताः संख्याः ज्ञातुम् इच्छति याः 4 संख्यां सम्पूर्णतया विभाजयन्ति । सा 4 संख्यां 4 संख्यायाः लघुतरया अथवा समानया संख्यायाभिः चापि विभाजनंविभाजयति ।

1) 4 (4 − 4 0	2) 4 (2 − 4 0	3) 4 (1 − 3 1
भागफलम् = 4 शेषफलम् = 0	भागफलम् = 2 शेषः = 0	भागफलम् = 1 शेषः = 1
4 = 1 x 4;	4 = 2 x 2	

4) 4 (1
− 4
0

भागफलम् = 1

शेषः = 0

सा 4 सङ्ख्या अधोलिखितरूपेण लेखितुं शक्यते इति जानाति ।

4 = 1 x 4; 4 = 2 x 2; 4 = 4 x 1

सा अभिजानाति यत् 1 , 2, अपि च 4 इति सङ्ख्या, 4 इति संख्यायाः सम्पूर्ण-विभाजकाः सन्ति ।

एताः संख्याः 4 संख्यायाः गुणनखण्डाः इत्युच्यन्ते ।

कस्याः अपि संख्यायाः गुणनखण्डाः तस्याः सम्पूर्ण-विभाजकाः अपि भवन्ति ।

अवधानं ददतु यत् 4 संख्यायाः प्रत्येकम् अपि गुणनखण्डाः 4 संख्यायाः अपेक्षया लघुतराः अथवा समानाः सन्ति ।

क्रीडा 1 : इमां क्रीडां क्रीडितुं द्वयोः अपेक्षा अस्ति यथा A अपि च B इति स्वीकुर्मः । इयं क्रीडा गुणनखण्डस्य विषये अस्ति ।

एतदर्थं 50 स्फोरकपत्राणां आवश्यकता अस्ति येषाम् उपरि 1 इत्यनेन 50 पर्यन्तं संख्याः लिखिताः स्युः । एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरि अधोदर्शितक्रमेण एतानि व्यवस्थितानि कुर्वन्तु ।

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	50

सोपानानि –

(a) निर्णयं कुर्वन्तु यत् आदौ कः क्रीडिष्यति; A अथवा B इति ।

(b) चिन्तयन्तु यत् A प्रथमं क्रीडति । सः उत्पीठिकातः एकं पत्रं स्वीकरोति अपि च स्वस्य समीपे स्थापयति । पत्रे 28 इति लिखितम् अस्ति इति चिन्तयन्तु ।

(c) द्वितीयः B अधुना यत्र 28 संख्यायाः गुणनखण्डाः लिखिताः सन्ति तानि सर्वाणि पत्राणि स्वीकृत्य स्वसमीपे स्थापयति ।

(d) पुनः B इति क्रीडकः उत्पीठिकातः एकं पत्रं स्वीकरोति । अधुना A तानि सर्वाणि पत्राणि स्वीकरोति यत्र B इत्यनेन स्वीकृते पत्रे लिखित-संख्यायाः गुणनखण्डाः लिखिताः सन्ति ।

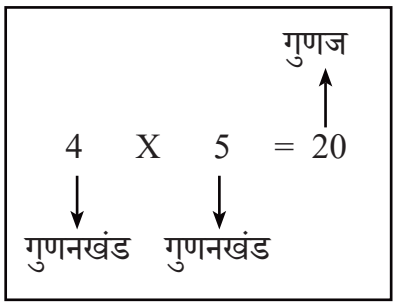
(e) सर्वेषां पत्राणां समाप्तिपर्यन्तं क्रीडा प्रचलति ।

(f) A अपि च B स्वसमीपे विद्यमानेषु पत्रेषु याः संख्याः लिखिताः सन्ति तासां योगं कुरुतः । यस्य योगः अधिकः अस्ति सः विजयी भविष्यति ।

पत्राणां संख्यां वर्धयित्वा क्रीडा इतोऽपि रुचिकरा कर्तुं शक्यते ।

इमां क्रीडां मित्रेण सह क्रीडन्तु । किं भवन्तः अस्यां क्रीडायां विजयं प्राप्तुं कमपि विधिम् अन्वेषयितुं शक्नुवन्ति ?

यदि वयं 20 = 4 x 5 इति लिखामः तर्हि 4 अपि च 5, 20 इति संख्यायाः गुणनखण्डत्वेन अस्ति इति कथयामः। एवमपि वदामः यत् 20 संख्या 4 अपि च 5 इति अनयोः गुणजरूपा अस्ति इति।



24 = 2 x 12 इति एषा सङ्क्रिया दर्शयति यत् 2 अपि च 12 संख्या 24 इत्यस्याः गुणनखण्डः अपि च 24 संख्या 2,12 इति अनयोः गुणजरूपा अस्ति।

वयं कथयामः यत् **एका संख्या स्वस्याः प्रत्येकं गुणनखण्डस्य एका गुणजरूपा अपि भवति।**

प्रयत्नं कुर्वन्तु

45, 30 अपि च 36 एतासां सङ्ख्यानां गुणनखण्डान् अवजानन्तु।

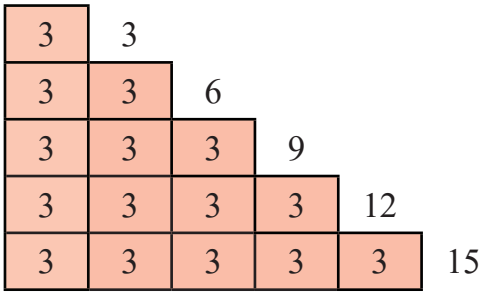
आयान्तु , अधुना गुणनखण्डानां गुणजां च विषये कानिचन रुचिपूर्ण-तथ्यानि पश्यामः।

(a) काष्ठस्य अथवा कर्गजस्य काश्चन 3 मात्रकाः पट्टिकाः एकत्रीकुर्वन्तु।

(b) अधोलिखितरीत्या प्रदत्ताकृतेः अनुसारं योजयन्तु।

उपरि विद्यमानायाः पट्टिकायाः लम्बः 3 = 1 x 3 मात्रकः अस्ति।

तदधः विद्यमानायाः पट्टिकायाः लम्बः 3 + 3 = 6 मात्रकः अस्ति। अपि च 6 = 2 x 3 अस्ति।



अग्रिम-पट्टिकायाः लम्बः 3 + 3 +3 = 9 मात्रकः अस्ति। अपि च 9 = 3 x 3 अस्ति। एवमेव अन्यलम्बान् अधोलिखितक्रमेण व्यक्तीकुर्तुं शक्नुमः।

12 = 4 x 3 ; 15 = 5 x 3

वयं वदामः यत् संख्याः 3, 6, 9, 15, 15 इत्येताः 3 इत्यस्याः संख्यायाः गुणजाः सन्ति।

3 इत्यस्याः गुणजरूपाणां सूची 18, 21, 24, ... अनेन रूपेण वर्धयितुं शक्यते। एसासु संख्यासु प्रत्येकं गुणजः 3 संख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः अस्ति।

संख्या 4 इत्यस्याः गुणजाः 4, 8, 12, 16, 20, 24 इत्येताः सन्ति। एषा सूची समाप्ता न भवति। एसासु संख्यासु प्रत्येकं गुणजः 4 संख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः अस्ति।

आयान्तु पश्यामः यत् गुणनखण्डानाम् अपि च गुणजानां विषये वयं किं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः इति।

1. किं कापि एतादृशी संख्या अस्ति, या प्रत्येकं गुणनखण्डस्य रूपेण भवति ? आम् , एषा संख्या 1 अस्ति। उदाहरणार्थम्, 6 = 1 x 6, 18 = 1 x 18 इत्यादि। इतोऽपि संख्याः स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

अइत्यनेन वयं वदामः यत् **संख्या 1 प्रत्येकं संख्यायाः एकः गुणनखण्डः भवति।**

2. किं 7 इति संख्या स्वयं गुणनखण्डरूपेण भवितुं शक्नोति ? भवन्तः 7 इति संख्यां 7 x 1 इति रूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति । संख्या 10 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? संख्या 15 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ? भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं संख्याम् अपि भवन्तः लेखितुं शक्नुवन्ति । वयं वदामः यत् **प्रत्येकं संख्या स्वयं स्वस्याः एकः गुणनखण्डः भवति ।**

3. 16 इत्यस्याः गुणनखण्डाः के भवन्ति ? ते 1, 2, 4, अपि च 16 इत्येताः संख्याः भवन्ति । किं भवन्तः एतेषु गुणनखण्डेषु तादृशगुणनखण्डं प्राप्तवन्तः यत् यः 16 संख्यां न विभाजयति ? 20 अपि च 36 संख्ययोः कृते अपि उपरि उक्त-कथनस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

   भवन्तः इदं प्राप्नुवन्ति यत् **एकस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः तस्याः संख्यायाः एकः विभाजकः भवति एव ।**

4. 34 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डाः के भवन्ति ? ते 1, 2, 17 अपि च स्वयं 34 इति अस्ति । बृहत्तमः गुणनखण्डः 34 अस्ति । अन्ये तु 1, 2, 17 एताः संख्याः 34 संख्यापेक्षया न्यूनतराः सन्ति । 81 अपि च 56 इत्यनयोः कृते अपि अस्य अंशस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसंख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डः तस्याः संख्यायाः अपेक्षया लघुतरः अथवा समानः भवति ।**

5. 76 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डानां सङ्ख्या 5 अस्ति । 136 इत्यस्याः कति गुणनखण्डाः भविष्यन्ति ? 96 इत्यस्याः कति गुणनखण्डाः भविष्यन्ति ? भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु सर्वासां संख्यानां गुणनखण्डनां गणना कर्तुं शक्यते । भवन्तः 10576, 25642 इत्यादि-बृहत्-संख्यानामपि गुणनखण्डस्य गणनं कर्तुं शक्नुवन्ति किन्तु एतादृश-संख्यानां गुणनखण्डं कर्तुं कठिनता भवति एव ।

   वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसंख्यायाः गुणनखण्डानां संख्या परिमिता भवति ।**

6. 7 संख्यायाः गुणनखण्डाः के सन्ति ? स्पष्टइत्यनेन 7, 14, 21, 28,... एताः संख्याः भवन्ति । भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु प्रत्येकं संख्या 7 संख्याइत्यनेन बृहत्तरा अथवा समाना अस्ति । किम् इदं सर्वासां संख्यानां कृते सत्यं भवति ? अमुम् अंशं 6, 9, अपि च 10 इत्येताः संख्याः स्वीकृत्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

   अनेन वयं प्राप्नुमः **यत् एकस्याः संख्यायाः प्रत्येकं गुणजः तस्याः संख्यायाः अपेक्षया बृहत्तरः अथवा समानः भवति ।**

7. 5 संख्यायाः गुणजान् लिखन्तु । ते 5, 10, 15, 20,... सन्ति । किं भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् किम् एषा सूची समाप्यते ? नास्ति, एषा सूची कदापि न समाप्यते । 6, 7 इत्यादि-संख्यानां गुणजान् स्वीकृत्य अस्य अंशस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

   वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसंख्यायाः गुणजरूपानां संख्या अपरिमिता भवति ।**

8. किं 7 स्वयं स्वस्य एकः गुणजः अस्ति ? आम्, किमर्थम् इति चेत् 7 = 7 x 1 अस्ति । किम् इदम् अन्यासां संख्यानां कृते अपि सत्यम् अस्ति ? 3, 12, 16 इत्येताः संख्याः स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् **प्रत्येकं संख्या स्वयं गुणजत्वेन अस्ति ।**

6 इत्यस्याः संख्यायाः सर्वे गुणनखण्डाः 1, 2, 3, 6 सन्ति। सह एव 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 अस्ति। वयं प्राप्नुमः यत् 6 इत्यस्याः सर्वेषां गुणनखण्डानां योगः 6 इत्यनेन द्विगुणिइत्यनेन अस्ति। 28 इत्यस्याः सर्वे गुणनखण्डाः 1, 2, 4, 7, 14, अपि च 28 सन्ति। एतेषां योगं कुर्मः चेत्

1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 x 28 अस्ति।

अर्थात् 28 इत्यस्याः संख्यायाः सर्वेषां गुणनखण्डानां योगः 28 इत्यनेन द्विगुणिइत्यनेन अस्ति।

या संख्या तस्याः गुणनखण्डानां योगस्य द्विगुणिता भवति सा एका संपूर्णसंख्या इत्युच्यते।

किं 10 एषा संपूर्णसंख्या अस्ति ?

उदाहरणम् 1 : 68 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डान् लिखन्तु।

समाधानम् : वयं पश्यामः यत्

68 = 1 x 68 68 = 2 x 34 68 = 4 x 17

68 = 17 x 4

अत्रैव तिष्ठन्तु यतो हि 4 अपि च 17 संख्याद्वयं पूर्वमेव आगतम्।

अनेन प्रकारेण, 68 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डाः 1, 2, 4, 17, 34 अपि च 68 भवन्ति।

उदाहरणम् 2 : 36 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डान् लिखन्तु।

समाधानम् : 36 = 1 x 36 36 = 2 x 18

36 = 3 x 12 36 = 4 x 19

36 = 6 x 6

अत्रैव तिष्ठन्तु यतो हि गुणनखण्डद्वयं समानम् (6) अस्ति।

अपि च इच्छित-गुणनखण्डाः 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 अपि च 36 सन्ति।

उदाहरणम् 3 : 6 इत्यस्याः संख्यायाः प्रथम-पञ्चगुणजान् लिखन्तु।

समाधानम् : गुणजाः

6 x 1 = 6, 6 x 2 = 12, 6 x 3 = 18, 6 x 4 = 24, 6 x 5 = 30

अर्थात् 6, 12,18, 24, 30 अस्ति।

अभ्यासः 3.1

1) अधोलिखित-संख्यानां कृते सर्वान् गुणनखण्डान् लिखन्तु।

(a) 24 (b) 15 (c) 21

(d) 27 (e) 12 (f) 20

(g) 18 (h) 23 (i) 36

2) अधोलिखित-संख्यानां कृते प्रथम-पञ्च-गुणजान् लिखन्तु।

(a) 5 (b) 8 (c) 9

3) संयोजयन्तु।

	अ	ब
(i)	35	(a) 8 अस्याः संख्यायाः गुणजः
(ii)	15	(b) 7 अस्याः संख्यायाः गुणजः
(iii)	16	(c) 70 अस्याः संख्यायाः गुणजः
(iv)	20	(d) 30 अस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः
(v)	25	(e) 50 अस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः
		(f) 20 अस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः

4, 9 अनयोः सर्वान् गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ये 100 इत्यनेन न्यूनतराः सन्ति।

3. 3 अभाज्य-संख्याः अपि च भाज्य-संख्याः

अधुना वयं यस्याः कस्याः अपि संख्यायाः गुणनखण्डकरणस्य विधीन् ज्ञातवन्तः। अधुना अधोलिखितानां कासाञ्चन संख्यानां गुणनखण्डानां संख्या-विषये अवधानं ददतु।

संख्या	गुणनखण्डाः	गुणनखण्डानां संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

वयं पश्यामः यत् (a) संख्यायाः 1 इत्यस्याः एकः एव गुणनखण्डः अस्ति।

(b) काश्चन संख्याः यथा 2, 3, 5, 7, 11 इत्याद्याः एतादृश्यः सन्ति एतासां गुणनखण्डद्वयम् एव अस्ति। एताः संख्याः अभाज्य-संख्याः सन्ति। **यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः 1 अपि च स्वयं सा एव संख्या भवति सा संख्या अभाज्य-संख्या इत्युच्यते।**

इतोऽपि अन्याः अभाज्य-संख्याः ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

c) काश्चन संख्याः यथा 4, 6, 8, 9, 10 इत्याद्याः एतादृश्यः सन्ति एतासाम् अधिक-गुणनखण्डाः सन्ति एवमेव एताः संख्याः विभाज्यसंख्याः सन्ति। **यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः द्वयोः अपि अधिकः भवति सा संख्या भाज्य-संख्या इत्युच्यते।**

अवधानं ददतु- 1 इत्येषा संख्या न अभाज्यसंख्या न भाज्यसंख्या अस्ति।

किं 15 एका भाज्यसंख्या अस्ति ? 18 अपि च 25 इति अनयोः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ?

वयं केनचित् सरलविधिना 1 इत्यनेन 100 पर्यन्तं गुणनखण्डकरणेन विना अभिज्ञातुं शक्नुमः । अमुं विधिं क्रिस्तोः पूर्वं कश्चन यवन-गणितज्ञः एरटोस्टनीस् (Eratosthenes) दत्तवान् आसीत् । आयान्तु अमुं विधिं पश्यन्तु । अधोलिखितं कोष्ठकम् अनुसरन्तु ।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

सोपानम् 1 : 1 इति संख्यायाः उपरि X इति चिह्नं स्थापयन्तु यतः एषा एका अविभाज्यसंख्या नास्ति ।

सोपानम् 2 : 2 इति संख्यायाः उपरि वलयाकारं स्थापयन्तु । 2 इति संख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणां यथा 4, 6, 8 इत्यादीनाम् उपरि X इति चिह्नं स्थापयन्तु ।

सोपानम् 3 : भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् अग्रिमा रिक्तसंख्या 3 इत्यस्ति । तां संख्यां वलयीकुर्वन्तु । अपि च 3 संख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणाम् उपरि X चिह्नं स्थापयन्तु ।

सोपानम् 4 : अग्रिमा रिक्तसंख्या 5 । तां संख्यां वलयीकुर्वन्तु । अपि च 5 संख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणाम् उपरि X चिह्नं स्थापयन्तु ।

सोपानम् 5 : इमां प्रक्रियां अग्रे अपि नयन्तु । यवत्पर्यन्तं सर्वासां संख्यानाम् उपरि वलयाकारः स्यात् अथवा X चिह्नं स्यात् । सर्वाः वलयीकृताः संख्याः अविभाज्य-संख्याः । 1 संख्यां परित्यज्य सर्वाः X इति चिह्नाङ्किताः संख्याः विभाज्यसंख्याः । अमुं विधिं एरटोस्टनीस्-महोदयस्य छलनी-विधिः (Sieve of Eratosthenes) इति वदामः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अवधानं ददतु यत् 2 x 3 + 1 =7 एका अभाज्यसंख्या अस्ति । अत्र 2 इत्यस्याः संख्यायाः एकस्मिन् गुणजे 1 योजयित्वा अभाज्यसंख्यां प्राप्तवन्तः। किं भवन्तः एतादृशाः इतोऽपि अभाज्यसंख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 4 : 15 संख्यायाः लघुतराः अभाज्यसङ्ख्याः लिखन्तु ।

समाधानम् : छलनी-विधिद्वारा प्राप्ताम् उपरि प्रदर्शित-सारिणीं दृष्ट्वा वयं सरलतया इष्टाः अभाज्यसंख्याः लेखितुं शक्नुमः । अभाज्यसंख्याः 2, 3, 5, 7, 11, 13 सन्ति ।

समसंख्याः अपि च विषमसंख्याः

किं भवन्तः संख्यासु 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,.... एतासु किमपि प्रतिरूपं पश्यन्ति ? भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु प्रत्येकम् अपि 2 इत्यस्याः एकः गुणजः अस्ति।

एताः एव संख्याः **समसंख्याः** इति उच्यन्ते। शिष्टाः सर्वाः प्राकृतसंख्याः 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... इत्याद्याः **विषमसंख्याः** इत्युच्यन्ते।

भवन्तः सरलतया परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् एका 2 अथवा 3 अङ्कानां संख्या समसंख्या अस्ति अथवा न इति। 756482 इत्यादि-बृहत्-संख्यायाः विषये भवन्तः कथं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? किं 2 संख्यातः भागं कृत्वा ? किम् एषा प्रक्रिया कठिना न भविष्यति ?

अतः वयं वदामः यस्याः संख्यायाः एककस्थाने 0, 2, 4, 6, 8 एताः संख्याः भवन्ति ताः संख्याः समसंख्याः भवन्ति। अतः 350, 4862 अपि च 59246 इत्येताः संख्याः समसंख्याः सन्ति। 457, 2359 अपि च 8231 एताः संख्याः विषमसंख्याः भवन्ति। आयान्तु , कियतः रुचिकरान् अंशान् ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

(a) लघुतरा समसंख्या 2 अस्ति। लघुतमा अविभाज्यसंख्या अपि 2 अस्ति। अतः लघुतमा अभाज्यसंख्या 2 अस्ति या एका समसंख्या अपि अस्ति।

(b) 2 इति संख्यायाः अग्रिम-अभाज्य-संख्याः 3, 5, 7, 11,.. सन्ति। अत्र कापि समसंख्या दृश्यते किम् ? न , सर्वाः विषमसंख्याः सन्ति। इतोऽपि अभाज्यसंख्याः दृष्टुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः **यत् 2 इति संख्यां त्यक्त्वा सर्वाः अभाज्य-संख्याः विषमसंख्याः सन्ति।**

अभ्यासः 3.2

1. वदन्तु यत् यदि द्वे अपि संख्ये समसंख्ये स्याताम् अथवा विषमसंख्ये स्यातां तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः

   (a) किं समः भवति (b) विषमः भवति ?

2. अधोलिखितेषु कथनेषु किं कथनं सत्यम् अपि च किम् असत्यम् इति वदन्तु।

   a) तिसृणां विषमसंख्यानां योगः समः भवति।

   b) द्वयोः विषमसंख्ययोः अपि च एकस्याः समसंख्यायाः योगः समः भवति।

   c) तिसृणां विषमसंख्यानां गुणनफलं विषमः भवति।

   d) यदि कामपि संख्यां 2 इति इत्यनेनसंख्यया भागं कर्तुं शक्नुमः तर्हि भागफलं सर्वदा विषमः भवति।

   e) सर्वाः अभाज्यसंख्याः विषमसंख्याः सन्ति।

   f) अभाज्यसंख्यानां कोऽपि गुणनखण्डः न भवति।

   g) द्वयोः अभाज्यसंख्ययोः योगः सर्वदा समः भवति।

   h) केवलं 2 इति संख्या एव सम-अभाज्य- संख्या अस्ति।

   i) सर्वाः समसंख्याः विभाज्यसंख्याः सन्ति।

   j) द्वयोः समसंख्ययोः गुणनफलं सर्वदा समः भवति।

3. 13 अपि च 31 इति संख्ये अविभाज्यसंख्ये स्तः । द्वयोः अपि संख्ययोः अङ्कौ 1 अपि च 3 स्तः । 100 संख्यापर्यन्तंएतादृशान् युग्मान् अभिजानन्तु ।

4. 20 संख्यायाः लघुतराः सर्वाः विभाज्यसंख्याः अभाज्यसंख्याः पृथक्कुर्वन्तु ।

5. 1 अपि च 10 इत्येतयोः द्वयोः मध्ये विद्यमानां बृहत्तमां अभाज्यसंख्यां लिखन्तु ।

6. अधोलिखितसंख्याः द्वयोः विषमसंख्ययोः योगस्य रूपेण लिखन्तु ।

   (a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18

7. अभाज्यसंख्यानां युग्मत्रयं लिखन्तु ययोः मध्ये 2 मात्रकम् अन्तरं भवेत् ।

   [द्वयोः अभाज्यसंख्ययोः अन्तरं 2 भवति तयोः कृते **अभाज्य-युग्मः इत्युच्यते** ।]

8. अधोलिखितासु संख्यासु काः अभाज्यसंख्याः सन्ति ?

   (a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26

9. 100 इत्यनेन लघुतराः क्रमेण आगताः सप्त-भाज्यसंख्याः लिखन्तु यासां मध्ये कापि अभाज्यसंख्या न स्यात् ।

10. अधोलिखिताः प्रत्येकं संख्याः तिसृणाम् अभाज्यसंख्यानां योगरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

    (a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61

11. 20 इत्यनेन लघुतराणाम् अभाज्यसंख्यानां तादृश-पञ्चयुग्मान् लिखन्तु ययोः योगः 5 इत्यनेन विभाजनंविभाजनं प्राप्नुयात् । (सङ्केइत्यनेन : $3 + 7 = 10$)

12. रिक्तस्थानं पूरयत ।

    a) यस्याः संख्यायाः केवलं गुणनखण्डद्वयम् एव अस्ति सा संख्या _____ इति उच्यते ।

    b) यस्याः संख्यायाः अधिकाः गुणनखण्डाः भवन्ति सा संख्या _____ इति उच्यते ।

    c) 1 इति संख्या _____ अपि नास्ति अपि च _____ अपि नास्ति ।

    d) लघुतमा अभाज्यसंख्या _____ अस्ति ।

    e) लघुतमा भाज्यसंख्या _____ अस्ति ।

    f) लघुतमा समसंख्या _____ अस्ति ।

3.4 संख्यानां विभाज्यतायाः निरीक्षणम् ।

किं संख्या 38, 2 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? किमेषा 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? किमेषा 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ।

38 संख्यां वास्तविकरूपेण उक्तसंख्याभिः विभाजिते सति एषा संख्या 2 इत्यनेन विभाज्या अस्ति न तु 4 अपि च 5 इत्यनेन इति ज्ञायते ।

आयान्तु पश्यामः यत् वयं किमपि प्रतिरूपं ज्ञातुं शक्नुमः येन वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कापि संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, अपि च 11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति अथवा न इति । किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् वयं तादृशं प्रतिरूपं सरलतया द्रष्टुं शक्नुमः इति ?

10 इत्यनेनइत्यनया सङ्ख्यया विभाज्यता : चारूः 10 इत्यस्याः गुणजान् 10, 20, 30, 40, 50, 60,...इत्यादीन् पश्यन्ती स्म । सा अत्र एकं सर्वनिष्ठगुणं दृष्टवती । किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् किं एतासु प्रत्येकं संख्यासु एङ्काक-स्थाने 0 इत्यङ्कः अस्ति ?

सा एङ्काक- स्थाने 0 इत्यङ्केन युक्तानाम् अन्यसंख्यानां विषये अपि चिन्तितवती यथा 100, 1000, 3200, 7010 । सा इदमपि ज्ञातवती यत् एताः सर्वाः संख्याः 10 इत्यनेनइति सङ्ख्यया विभाज्याः वर्तन्ते ।

अनेन प्रकारेण सा ज्ञातवती यत् **यदि कस्याः अपि संख्यायाः एककस्थाने 0 इत्यङ्कः भवति चेत् तर्हि सा संख्या 10 इत्यनेन विभाज्या भवति ।**

5 इत्यनेन विभाज्यता : मणिः संख्यासु 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... एतासु एकं रुचिकरं प्रतिरूपं प्राप्तवान् । किं भवन्तः एतत् प्रतिरूपं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एतासु प्रत्येकं संख्यासु एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः अस्ति । सः अवगतवान् यत् एताः सर्वाः संख्याः 5 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ।

सः 5 इत्यनेन विभज्यमानाः अन्याः संख्याः स्वीकृतवान् यथा 105, 215, 6205, 3500 इत्याद्याः । एतासु प्रत्येकं संख्यासु अपि एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः अस्ति ।

सः 23, 56 अपि च 97 एताः संख्याः 5 इत्यनेन भागं कर्तुं प्रयत्नं कृतवान् । किं सः एतत् करिष्यति ? अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । सः पश्यति यत् यदि कस्याः अपि संख्यायाः एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः भवति चेत् तर्हि सा संख्या 5 इत्यनेन विभाज्या भवति ।

किं 1750125 एषा संख्या 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

2 इत्यनेन विभाज्यता : चारूः 2 इत्यस्याः संख्यायाः गुणजान् 10, 12, 14, 16,... एवम् अन्यान् अपि गुणजान् 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 एतान् पश्यति । एतेषु सा एकं प्रतिरूपं पश्यति । किं भवन्तः इदं प्रतिरूपं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एतासां संख्यानाम् एककस्थाने 0, 2, 4. 6, 8 एते अङ्काः सन्ति ।

सा एताः संख्याः 2 इत्यनेन भागं करोति अपि च 0 इति शेषं प्राप्नोति ।

सा एतत् अपि जानाति यत् संख्याः 2467, 4829 एतादृशाः 2 इत्यनेन विभाज्याः न सन्ति । एतासां संख्यानां एककस्थाने 0, 2, 4. 6, 8 एते अङ्काः न सन्ति । अनेन आधारेण सा निष्कर्षेण वदति यत् यदि कस्याः अपि संख्यायाः एककस्थाने 0, 2, 4, 6, 8 इत्यङ्कः भवति तर्हि सा संख्या 2 इत्यनेन विभाज्या भवति ।

3 इत्यनेन विभाज्यता : किं संख्याः 21, 27, 36, 54 अपि च 219 एताः 3 इत्यनेनइत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? आम् ।

किं संख्याः 25, 37 अपि च 260 एताः 3 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? न ।

3 इत्यनेन विभाज्यतां प्राप्तुं किं भवन्तः किमपि प्रतिरूपम् एककस्थाने द्रष्टुं शक्नुवन्ति ? वयं द्रष्टुं न शक्नुमः यइत्यनेन एककस्थाने समान-अङ्काः भवन्ति चेदपि 3 इत्यनेन विभजिताः भवितुं काश्चन संख्याः अर्हन्ति काश्चन न अर्हन्ति अपि ।

यथा संख्या 27, 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति , परं संख्याः 17, 37 संख्या 3 इत्यनेन विभाज्याः न सन्ति । अधुना भवन्तः 21, 36, 54 अपि च 219 एतासां सङ्ख्यानाम् अङ्कान् योजयन्तु । किं भवन्तः अत्र किमपि विशेषं पश्यन्ति ? 2 + 1 = 3, 3 + 6 = 9, 5 + 4 = 9, 2 + 1 + 9 =12 । सर्वासां योगः 3 इत्यनेनइत्यनेन विभाज्यः अस्ति ।

25, 37, 260 इति एतासां सङ्ख्यानाम् अङ्कान् योजयन्तु । 2 + 5 = 7, 3 + 7 = 10, 2 + 6 + 0 = 8 इति प्राप्यते । अत्र तु कः अपि योगः 3 इत्यनेन विभाज्यः नास्ति ।

वयं वदामः यत् **यदि कस्याः अपि संख्यायाः अङ्कानां योगः 3 इत्यस्याः गुणजः अस्ति तर्हि सा संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति।**

किं 7221 संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

6 इत्यनेन विभाज्यता : किं भवन्तः कामपि तादृशसंख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 2 अपि च 3 द्वाभ्यां विभाज्या अस्ति ? एतादृशी एका संख्या 18 अस्ति। किं संख्या 18, 2 x 3 इत्यस्य गुणनफलं 6 इत्यनेन विभाज्या भविष्यति ? आम्, भविष्यति।

18 इत्येतादृश्यः अन्यसंख्याः अभिजानन्तु अपि च परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं ताः 6 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं भवन्तः कामपि तादृशसंख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् या 2 इत्यनेन विभाज्या स्यात् अपि च 3 इत्यनेन विभाज्या न स्यात् ?

अधुना एकां तादृशसंख्यां लिखन्तु या 3 इत्यनेन विभाज्या स्यात् अपि च 2 इत्यनेन विभाज्या न स्यात्। एतादृशी एका संख्या 27 अस्ति।

किं 27 संख्या 6 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न। एतादृश-अन्य-संख्याः अपि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

अनेन ज्ञायते यत् **यदि कापि संख्या 2 अपि च 3 द्वाभ्यामपि विभाज्या स्यात् सा संख्या 6 इत्यनेन अपि विभाज्या**
भवति।

4 इत्यनेन विभाज्यता : किं भवन्तः अङ्कत्रयाणां कापि तादृश-संख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। आम्, एतादृशी एका संख्या 212 अस्ति। अधुना कामपि अङ्कचतुष्टयात्मिकीं संख्यां वदन्तु या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। एतादृशी एका संख्या 1936 अस्ति।

212 इत्यस्याः एकक-दशक-स्थानस्य अङ्काभ्यां निर्मितां संख्यां पश्यन्तु। सा संख्या 12 अस्ति, या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। 1936 इत्यस्याः एतादृशी संख्या तु 36 अस्ति। पुनः एषा अपि 4 इत्यनेन विभज्यते। इमां प्रक्रियां संख्यानां 4612; 3516; 9532 एतासाम् उपरि अपि कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

किं 286 संख्या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न। किं 86 संख्या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न।

अइत्यनेन वयं वदामः **यत् 3 अथवा अधिकाङ्कयुक्ता एका संख्या 4 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि तस्याः अन्तिमाभ्यां द्वाभ्याम् अङ्काभ्यां निर्मित-संख्या 4 इत्यनेन विभाज्या स्यात्। एतस्य नियमस्य परीक्षणम् इतोऽपि 10 अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य कुर्वन्तु।**

1 अथवा 2 अङ्कयोः संख्या 4 इत्यनेन विभाज्यता भवति उत न इति परीक्षणं वास्तविकरूपेण 4 इत्यनेनइत्यनेन विभाजनं कृत्वा करणीयम्।

8 इत्यनेन विभाज्यता : किं संख्याः 1000, 2104, 1416 एताः 8 इत्यनेनइत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? आम्। एताः 8 इत्यनेनइत्येनन विभाज्याः सन्ति।

एतासां संख्यानाम् एकक-दशक-शतक-स्थानस्य अङ्कैः निर्मित-संख्याः क्रमशः 000, 104 अपि च 416 सन्ति। एताः तिस्रः अपि संख्याः 8 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति। तादृश्यः इतोऽपि अन्यसंख्याः अभिजानन्तु यासाम् अन्तिमैः त्रिभिः अङ्कैः निर्मिताः संख्याः 8 इत्यनेन विभाज्याः भवेयुः। उदाहरणार्थम् 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इत्याद्यः। एतासु संख्यासु भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एताः संख्याः स्वयं 8 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

वयम् अभिजानीमः यत् **4 अथवा तदधिकाङ्कानां कापि संख्या 8 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि अन्तिम-अङ्कत्रयेण निर्मित-संख्या 8 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।**

किं 73512 संख्या 8 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

1, 2 अथवा 3 अङ्कानां संख्या 8 इत्यनेन विभज्या भवति उत न इति परीक्षितुं वास्तविकरूपेण भागं कृत्वा दृष्टव्यं भवति।

9 इत्यनेन विभाज्यता : 9 इत्यस्याः संख्यायाः गुणजाः 9, 18, 27, 36, 45, 54,... सन्ति अर्थात् एताः संख्याः 9 इत्यनेन विभज्याः सन्ति। काश्चन अन्याः संख्याः 4608, 5283 एतादृश्यः अपि 9 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं भवन्तः एतासां संख्यानां अङ्क-योगेन किमपि प्रतिरूपं पश्यन्ति ? आम्।

$1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,$

$4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18$

एतासु सर्वे योगाः 9 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं 758 संख्या 8 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न।

अस्याः संख्यायाः अङ्कानां योगः $7 + 5 + 8 = 20$ एषा संख्या 9 इत्यनेन विभाज्या नास्ति।

अनेन आधारेण वयं वदामः यत् **यदि कस्याः अपि संख्यायाः योगः 9 इत्यनेन विभज्यतां प्राप्नोति तर्हि सा संख्या 9 इत्यनेन विभाज्या भवति।**

11 इत्यनेन विभाज्यता : संख्याः 308, 1331 अपि च 61809 एताः प्रत्येकम् अपि 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

वयम् एकस्य कोष्ठकस्य निर्माणं कुर्मः अपि च पश्यामः यत् एतासां संख्यानाम् अङ्कैः किमपि प्रतिरूपं प्राप्यते वा इति।

संख्याः	दक्षिणतः विषमस्थानस्य अङ्कानां योगः	दक्षिणतः समस्थानस्य अङ्कानां योगः	द्वयोः मध्ये अन्तरम्
308	$8 + 3 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$9 + 8 + 6 = 23$	$0 + 1 = 1$	$23 - 1 = 22$

वयं पश्यामः यत् प्रत्येकं स्थितौ अन्तरं 0 अस्ति अथवा 11 अस्ति। अपि च एताः सर्वाः संख्याः 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

संख्यायाः 5081 इत्यस्याः कृते, अङ्कानाम् अन्तरं $(8 + 5) - (1 + 0) = 12$ अस्ति या 11 इत्यनेन विभाज्या नास्ति। संख्या 5081 अपि 11 इत्यनेन विभाज्या नास्ति। परीक्षणं तु 5081 संख्यां 11 इत्यनेन भागं कृत्वा भवितुं शक्नोति।

अपि च कामपि संख्यां, **11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति उत न इति द्रष्टुं दक्षिणतः विषमाङ्कानां योगः अपि च दक्षिणतः समसंख्यानां योगः एतद्-द्वयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरं जानीयात्। यदि इदम् अन्तरं 0 अथवा 11 इत्यनेन विभाज्यं भवति तर्हि सा संख्या अपि 11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति।**

अभ्यासः 3.3

1. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अधोलिखिताः संख्याः 2 इत्यनेन, 3 इत्यनेन, 4 इत्यनेन, 5 इत्यनेन, 6 इत्यनेन, 8 इत्यनेन, 9 इत्यनेन, 10 इत्यनेन अपि च 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति उत न इति अभिज्ञाय आम् अथवा न इति लिखतु।

संख्याः	विभाज्याः सन्ति								
	2 इत्यनेन	3 इत्यनेन	4 इत्यनेन	5 इत्यनेन	6 इत्यनेन	8 इत्यनेन	9 इत्यनेन	10 इत्यनेन	11 इत्यनेन
128	आम्	न	आम्	न	न	आम्	न	न	न
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः संख्याः 4 इत्यनेन विभज्याः सन्ति अपि च काः संख्याः 8 इत्यनेन विभज्याः सन्ति।

(a) 572 (b) 726352 (c) 5500 (d) 6000
(e) 12159 (f) 14560 (g) 21084 (h) 31795072
(i) 1700 (j) 2150

3. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः संख्याः 6 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति इति।

(a) 297144 (b) 1258 (c) 4335 (d) 61233
(e) 901352 (f) 438750 (g) 1790184 (h) 12583
(i) 639210 (j) 17852

4. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः संख्याः 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति इति।

(a) 5445 (b) 10824 (c) 7138965
(d) 70169308 (e) 10000001 (f) 901153

5. रिक्तस्थानेषु लघुतमं तथा बृहत्तमम् अङ्कं लिखन्तु येन संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।

(a) _____ 6724 (b) 4765 _____ 2

6. अधोलिखितेषु रिक्तस्थानं तादृश-अङ्केन पूरयन्तु यत् संख्या 11 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।

(a) 92 _____ 389 (b) 8 _____ 9484

3. 5 सामान्य-गुणनखण्डः अपि च सामान्य-गुणजः

कासाञ्चन संख्यानां युग्मस्य गुणनखण्डान् पश्यन्तु।

(a) 4 अपि च 18 एतयोः गुणनखण्डाः के सन्ति ?

4 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2 अपि च 4

18 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 6, 9 अपि च 18

4 अपि च 18 एतद्द्वयोः गुणनखण्डः : 1 अपि च 2 अस्ति।

अथवा 4 अपि च 18 एतयोः द्वयोः सामान्यः गुणनखण्डः अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितयुग्मानां सामान्यगुणनखण्डं लिखन्तु।

(a) 8, 20 (b) 9, 15

(b) 4 अपि च 15 एतयोः सामान्य-गुणनखण्डः कः ?

एतयोः द्वयोः संख्ययोः कृते केवलं 1 समान्यः गुणनखण्डः अस्ति।

7 अपि च 16 एतयोः सामान्य-गुणनखण्डः कः ?

द्वे संख्ये ययोः केवलं 1 एव सार्व-गुणनखण्डः अस्ति तर्हि ते स-अभाज्यसंख्ये इत्युच्येते। 4 अपि च 15 स-अभाज्यसंख्ये स्तः। किं 7 अपि च 15, 12 अपि च 49, 18 अपि च 23 एते युग्माः स-अभाज्यसंख्याः सन्ति ?

(c) किं वयं 4,12 अपि च 16 एतासां सामान्य-गुणनखण्डं ज्ञातुं शक्नुमः ?

4 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2 अपि च 4 अस्ति।

12 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 6 अपि च 12 अस्ति।

16 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 8 अपि च 16 अस्ति।

स्पष्टतया 4,12 अपि च 16 एतासां सामान्य-गुणनखण्डः 1, 2 अपि च 4 अस्ति।

अधोलिखितस्य गुणनखण्डान् जानन्तु।

(a) 8, 12, 20 (b) 9, 15, 21

आयान्तु, अधुना अधिकसंख्यानां गुणजान् समानकाले एव स्वीकृत्य पश्यन्तु।

(a) 4 अपि च 6 इत्येतयोः गुणजाः के सन्ति ?

4 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 4, 8, 12, 16, 20, 24, … (इतोऽपि काञ्चन गुणजान् लिखन्तु)

6 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 6, 12, 18, 24, 30, 36,…(इतोऽपि काञ्चन गुणजान् लिखन्तु)

एतासु किं तादृश्यः संख्याः सन्ति याः द्वयोः सूच्योः मध्ये अपि सन्ति ? वयं पश्यामः यत् 12, 24, 36, … एते 4 अपि च 6 द्वयोः अपि गुणजाः सन्ति।

किं भवन्तः एतादृशान् इतोऽपि गुणजान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?

एते तु 4 अपि च 6 इत्येतयोः द्वयोः सामान्य-गुणजाः इति कथ्यन्ते।

(b) 3, 5 अपि च 6 एतासां सामान्य-गुणजं जानन्तु।

3 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ….।

5 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ….।

6 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 6, 12, 18, 24, 30, ….।

3, 5 अपि च 6 एतासां सामान्य-गुणजाः : 30, 60, 90 सन्ति।

3, 5 अपि च 6 एतासां सङ्ख्यानाम् इतोऽपि काञ्चन सामान्य-गुणजान् लिखन्तु।

उदाहरणम् 5 : 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु।

समाधानम् : 75 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 3, 5, 15, 25, अपि च 75 अस्ति।

60 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 अपि च 60 अस्ति।

210 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 अपि च 210 अस्ति।

अनेन प्रकारेण 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डाः 1, 3, 5, 15 सन्ति।

उदाहरणम् 6 : 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु।

समाधानम् : 3, 4 अपि च 9 एतासां सामान्य-गुणजान् जानन्तु।

3 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, …।

4 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, …।

9 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, …।

स्पष्टतः 3, 4 अपि च 9 एतासां सामान्य-गुणजाः सन्ति : 36, 72, 108, …।

अभ्यासः 3.4

1) अधोलिखितानां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु।

(a) 20 अपि च 28 (b) 15 अपि च 25

(c) 35 अपि च 50 (d) 56 अपि च 120

2) अधोलिखितानां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु।

(a) 4, 8 अपि च 12 (b) 5, 15 अपि च 25

3) अधोलिखितानां त्रीन् सामान्य-गुणजान् अभिजानन्तु।

(a) 6 अपि च 8 (b) 12 अपि च 18

4) 100 इत्यनेन न्यूनाः, 3 अपि च 4 एतयोः सर्वान् गुणजान् लिखन्तु।

5) अधोलिखितासु काः संख्याः अभाज्येन सह सन्ति ?

(a) 18 अपि च 35 (b) 15 अपि च 37 (c) 30 अपि च 415

(d) 17 अपि च 68 (e) 216 अपि च 215 (f) 81 अपि च 16

6) एका संख्या 5 अपि च 12 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। कया अन्यया संख्यया एषा संख्या सदैव विभाजिता भवति ?

7) एका संख्या 12 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। इतोऽपि काः संख्याः सन्ति याभिः एषा संख्या विभाज्या भवति ?

3. 6 विभाज्यतायाः इतोऽपि अन्ये नियमाः

आयान्तु, विभाज्यतायाः इतोऽपि अन्यान् नियमान् पश्यामः ।

(i) किं भवन्तः 18 इत्यस्याः एकं गुणनखण्डं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एषः 9 अस्ति । 9 इति संख्यायाः एकं गुणनखण्डं लिखन्तु । एषः 3 अस्ति । किं 18 संख्यायाः एकः गुणनखण्डः 3 अस्ति ? आम् । 18 इत्यस्याः अन्यम् एकं गुणनखण्डं लिखन्तु । एषः 6 अस्ति । किं 6 इत्यस्याः एकं गुणनखण्डं वदन्ति ? एषः 2 अस्ति । एषः 18 इत्यस्याः अपि एकः गुणनखण्डः अस्ति अर्थात् 18 संख्यां विभजति । 18 संख्यायाः अन्यान् गुणनखण्डं स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

इमां प्रक्रियां 24 कृते अपि कुर्वन्तु । एषा संख्या 8 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । सहैव 24 संख्या, 8 इत्यस्याः 1, 2, 4 अपि च 8 एतैः सर्वैः गुणनखण्डैः विभाज्या अस्ति ।

अइत्यनेन वयं वदामः यत् **यदि कापि संख्या एकया संख्यया विभाज्या अस्ति तर्हि सा संख्या अस्याः संख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डेन अपि विभाज्या भवति ।**

(ii) संख्या 80 संख्याभ्यां 4 अपि च 5 इति द्वाभ्यां विभाज्या अस्ति । एषा 4 x 5 = 20 इत्यनेन अपि विभाज्या अस्ति तथा 4 अपि च 5 साभाज्य-संख्ये स्तः ।

अनेन प्रकारेण संख्या 60 साभाज्य-संख्याभ्यां 3 अपि च 5 इत्याभ्यां विभाज्या अस्ति । 60, गुणनफलाभ्यां 3 x 5 = 15 एताभ्यामपि विभाज्या अस्ति ।

अइत्यनेन वयं वदामः यत् **यदि कापि संख्या द्वाभ्यां स-अभाज्यसंख्याभ्यां विभाज्या अस्ति तर्हि सा तस्याः संख्यायाः गुणनफलेनापि विभाज्या अस्ति ।**

(iii) द्वे संख्ये 16 अपि च 20 संख्या 4 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । संख्या 16 + 20 = 36 अपि 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । संख्यानाम् अन्यान् युग्मान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

16 अपि च 20 एतयोः अन्य-सामान्य-गुणनखण्डान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । अनेन प्रकारेण ज्ञायते यत् **यदि दत्त-संख्याद्वयं कया अपि इत्यनेन विभाज्यं भवति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः अपि तया सङ्ख्यया सह विभाज्यः भविष्यति ।**

(iv) द्वे संख्ये 35 अपि च 20, संख्या 5 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । किम् एतयोः अन्तरम् 35 – 20 = 15 अपि 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? संख्यानां अन्यान् अपि युग्मान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । अनेन प्रकारेण **यदि दत्त-संख्याद्वयं कयापि संख्यया विभाज्यतां प्राप्नोति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः अन्तरम् अपि तया विभाज्यतां प्राप्नोति ।**

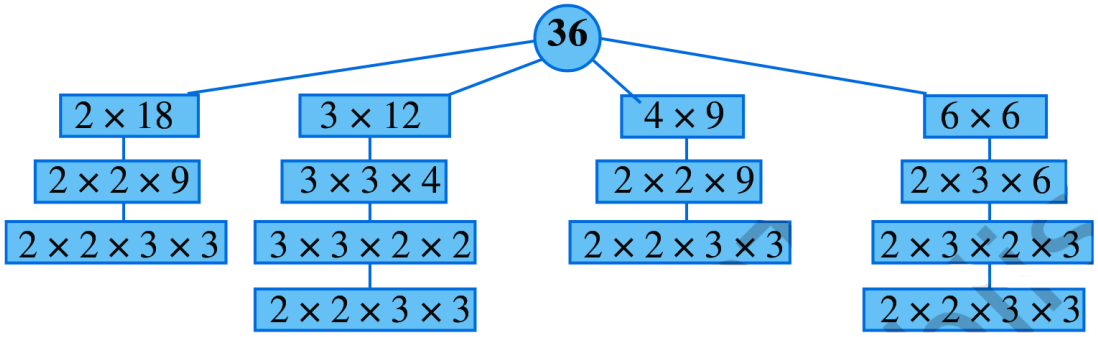
3. 7 अभाज्य-गुणनखण्डनम्

यदि कामपि संख्यां तस्याः गुणनखण्डानां गुणनफलरूपेण अभिलेखितुं शक्नुमः तर्हि वयं तां संख्यां गुणनखण्डितां कृतवन्तः अथवा तस्याः गुणनखण्डं कृतवन्तः इति वदामः । अनेन प्रकारेण यदि वयं 24 = 3 x 8 लिखामः तर्हि वयं वदामः यत् वयं 24 इत्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डान् कृतवन्तः इति । एषः 24 इत्यस्याः गुणनखण्डनेषु एकः गुणनखण्डः अस्ति । अस्याः अन्य-गुणनखण्डनानि च अपि सन्ति ।

24 = 2 x 12 = 2 x 2 x 6 = 2 x 2 x 2 x 3	24 = 4 x 6 = 2 x 2 x 6 = 2 x 2 x 2 x 3	24 = 3 x 8 = 3 x 2 x 2 x 2 = 2 x 2 x 2 x 3

24 इति संख्यायाः सर्वेषु गुणनखण्डनेषु अन्ते वयम् एकम् एव गुणनखण्डनं 2 x 2 x 2 x 3 प्राप्नुमः। अस्मिन् गुणनखण्डने केवलं 2 अपि च 3 एव गुणनखण्डः अस्ति।

आयान्तु, अस्य परीक्षणं 36 स्वीकृत्य कुर्मः।



36 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डनं 2 x 2 x 3 x 3 अस्ति। एतत् 36 इत्यस्याः अन्तिमम् एकम् अभाज्य-गुणनखण्डनम् अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

16, 28 अपि च 38 एतासाम् अभाज्य-गुणनखण्डनं लिखन्तु।

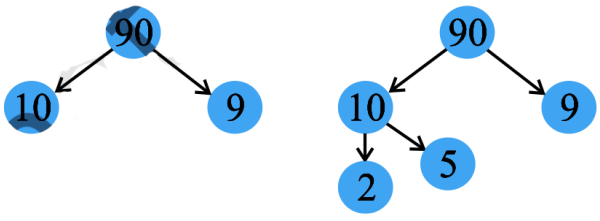
एतत् कुर्वन्तु

गुणनखण्डस्य वृक्षः

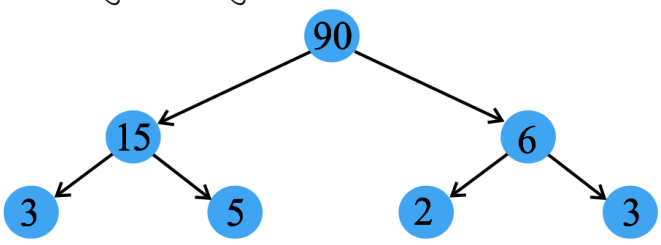
कामपि संख्यां स्वीकुर्वन्तु अपि च लिखन्तु : 90

अस्याः कमपि गुणनखण्डस्य युग्मं चिन्तयन्तु यथा 90 = 15 x 6

इदानीं 15 इति संख्यायाः एकं गुणनखण्डस्य युग्मं चिन्तयन्तु यथा 15 = 3 x 5



6 इति संख्यायाः गुननखण्डस्य युग्मं लिखन्तु।



एवमेव अधोलिखिताः संख्याः अपि स्वीकृत्य लिखन्तु।

(a) 8 (b) 12

उदाहरणम् 5 : 980 इति संख्यायाः अभाज्य-गुणखण्डनम् अभिजानन्तु।

समाधानम् : वयम् अपि च क्रमेण लिखामः।

वयं संख्यां 980 इत्याख्यां 2, 3, 5, 7 इत्यादिक्रमेण वारं वारं भागं कुर्मः। इमां प्रक्रियां वयं तावत्पर्यन्तं कुर्मः यावत्पर्यन्तं भागफलम् अनेन विभाजितं भवेत्।

2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

अनेन प्रकारेण 980 इति संख्यायाः गुणनखण्डः अस्ति : $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

अभ्यासः 3.5

1 अधोलिखितासु पङ्क्तिषु किं कथनं सत्यं किं च असत्यम् इति अभिजानन्तु।

(a) यदि कापि संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति, तर्हि सा 9 इत्यनेन अपि विभाज्या भवति।

(b) यदि कापि संख्या 9 इत्यनेन विभाज्या अस्ति, तर्हि सा 3 इत्यनेन अवश्यं विभाज्या भवति।

(c) एका संख्या 18 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि सा संख्या 3 अपि च 6 इत्यनेन विभाज्या भवति।

(d) यदि एका संख्या 9 अपि च 10 इत्यनेन विभज्या भवति तर्हि 90 इत्यनेन अपि विभाज्या भवति।

(e) यदि द्वे संख्ये साभाज्ये स्तः तर्हि द्वयोः एका संख्या तु अवश्यं अभाज्या भवति।

(f) 4 इत्यनेन विभाज्याः सर्वाः संख्याः 8 इत्यनेन अपि विभाज्याः भवेयुः।

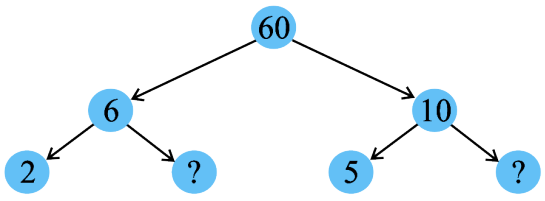
(g) 8 इत्यनेन विभाज्याः सर्वाः संख्याः 4 इत्यनेन अपि विभाज्याः भवेयुः।

(h) यदि कापि संख्या संख्याद्वयं पृथक्तया सम्पूर्णं विभजति तर्हि सा संख्या तयोः योगस्यापि विभाजनंविभाजनं करोति।

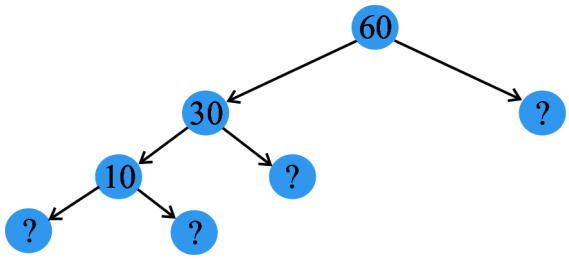
(i) यदि कापि संख्या द्वयोः संख्ययोः योगं सम्पूर्णतया विभाजयति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः पृथक्तया अपि विभाजनं करोति।

2 अत्र 60 संख्यायाः कृते भिन्न-गुणनखण्ड-वृक्षौ स्तः। अत्र रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a)



(b)



3) एकस्याः भाज्यसंख्यायाः अभाज्यगुणनखण्डने केषां गुणनखण्डानां सम्मेलनं न भवति ?

4) अङ्कचतुष्टयात्मिकां बृहत्तमां संख्यां लिखन्तु अपि च ताम् अभाज्यगुणनखण्डस्य एकेन रूपेण दर्शयन्तु ।

5) पञ्च-अङ्कानां लघुतमां संख्यां लिखन्तु अपि च ताम् अभाज्यगुणनखण्डस्य एकेन रूपेण दर्शयन्तु ।

6) 1729 संख्यायाः सर्वान् अभाज्यगुणनखण्डान् अभिजानन्तु अपि च तान् आरोहणक्रमे लिखन्तु । अधुना द्वयोः क्रमागत-अभाज्य-गुणनखण्डयोः मध्ये यदि कश्चन सम्बन्धः अस्ति तर्हि लिखन्तु ।

7) तिसृणां क्रमागत-संख्यानां गुणनफलं सदैव 6 इत्यनेन विभाजनंविभाजनं प्राप्नोति । इदं कथनं केषाञ्चन उदाहरणानां साहाय्येन स्पष्टीकुर्वन्तु ।

8) द्वयोः क्रमागत-विषमसंख्ययोः योगः 4 इत्यनेन विभाजनं प्राप्नोति । इदं कथनं केषाञ्चन उदाहरणानां साहाय्येन स्पष्टीकुर्वन्तु ।

9) अधोलिखितेषु केषु व्यञ्जकेषु अभाज्य-गुणनखण्डः कृतः ?

(a) $24 = 2 \times 3 \times 4$ (b) $56 = 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2$

(c) $70 = 2 \times 5 \times 7$ (d) $54 = 2 \times 3 \times 9$

10) भागेन विना एव अभिजानन्तु यत् किं 25110 संख्या 45 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?
[सङ्केतः : 5 अपि च 9 साभाज्ये संख्ये स्तः । दत्तसंख्यानां विभाजनं 5 अपि च 9 संख्याभ्यां भवति अथवा न भवति इत्यस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।]

11) संख्या 18, 2 अपि च 3 इत्याभ्यां विभाज्या अस्ति । सा संख्या $2 \times 3 = 6$ इत्यनया अपि विभाज्या अस्ति । अनेन प्रकारेण एका संख्या 4 अपि च 6 इत्याभ्यां विभाज्या अस्ति । किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् सा संख्या $4 \times 6 = 24$ इत्यनया अपि विभाज्या भवति ? यदि न भवति तर्हि स्व-उत्तरस्य पुष्ट्यर्थम् एकम् उदाहरणं ददतु ।

12) अहं 4 इति सङ्ख्या विभिन्न-अभाज्य-गुणनखण्डयुक्ता लघुतमा संख्या अस्मि । किं भवन्तः माम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति?

3.8 महत्तमः सामान्यः अपवर्तकः

वयं द्वयोः संख्ययोः सामान्य-गुणनखण्डम् अभिज्ञातुं शिक्षितवन्तः । अधुना वयं एतेषु सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमं गुणनखण्डं ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः ।

12 अपि च 16 संख्ययोः समान्यगुणनखण्डाः के ? एते 1, 2 अपि च 4 सन्ति ।

एतेषु सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमः कः ? एषः 4 अस्ति । 20, 28 अपि च 36 एतासां समान्यगुणनखण्डाः के ? एते 1, 2 अपि च 4 सन्ति । अत्र बृहत्तमः 4 अस्ति ।

द्वयोः अथवा अधिकानां दत्तसंख्यानां सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमः सामान्यः गुणनखण्डः दत्तसंख्यानां महत्तमः सामान्यः अपवर्तकः इत्युच्यते । महत्तम-सामान्य-अपवर्तकं संक्षेपेण म.सा.अ. इत्यपि लिखामः । अमुं महत्तमः समान्यः विभाजकः इत्यपि कथयन्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां महत्तमसमापवर्त्तकम् अभिजानन्तु ।

(i) 24 36 (ii) 15, 25 30

(iii) 8 12 (iv) 12, 16 28

संख्यानां 20, 28 अपि च 36 एतासां म.सा.अ. एतासां संख्यानां अभाज्य-गुणनखण्डन-द्वारा अभिज्ञातुं शक्यते ।

2	20
2	10
5	5
	1

2	28
2	14
7	7
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

अनेन प्रकारेण,

$20 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5$

$28 = 2 \times 2 \times 7$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

20, 28 अपि च 36 एतासु संख्यासु सामान्य-गुणनखण्डः अस्ति 2 ।

अतः 20, 28 अपि च 36 एतासु संख्यानां म.सा.अ. $2 \times 2 = 4$ भवति |

अभ्यासः 3.6

1) अधोलिखितानां संख्यानां म.सा.अ. अभिजानन्तु ।

(a) 18, 48 (b) 30, 42 (c) 18, 60 (d) 27, 63

(e) 36, 84 (f) 34, 102 (g) 70, 105, 175 (h) 91, 112, 49

(i) 18, 54, 81 (j) 12, 45, 75

2) अधोलिखितानां म.सा.अ. कः ?

(a) क्रमागतं संख्याद्वयम् (b) क्रमागतं समसंख्याद्वयम् (c) क्रमागतं विषमसंख्याद्वयम्

3) अभाज्य-गुणनखण्डन-द्वारा द्वयोः साभाज्य-संख्ययोः 4 अपि च 15 एतद्द्वयोः म.सा.अ. अनेन प्रकारेण अभिज्ञातः । यथा

$4 = 2 \times 2$ अपि च $15 = 3 \times 5$

यतो हि अस्मिन् गुणनखण्डे कोऽपि अभाज्य-सामान्य-गुणनखण्डः नास्ति इत्यतः 4 अपि च 15 एतयोः म.सा.अ. शून्यम् अस्ति । किम् इदम् उत्तरं सम्यक् अस्ति ? यदि नास्ति तर्हि समुचितम् उत्तरं किं भवेत् ?

3.9 लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः

4 अपि च 6 एतयोः समान्य-गुणजाः के ? एते 12, 24, 36, ... सन्ति। एतेषु लघुतमः गुणजः कः ? एषः 12 अस्ति। वयं वदामः यत् 4 अपि च 6 एतयोः लघुतमः गुणजः अथवा लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः 12 अस्ति। एषा तु सा लघुतमा संख्या अस्ति या द्वयोः अपि गुणजत्वेन अस्ति।

द्वयोः अथवा अधिकानां दत्तसंख्यानां लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः एतासां संख्यानां सामान्य-गुणजेषु लघुतमः गुणजः एव अस्ति। संक्षेपेण अमुं ल.सा.अ. इति लिखामः।

8 अपि च 12 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ? 4 अपि च 9 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ? 6 अपि च 9 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ?

उदाहरणम् 8 : 12 अपि च 18 एतयोः ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : वयं जानीमः यत् 12 अपि च 18 एतयोः सामान्य-गुणजाः 36, 72, 108 इत्यादयः सन्ति। लघुतमा 18 अस्ति। आयान्तु अन्येन एकेन विधिना उत्तरं प्राप्नुमः।

12 अपि च 18 एतयोः अभाज्य-गुणनखण्डनम् एवम् अस्ति।

$12 = 2 \times 2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

एतेषु अभाज्य-गुणनखण्डनेषु अभाज्य-गुणनखण्डः 2 द्विवारम् आगतः। अपि च अभाज्य-गुणनखण्डः 3 अपि द्विवारम् आगतः। द्वयोः संख्ययोः ल.सा.अ. तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति ये तासु अधिकवारम् आगच्छन्ति। अतःएतासां संख्यानां ल.सा.अ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ अस्ति।

उदाहरणम् 9 : 24 अपि च 90 एतयोः ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : 24 अपि च 90 एतयोः अभाज्य-गुणनखण्डनम् अपि च अस्ति।

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

एतेषु अभाज्य-गुणनखण्डनेषु, गुणनखण्डः 2 त्रिवारम् आतः। अभाज्य-गुणनखण्डः 3 द्विवारम् आगतः। अपि च अभाज्य-गुणनखण्डः 5 केवलम् एकवारं 90 मध्ये आगइत्यनेन।

अतः इष्टः ल.सा.अ. $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

उदाहरणम् 10 : 40, 48 अपि च 45 एतासां ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : 40, 48 अपि च 45 एतासाम् अभाज्य-गुणनखण्डनम् अपि च अस्ति।

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

अभाज्य-गुणनखण्डः 2 अधिकाधिकं चतुर्वारम् आगतः, अभाज्य-गुणनखण्डः 3 अधिकाधिकं द्विवारं आगतः अपि च 5 एकवारम् एव आगतः।

अतः इष्टं-ल.सा.अ. $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम-सामान्य-अपवर्त्यम् अधोलिखितेन अन्यविधिना अपि अभिज्ञातुं शक्यते।

उदाहरणम् 11 : 20, 25 अपि च 30 एतासां ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : वयं संख्याः अधोलिखितप्रकारेण एकस्यां पङ्क्तौ लिखामः।

2	20	25	30	**(a)**
2	10	25	15	**(b)**
3	5	25	15	**(c)**
5	5	25	5	**(d)**
5	1	5	1	**(e)**
	1	1	1	

अतः ल.सा.अ = 2 x 2 x 3 x 5 x 5 = 300

(a) लघुतमया अभाज्यसंख्यया 2 इत्यनया विभाजनं कुर्वन्तु। 25 संख्या 2 इत्यनया विभाज्या नास्ति। अतः ताम् अग्रिमपङ्क्तौ यथा अस्ति तथैव लिख्यते।

(b) पुनः 2 इत्यनया विभाजनं कुर्वन्तु। प्रक्रियाम् अग्रे नयन्तु यावत् पर्यन्तं 2 इत्यस्याः गुणजः लभ्यते।

(c) अग्रिम-अभाज्यसंख्यया 3 इत्यनया सङ्ख्यया भागं कुर्वन्तु।

(d) अग्रिम-अभाज्यसंख्यया 5 इत्यनया भागं कुर्वन्तु।

(e) पुनः 5 इत्यनया संख्यया भागं कुर्वन्तु।

3.10 म.सा.अ. अपि च ल.सा.अ. एतयोः कृते अन्यानि उदाहरणानि

अस्माभिः अनेकेषु सन्दर्भेषु म.सा.अ. अपि च ल.सा.अ अनयोः प्रयोगः क्रियते। वयम् उदाहरणैः सह एतत् कथनं स्पष्टीकुर्मः।

उदाहरणम् 12 : द्वयोः टैङ्कर्-यानयोः मध्ये क्रमशः 850 लीटर् अपि च 680 लीटर-मृत्तिकातैलम् आगच्छति। तस्य पात्रस्य अधिकतमां धारिताम् अभिजानन्तु येन द्वयोः अपि टैङ्कर्-यानयोः तैलं सम्पूर्णं मापितं भवति।

समाधानम् : इच्छित-पात्रेण द्वयोः अपि टैङ्कर्-यानयोः तैलं सम्पूर्णतया मापनीयम् अस्ति। अतः अस्य धारिता द्वयोः टैङ्कर्-यानयोः धारितानां एका संपूर्ण-विभाजिका अस्ति। सहैव अस्य धारिता अधिकतया अपि भवेत्। अतः अस्य पात्रस्य अधिकतमा धारिता 850 अपि च 680 एतयोः म.सा.अ. भवति। इदम् अधोलिखितरीत्या ज्ञातुं शक्नुमः।

2	850
5	425
5	85
17	17
	1

2	680
2	340
2	170
5	85
17	17
	1

अतः ,

$850 = 2 \times 5 \times 5 \times 17 = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times 5$

$680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 17 = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times 2 \times 2$

850 अपि च 680 एतयोः सामान्यगुणनखण्डाः 2, 5 अपि च 17 सन्ति।

अतः 850 अपि च 680 एतयोः म.सा.अ. = 2 x 5 x 17 = 170 अस्ति।

अतः इच्छित-पात्रस्य अधिकतम-धारिता 170 लीटर् अस्ति। एषा प्रथम-पात्रं 5-वारं द्वितीयं 4-वारं सम्पूर्णं मापयति।

उदाहरणम् 13 : प्रातःकालीन-पर्यटने त्रयः जनाः सहैव चलनस्य आरम्भं कुर्वन्ति। तेषां पादाभ्यां मध्ये विद्यमान-दैर्घ्यं क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी अपि च 90 सेमी अस्ति। एतेषु प्रत्येकं जनः न्यूनतमं कियत् दूरं चलेत् यत् सः तं मार्गं सम्पूर्णतया पूर्णं कुर्यात्।

समाधानम् : प्रत्येकं जनैः चलितदूरं समानम् अपि च न्यूनतमं भवेत्। इदम् अभिलषितं न्यूनतमं दूरं यत् प्रत्येकं जनैः चलितं स्यात्, तत् दूरं तेषां पादयोः मापस्य लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः भवति। किं भवन्तः अत्र कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

अतः वयं 80, 85 अपि च 90 एतासां ल.सा.अ. अभिजानीमः। 80, 85 अपि च 90 एतासां ल.सा.अ. 12240 अस्ति।

अतः इच्छितं न्यूनतमं दूरत्वम् = 12240 अस्ति।

उदाहरणम् 13 : तां लघुतमां संख्याम् अभिजानन्तु यां 12, 16, 24 अपि च 36 इत्येताभिः भागकरणेन प्रत्येकं सन्दर्भे 7 शेषः भवति।

समाधानम् : वयं 12, 16, 24 अपि च 36 एतासां ल.सा.अ. अधोलिखितप्रकारेण अभिजानीमः।

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

अनेन प्रकारेण ल.सा.अ. = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 144

144 एषा संख्या सा लघुतमा संख्या अस्ति यां 12, 16, 24 अपि च 36 एताभिः विभाजनेन प्रत्येकं सन्दर्भे 0 शेषः भवति।

परन्तु अस्माकं कृते तादृशी संख्या अपेक्षिता अस्ति यत्र प्रत्येकं सन्दर्भे विभाजनेन 7 शेषफलरूपेण भवेत्।

अइत्यनेन इच्छितसंख्या 144 इत्यनेन 7 अधिका स्यात्।

अनेन प्रकारेण इच्छित-लघुतमा-संख्या = 144 + 7 = 151 अस्ति।

अभ्यासः 3.7

1. रेणुः 75 कि.ग्रा. अपि च 69 किग्रा भारयुक्ताम् उर्वरकस्य गोणीं क्रीणाति। भारयुक्तायाः तस्याः मापकशिलायाः अधिकतमं मानम् अभिजानन्तु या गोणिद्वयमपि सम्पूर्णं मापयति।
2. त्रयः बालकाः एकस्मात् स्थानात् चलनं प्रारभन्ते। तेषां पादयोः मापः क्रमशः 63 सेमी, 70 सेमी अपि च 77 सेमी अस्ति। एतेषां प्रत्येकं बालकः कियतीं न्यूनतमदूरीं क्रमेत् यत् ते तां दूरीं सम्पूर्णतया पूरयेयुः।
3. एकस्य प्रकोष्ठस्य लम्बः, वैशाल्यम् एवम् औन्नत्यं क्रमशः 825 सेमी, 675 सेमी अपि च 450 सेमी अस्ति। तादृश पट्टबन्धम् अभिजानन्तु यः प्रकोष्ठस्य त्रयाणामपि आयामानां मापनं कुर्यात्।
4. 6, 8 अपि च 12 एताभिः संख्याभिः विभाज्याम् अङ्कत्रयात्मिकाम् एकां लघुतमां संख्याम् अभिजानन्तु।
5. 8, 10 अपि च 12 एताभिः संख्याभिः विभाज्यां अङ्कत्रयात्मिकाम् एकां बृहत्तमां संख्याम् अभिजानन्तु।
6. विभिन्नानां त्रयाणां मार्गाणां यातायात-सम्मर्द-दीपाः क्रमशः प्रत्येकं 48 विपलाः, 72 विपलाः अपि च 108 विपलाः अनन्तरं परिवर्तन्ते। यदि ते दीपाः सहैव प्रातः 7 वादने परिवर्तन्ते तर्हि ते पुनः सहैव कतिवादने परिवर्तन्ते।
7. त्रिषु टैङ्कर्-यानेषु क्रमशः 403 लीटर्, 434 लीटर् अपि च 465 लीटर् डीजैल्-तैलम् अस्ति। तस्य पात्रस्य अधिकतमां धारणक्षमताम् अभिजानन्तु यत् तेषां त्रयाणामपि टैङ्कर्-यानानां डीजैल्-तैलं सम्पूर्णं मापयेत्।
8. तां लघुतमां संख्याम् अभिजानन्तु यां 6, 15 अपि च 18 एताभिः भागकरणेन प्रत्येकं सन्दर्भे 5 शेषः भवेत्।
9. अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं तां संख्याम् अभिजानन्तु या 18, 24 अपि च 32 एताभिः संख्याभिः विभाज्या स्यात्।
10. अधोलिखित-संख्यानां ल.सा.अ. अभिजानन्तु यासु एका संख्या सदैव 3 इत्यस्याः गुणजत्वेन स्यात्।

    (a) 9 अपि च 4 (b) 12 अपि च 5

    (c) 6 अपि च 5 (d) 15 अपि च 4

    प्राप्त-ल.सा.अ. मध्ये एकस्य सामान्य-गुणजस्य अवलोकनं कुर्वन्तु। किं ल.सा.अ. प्रत्येकं सन्दर्भे द्वयोः संख्ययोः गुणनफलम् अस्ति ? किं वयम् एतत् निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः संख्ययोः ल.सा.अ. सदैव 3 संख्यायाः एकः गुणजः अस्ति इति ?
11. अधोलिखितानां संख्यानां ल.सा.अ. अभिजानन्तु यासु एका संख्या अन्यस्याः संख्यायाः गुणनखण्डा अस्ति।

    (a) 5, 20 (b) 6, 18

    (c) 12, 48 (d) 9, 45

    प्राप्तेषु परिणामेषु भवन्तः किं पश्यन्ति ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. गुणजरूपाणाम् अपि च गुणनखण्डानां परिज्ञानं कथं प्राप्तुं शक्यते ।
2. एतावत् पर्यन्तं वयं चर्चां कृतवन्तः अपि च अधोलिखितान् अन्विष्टवन्तः ।
   (a) एकस्याः संख्यायाः गुणनखण्डः तस्याः संख्यायाः पूर्ण-विभाजकः भवति ।
   (b) प्रत्येकं संख्या स्वयं कस्यचित् गुणनखण्डस्य रूपेण भवति ।
   (c) प्रदत्तायाः संख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डः तस्याः सङ्ख्यायाः अपेक्षया लघुतरः अथवा समानः भवति ।
   (d) प्रत्येकं संख्या स्वस्य प्रत्येकं गुणनखण्डस्य गुणजरूपेण भवति ।
   (e) प्रदत्तसंख्यायाः प्रत्येकं गुणजः तस्याः संख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः भवति ।
   (f) प्रत्येकं संख्या स्वस्य गुणजरूपेण भवति ।
3. वयम् अवगतवन्तः –
   (a) सा संख्या यस्याः द्वौ एव गुणनखण्डौ वर्तेते, सा संख्या अपि च 1, अभाज्यसंख्ये इत्युच्येते । यासां संख्यानां कृते अधिकाः गुणनखण्डाः सन्ति ताः संख्याः भाज्यसंख्याः इत्युच्यन्ते ।
   (b) संख्या 2 लघुतमा अभाज्य-संख्या अस्ति अपि च समसंख्या अपि अस्ति । अन्याः सर्वाः अभाज्यसंख्याः विषमाः भवन्ति ।
   (c) द्वयोः संख्ययोः सामान्य-गुणनखण्डः केवलं 1 अस्ति, ते साभाज्यसंख्ये इति उच्येते ।
   (d) यदि एका संख्या द्वितीयया विभाज्या अस्ति तर्हि सा द्वितीयसंख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डैः अपि विभाजनं प्राप्नोति ।
   (e) सा संख्या या द्वाभ्यां साभाज्यसंख्याभ्यां विभाज्या भवति तर्हि तस्याः गुणनफलैः अपि विभाज्या भवति ।
4. संख्यानां भागम् अकृत्वा एव 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 अपि च 11 संख्याभिः विभाज्यता भवति उत न इत्यस्य अन्वेषणं कर्तुं शक्नुमः । वयं संख्यायाः अङ्कानां , विभिन्न-संख्याभिः विभाज्यतायाः सम्बन्धानाम् अन्वेषणं कृतवन्तः ।
   (a) संख्यायाः अङ्कानां योगेन 2, 5 अपि च 10 इत्यनेन विभाज्यतां ज्ञातुं शक्यते ।
   (b) 3 अपि च 9 इत्यनेन विभाज्यतां केवलं संख्यानाम् एककस्थानं दृष्ट्वा एव वक्तुं शक्यते ।
   (c) 4 इत्यनेन विभाज्यताम् एकक-दशकस्थानेन तथा 8 इत्यनेन विभाज्यताम् एकक-दशक-शतकस्थानेन रचयमानायाः संख्याद्वारा वक्तुं शक्यते ।
   (d) 11 इत्यनेन विभाज्यतां दक्षिणतःआरभ्य सम-विषमस्थानयोः योगस्य मध्ये विद्यमानम् अन्तरं दृष्ट्वा वक्तुं शक्यते ।
5. यदि द्वे संख्ये एकया संख्यया विभजितं भवति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः अथवा अन्तरम् अपि तया संख्यया विभाजनं प्राप्नुतः ।
6. (a) द्वयोः अथवा अधिकसंख्ययोः म.सा.अ. तासां सामान्य-गुणनखण्डेषु बृहत्तमः भवति ।
   (b) द्वयोः अथवा अधिकसंख्ययोः ल.सा.अ. तासां सामान्य-गुणनखण्डेषु लघुतमः भवति ।

मूलभूत-ज्यामितीय-अवधारणा

अध्यायः 4

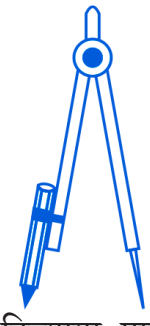
4.1 भूमिका

ज्यामितेः पुरातनः समृद्धः च इतिहासः अस्ति । ज्यामितिः इति शब्दः आङ्लसमान-यवन-शब्दात्' जियोमेट्रोन्' (Geometron) इत्यस्मात् निस्सृतः । जियो (Geo) इत्यस्यार्थः अस्ति भूमिः इति, मेट्रोन् (metron) इत्यस्यार्थः अस्ति मापनम् इति । इतिहासकाराणां मतानुसारेण पुरातन-काले प्रायः कला-शिल्पकला-भूमिमापनस्य आवश्यकतानां कारणेन ज्यामितीय-अवधारणाः विकसिताः । अत्र ते अपि अवसराः सम्मिलिताः सन्ति, यदा कस्यापि विवादस्य सम्भावनया विना कृषिभूमेः परिसीमानां निर्धारणं भवति स्म । वैभवपूर्णराजभवनानां, मन्दिराणां, सरोवराणां, नदीबन्धानाम् अपि च नगराणां निर्माणानि तथा च कला अपि च शिल्पकलाः एतासाम् अवधारणानाम् इतोऽपि प्रकाशनम् अकुर्वन् । अधुना अपि कला, शिल्पकला, अभियान्त्रिकता, वस्त्रविन्यासः इत्यादिरूपेण ज्यमितीय अवधारणानां प्रभावः दृश्यते । भवन्तः विभिन्नप्रकाराणां वस्तूनि यथा पेटिका, उत्पीठिका, पुस्तकं, भोजनपेटिका, कन्दुकम् इत्यादिवस्तूनि पश्यन्ति उपयोगमपि कुर्वन्ति । एतेषां सर्वेषां वस्तूनाम् आकाराः विभिन्नाः भवन्ति । मापिका, अङ्कनी इत्यादयः ऋजवः भवन्ति । वलयं, नाणकम् अथवा कन्दुकस्य चित्रं गोलाकारेण प्रतीयते । अत्र भवन्तः काञ्चन रुचिकर-तथ्यान् पठन्ति, यानि भवतः सर्वान् परितः विद्यमान-आकाराणाम् (आकृतीनां वा) विषये अधिकाधिकं ज्ञातुं साहाय्यं कुर्वन्ति ।

4.2 बिन्दुः

कर्गदे एकया अङ्कन्याः प्रान्तभागेन एकं चिह्नाङ्कनं कुर्वन्तु। यथा प्रान्तभागः तीक्ष्णः भवति तथा चिह्नम् अपि सूक्ष्मं भवति। प्रायः अदृश्यम् एकं सूक्ष्मं चिह्नं भवतां कृते बिन्दोः अवधारणायाः अभ्यासं कारयति। बिन्दुः एकस्य स्थानस्य निर्धारणं करोति।

बिन्दुनिमित्तानि कानिचन उदाहरणानि च अपि सन्ति :



त्रिज्यायाः प्रान्तः

अङ्कन्याः तीक्ष्णः प्रान्तः

सूच्याः तीक्ष्णः प्रान्तः

यदि भवन्तः कर्गदस्योपरि त्रीन् बिन्दून् अङ्कितान् कुर्वन्ति तर्हि किं भवन्तः त्रिषु बिन्दुषु भेदं वक्तुं आवश्यकताम् अनुभवन्ति। अतः एतान् बिन्दून् आङ्लभाषायाः स्थूलाक्षरेण A,B,C इत्यादिना व्यक्तीकुर्वन्ति।

• B

• A

• C

एतान् बिन्दून् बिन्दुः A, बिन्दुः B, बिन्दुः C इति पठामः।

बिन्दुः विना संशयं लघुः भवेत्।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. भवताम् अङ्कन्याः तीक्ष्णप्रान्तेन कर्गजे बिन्दुचतुष्टयम् अङ्कितं कुर्वन्तु। तथा तेषां कृते A, C, P एवं H इति नाम ददतु। एतेषां बिन्दूनां कृते विभिन्नप्रकारेण नाम ददतु। नामकरणस्य एकः प्रकारः अधोदर्शितायाः आकृतेः अनुसारं भवितुं शक्यते।

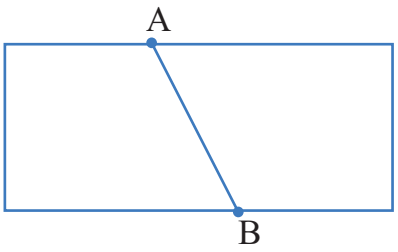
• A • C

• P • H

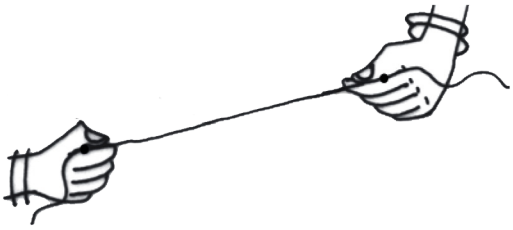
2. आकाशे एकं नक्षत्रं अस्माकं कृते बिन्द्वोः अवधारणायाः आभासं कारयति। दैनिकजीवनेन सम्बद्धाः पञ्च-स्थितीः वदन्तु।

4.3 रेखाखण्डः

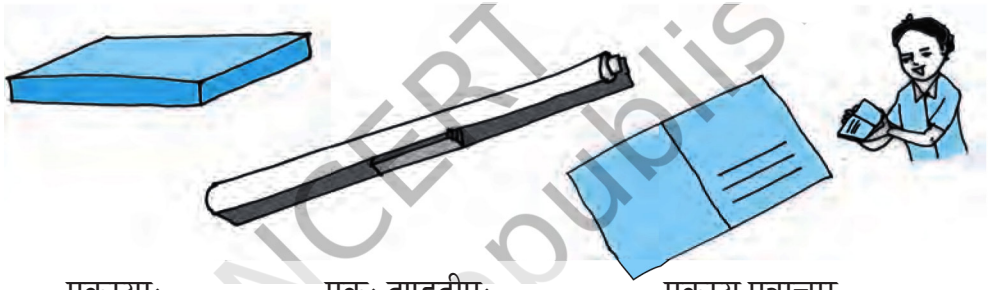
एकं कर्गजं पुटीकुर्वन्तु पुनः तद् उद्घाटयन्तु। किं भवन्तः किमपि पुटचिह्नं प्राप्तवन्तः ? अनेन एकस्य रेखाखण्डस्य अवधारणायाः आभासः अनुभूयते। अस्य द्वौ अन्यबिन्दू A अपि च B स्तः। एकं कृशं रज्जुं स्वीकुर्वन्तु। अस्य द्वौ अपि प्रान्तौ दृढतया गृह्णन्तु। एषः अपि एकस्य रेखाखण्डस्य निरूपणं करोति।



हस्ताभ्यां गृहीत-प्रान्तद्वयम् अस्य रेखाखण्डस्य अन्यबिन्दू स्तः।



रेखाखण्डस्य कानिचन उदाहरणानि अधोलिखितानि



एकस्याः मञ्जूषायाः तटम्

एकः दण्डदीपः

एकस्य पत्राचार-पत्रस्य तटम्

भवन्तः अपि समीपस्थ-रेखाखण्डानां कानिचन उदाहरणानि दातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

एकस्य कर्गदस्य उपरि बिन्दुद्वयं A अपि च B इति अङ्कितं कुर्वन्तु। एतद् बिन्दुद्वयं सर्व-सम्भवनीय-मार्गैः योजयितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु (आकृतिः 4.1)।

आकृति 4.1

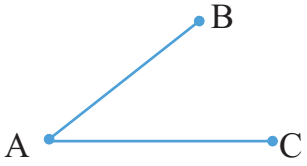
A तः B पर्यन्तं लघुतममार्गः कः अस्ति ?

A अपि च B इत्येतद्द्वयं योजयितुं एषः लघुतममार्गः अस्ति। (अत्र बिन्दुः A अपि च बिन्दुः B सम्मिलितम् अस्ति) यः दत्ताकृतौ 4.1 इत्यस्यां दर्शितः वर्तते, एषः एकः रेखाखण्डः अस्ति। इदं AB अथवा BA इति दर्शयन्ति। बिन्दुः A अपि च बिन्दुः B अस्य रेखाखण्डस्य अन्तिम-बिन्दू स्तः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. संलग्न-आकृतौ दत्तरेखाखण्डानां नाम लिखन्तु (आकृतिः 4.2)।

   किं A प्रत्येकं रेखाखण्डस्य कश्चन अन्तिमबिन्दुः अस्ति ?



© NCERT not to be republished

4.4 एका रेखा

चिन्तयन्तु यत् A तः B पर्यन्तस्य रेखाखण्डम् (अर्थात् AB) A इत्यनेन अग्रे एकस्यां दिशि अपि च B इत्यनेन अग्रे एकस्यां दिशि किमपि अन्त्यं विना विस्तृतं कुर्मः (आकृतिं पश्यन्तु) । भवतां कृते रेखायाः एकम् उदाहरणम् अत्रैव लभ्यते ।

किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् भवन्तः कर्गजे पूर्णरेखां आलेखितुं शक्नुवन्ति ? न । किमर्थम् ?

द्वाभ्यां बिन्दुभ्यां A अपि च B इत्याभ्यां निसृतरेखां AB इत्यनेन निरूपणं कुर्मः । एषा द्वयोः दिशोः अनिश्चितरूपेण विस्तृता भवति । अस्याम् असंख्यातबिन्दवः स्थिताः भवन्ति । (अस्य विषये चिन्तयन्तु)

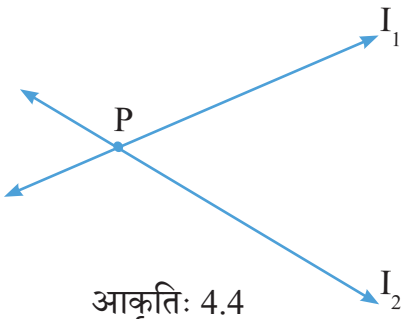
रेखां निश्चितां कर्तुं बिन्दुद्वयं पर्याप्तम् अस्ति । वयं वदामः यत् बिन्दुद्वयम् एकां रेखां निर्धारयन्ति ।

संलग्नाकृतिः रेखा (आकृतिः 4.3) PQ इत्यस्य अस्ति । यदा कदा एकां रेखां I इति अक्षरेण अपि व्यक्तीकुर्वन्ति ।

आकृतिः 4.3

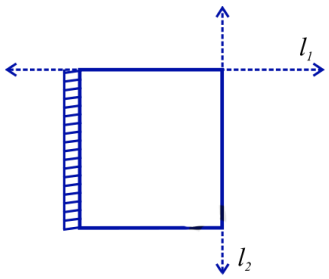
4.5 प्रतिच्छेदिरेखाः

संलग्नाकृतिं 4.4 पश्यन्तु । अत्र रेखाद्वयं I_1 I_2 दर्शितम् अस्ति । द्वे अपि रेखे बिन्दुं P इत्याख्यं छेदयित्वा चलतः । वयं वदामः यत् रेखे I_1 अपि च I_2 बिन्दुं P इत्याख्यं प्रतिच्छेदं कुरुतः । यदि रेखाद्वये उभयनिष्ठः एकः बिन्दुः अस्ति चेत् तर्हि ते **प्रतिच्छेदिरेखे** इति वदामः ।

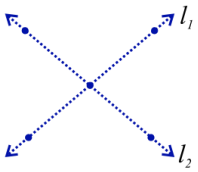


आकृतिः 4.4

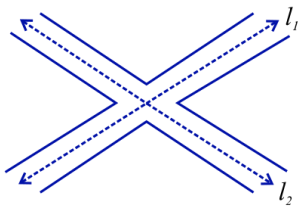
प्रतिच्छेदिरेखानां कानिचन उदाहरणानि अधोभागे सन्ति ।



भवताम् अभ्यास-पुस्तकस्य द्वौ संलग्न-प्रान्तभागौ



आङ्लवर्णमालायाः अक्षरम् X



परस्परं कर्तयन्तौ मार्गौ

आकृतिः 4.5

प्रतिच्छेदिरेखायाः युग्मानाम् अन्यानि उदाहरणानि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

एतत् कुर्वन्तु

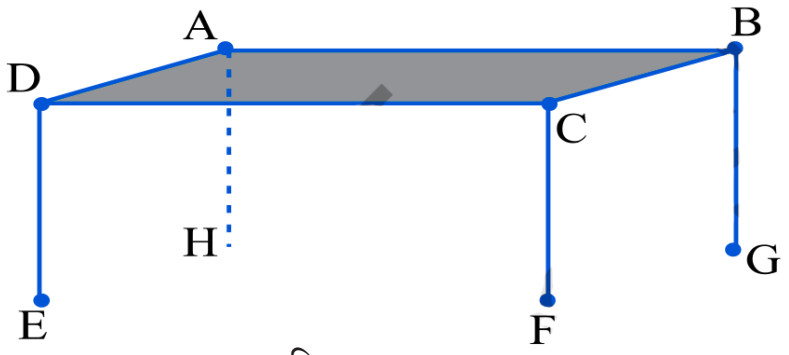
एकं कर्गजं स्वीकुर्वन्तु । द्विवारं पुटीकुर्वन्तु (पुटस्य चिह्नं कुर्वन्तु) यतः द्वे प्रतिच्छेदिरेखे प्राप्ते भवतः । अधुना चर्चां कुर्वन्तु ।

(a) किं रेखाद्वयं एकाधिक-बिन्दूनां प्रतिच्छेदं करोति ?

(b) किं द्व्यधिक-रेखाः एकस्मिन्नेव बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति ?

4.6 समानान्तर-रेखाः

आयान्तु, आकृतिः 4.6 इत्यस्यां दर्शिताम् उत्पीठिकां पश्यन्तु । अस्य उपरितनः प्रान्तभागः ABCD समः अस्ति । किं भवन्तः अन्यान् रेखाखण्डान् अथवा बिन्दून् पश्यन्तः सन्ति ? किम् अत्र प्रतिच्छेदिरेखाः सन्ति ?



आकृतिः 4.6

आम्, $\overleftrightarrow{AB}$ अपि च $\overleftrightarrow{BC}$, बिन्द्वोः B इत्यस्य उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः । काः रेखाः A उपरि प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति ? काः रेखाः C उपरि प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति ? काः रेखाः D उपरि प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति ?

किं रेखे AD अपि च CD परस्परं प्रतिच्छेदं कुरुतः ?

किं रेखे AD अपि च BC परस्परं प्रतिच्छेदं कुरुतः ?

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् उत्पीठिकायाः उपरि काश्चन रेखाः सन्ति याः परस्परं प्रतिच्छेदं न कुर्वन्ति (ताः यथेच्छं वर्धयितुं शक्यते) । AD अपि च BC एतादृशरेखानां एकं युग्मं कुरुतः । उत्पीठिकायाः उपरितनप्रान्ते किं भवन्तः कमपि एतादृशं रेखायाः युग्मं (याः कुत्रापि न स्पर्शन्ति) वक्तुं शक्नुवन्ति ?

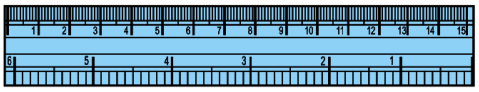
एतादृश-रेखाः (यथा उत्पीठिकायाः उपरि अस्ति) याः प्रतिच्छेदं न कुर्वन्ति ताः **समानान्तर-रेखाः** इत्युच्यन्ते ।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु ।

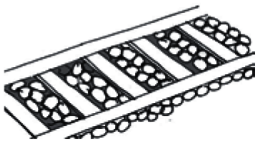
भवन्तः समानान्तररेखाः अन्यत्र कुत्र पश्यन्ति ? अस्य 10 उदाहरणानि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

यदि द्वे रेखे AB अपि च CD समानान्तरे स्तः तर्हि वयम् इमे साङ्केतिकरूपेण $AB \parallel CD$ इत्थं लिखामः ।

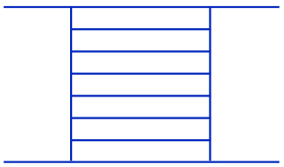
यदि द्वे रेखे I_1 अपि च I_2 समानान्तरे स्तः तर्हि वयं $I_1 \parallel I_2$ इति लिखामः।
किं भवन्तः अधोलिखित-आकृतिषु समानान्तर-रेखाः वक्तुं शक्नुवन्ति ?



मापिकायाः सम्मुख-तटौ



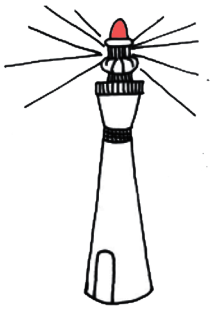
रेल्-मार्गः



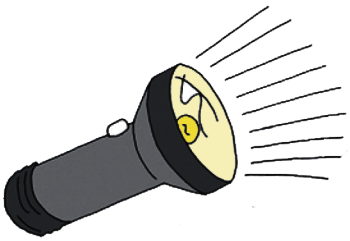
गवाक्षस्य शलाके

4.7 किरणः

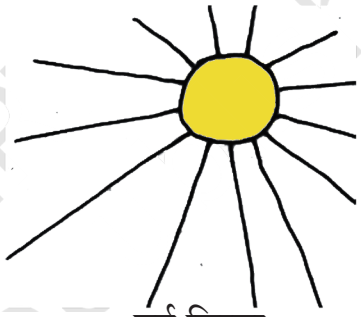
किरणस्य कृते काश्चन प्रतिकृतयः अधोलिखिताः सन्ति।



एकस्मात् प्रदीपगृहात्
निस्सरन्तः प्रकाशकिरणाः



करदीपतः निस्सृतः
प्रकाश-किरणाः



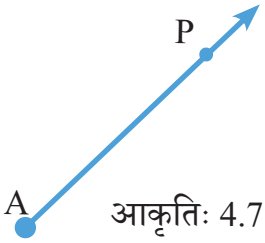
सूर्य-किरणाः

किरणः रेखायाः एकः भागः अस्ति। एषः एकस्मात् बिन्दोः प्रारभते (यं प्रारम्भ-बिन्दुः इति कथयामः)। अपि च एकस्यां दिशि अन्त्यं विना विस्तृतः भवति। अत्र किरणस्य दत्ताकृतिं (आकृतिः 4.7) पश्यन्तु। अस्मिन् किरणे बिन्दुद्वयम् अस्ति। तौ अपि च स्तः –

(a) A, यः प्रारम्भिकः बिन्दुः अस्ति।

(b) P, यः किरणे एकः अन्यः बिन्दुः अस्ति।

अमुं वयं AP इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः।



आकृतिः 4.7

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

यदि $\overleftrightarrow{PQ}$ एकः किरणः अस्ति, तर्हि

(a) अस्य प्रारम्भिक-बिन्दुः कः अस्ति ?

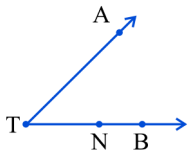
(b) बिन्दुः Q किरणे कुत्र भवति ?

(c) किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् Q अस्य किरणस्य प्रारम्भिक-बिन्दुः अस्ति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

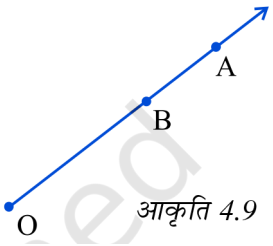
1. पुरतः दत्ताकृतौ (आकृतिः 4.8) दर्शितकिरणानां नाम लिखन्तु।

2. किं T सर्वकिरणानां प्रारम्भिकबिन्दुः अस्ति ?



आकृति 4.8

संलग्नाकृतौ 4.9 इत्यत्र एकः किरणः OA इति दत्तः। एषः O तः प्रारभते अपि च A प्रविश्य गच्छति। एषः किरणः B बिन्दुमपि प्रविश्य गच्छति।



आकृति 4.9

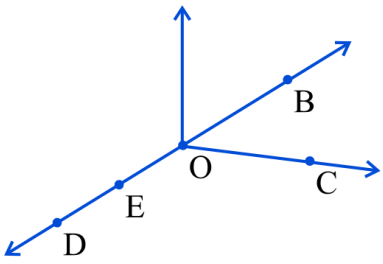
किं भवन्तः अमुं $\overleftrightarrow{OB}$ इत्यपि वक्तुं शक्नुवन्ति। किमर्थम् ?

अत्र $\overleftrightarrow{OA}$ अपि च $\overleftrightarrow{OB}$ एकमेव किरणं दर्शयतः। किं वयं किरणं $\overleftrightarrow{OA}$ इत्येतं किरणः $\overleftrightarrow{AO}$ इति लेखितुं शक्नुमः ? किमर्थं शक्नुमः अथवा किमर्थं न ?

पञ्च-किरणान् आलिखन्तु अपि च तेषां कृते नामाङ्कनं कुर्वन्तु। एतेषां किरणानां प्रान्तभागे विद्यमानः शरः किं दर्शयति ?

अभ्यासः 4.1

1. संलग्नाकृतिम् उपयुज्य अधोलिखितस्य नाम लिखन्तु।



   (a) पञ्च-बिन्दवः

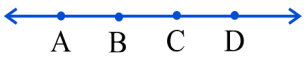
   (b) एका रेखा

   (c) चत्वारः किरणाः

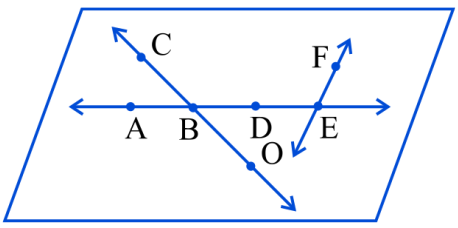
   (d) पञ्च-रेखाखण्डाः

2. संलग्नाकृतौ दत्तरेखायाः सर्व-सम्भवनीय-प्रकाराणां नाम लिखन्तु।

   भवन्तः चतुर्षु बिन्दुषु कमपि बिन्दुं प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति।



3. संलग्नाकृतिं दृष्ट्वा नाम लिखन्तु।



   (a) रेखाः यत्र बिन्दुः E सम्मिलितः अस्ति।

   (b) A प्रविश्य गम्यमाना रेखा

   (c) सा रेखा यस्यां O स्थितः अस्ति

   (d) प्रतिच्छेदिरेखायाः युग्मद्वयम्

4. अधोलिखितेषु प्रविश्य कति रेखाः आलेखिताः भवन्ति ?

   (a) एकः बिन्दुः (b) द्वौ बिन्दू

5. अधोलिखितासु स्थितिषु प्रत्येकं एकां सामान्याकृतिं रचयन्तु अपि च उचित-रूपेन तासां नामाङ्कनं कुर्वन्तु।

(a) बिन्दुः P रेखाखण्डे AB उपरि स्थितः अस्ति।

(b) रेखे XY अपि च PQ बिन्दोः M उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः।

(c) रेखा I अस्याः उपरि E अपि च F स्थितौ स्तः, परन्तु D स्थितः नास्ति।

(d) OP अपि च OQ बिन्दोःO उपरि स्पृशतः।

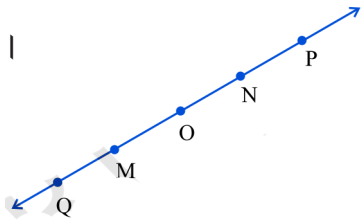
6. रेखा MN इत्यस्याः संलग्नाकृतिं पश्यन्तु भवन्तः। अस्याः आकृतेः सन्दर्भे वदन्तु यत् अधोलिखितं कथनं सत्यम् अथवा असत्यम् इति।

(a) Q, M, O, N अपि च P रेखायाः $\overleftrightarrow{MN}$ इत्यस्याः उपरि विद्यमानबिन्दवः सन्ति।

(b) M, O अपि च N रेखाखण्डस्य $\overleftrightarrow{MN}$ इत्यस्योपरि स्थितबिन्दवः सन्ति।

(c) M अपि च N रेखाखण्डस्य $\overleftrightarrow{MN}$ इत्यस्य अन्तिम-बिन्दू स्तः।

(d) O अपि च N रेखाखण्डस्य $\overrightarrow{OP}$ इत्यस्य अन्तिम-बिन्दू स्तः।



(e) M रेखाखण्डस्य $\overline{QO}$ इत्यस्य द्वयोः अन्त्यबिन्द्वोः मध्ये एकः बिन्दुः अस्ति।

(f) M किरणस्य $\overrightarrow{OP}$ इत्यस्योपरि स्थितः एकः बिन्दुः अस्ति।

(g) किरकौ $\overrightarrow{OP}$, किरणः $\overrightarrow{QP}$ इत्यनेन भिन्नः अस्ति।

(h) किरणः $\overrightarrow{OP}$ सः एव अस्ति यः किरणः $\overrightarrow{OM}$ अस्ति।

(i) किरणः $\overrightarrow{OM}$ किरणात् $\overrightarrow{OP}$ तः विरुद्धः नास्ति।

(j) O, किरणः $\overrightarrow{OP}$ इत्यस्य प्रारम्भिकः बिन्दुः अस्ति।

(k) N, किरणस्य $\overrightarrow{NP}$ इत्यस्य अपि च किरणस्य $\overrightarrow{NM}$ इत्यस्य प्रारम्भिकः बिन्दुः अस्ति।

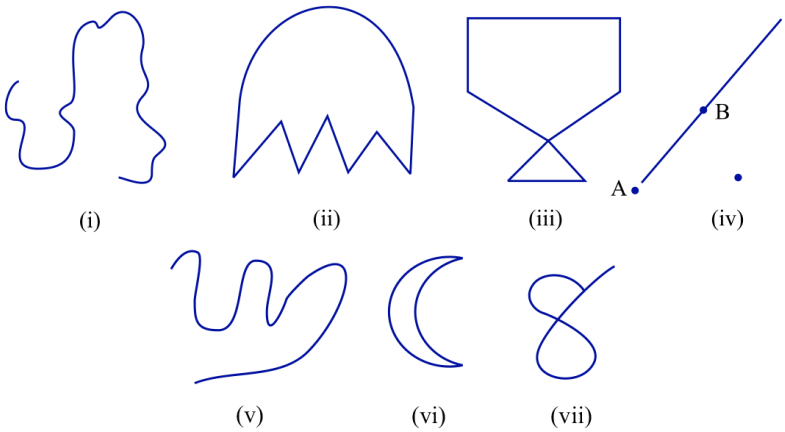
4.8 वक्रः

किं भवन्तः यदा कदापि कर्गदस्योपरि अङ्कन्याः द्वारा तिर्यक् रेखाः आलेखितवन्तः ? अपि च करणेन याः आकृतयः प्राप्यन्ते ताः वयं **वक्राः** इति वदामः।

एतासु भवन्तः काश्चन आकृतीः अङ्कनीं पौनःपुन्येण उत्थापनेन विना अपि च मापिकायाः प्रयोगेन विना एव आलेखितुं शक्नुवन्ति। एताः सर्वाः आकृतयः वक्राः सन्ति (आकृतिः 4.10)।

सामान्य भाषायां वक्रस्य अर्थः अस्ति ऋजुः नास्ति इति। गणिते तु वक्रः ऋजुः अपि भवितुं शक्नोति यथा चित्रे दर्शितः वर्तते [आकृतिः 4.10 (iv)]।

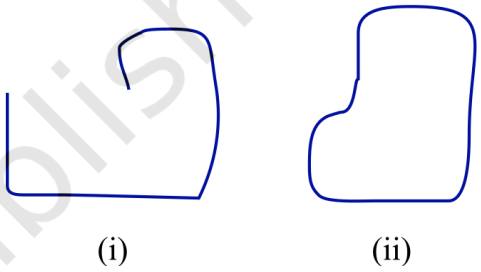
अवधानं यच्छन्तु यत् आकृतिः 4.10 इत्यत्र वक्राः (iii) अपि च (vii) स्वयं स्वस्य कर्तनं कुर्वन्ति तथा च (i), (ii) अपि च (vi) इत्यत्र वक्राः स्वयं स्वस्य कर्तनं न कुर्वन्ति। यदि कोऽपि वक्रः स्वयं न कर्तयति सः **वक्रः सरलः वक्रः** इति उच्यते।



पञ्च-सरलवक्रान् अपि च पञ्च-असरलवक्रान् आलिखन्तु।

अधुना अत्र पश्यन्तु (आकृतिः 4.11)।

संलग्नाकृतौ (आकृतिः 4.11) इत्यत्र दत्त-द्वयोः वक्रयोः मध्ये किम् अन्तरम् अस्ति ? प्रथमः अर्थात् आकृतिः 4.11 (i) वक्रः एकः उद्घाटितः वक्रः अस्ति। अपि च द्वितीयः अर्थात् आकृतिः 4.11 (ii) एकः पिहितः वक्रः अस्ति। किं भवन्तः आकृतौ 4.10 (i), (ii), (v) अपि च (vi) इत्यत्र उद्घाटितम् पिहितं च वक्रं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

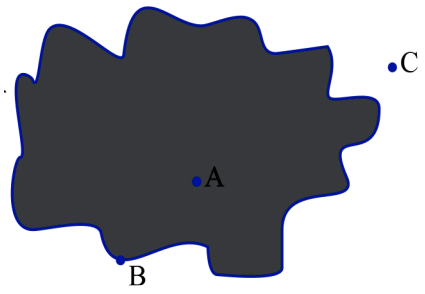


एकस्याम् आकृतौ स्थितयः

एकस्मिन् टेनिस्-क्रीडाङ्गणे क्रीडाङ्गण-रेखा तत् क्रीडाङ्गणं भागत्रये विभाजयति। ते च भागाः इत्थं सन्ति रेखायाः एकतः, रेखायाम् अपि च रेखायाः अपरतः। भवन्तः एकतः अन्यत्र रेखायाः प्रवेशेन विना गन्तुं न पारयन्ति।

भवतां गृहस्य सीमा गृहं मार्गतः पृथक्करोति। भवन्तः परिसरस्य अन्तः, सीमाभित्तेः परिसीमा अपि च परिसरस्य बहिः इत्यादिविषये वदन्ति।

अनेन प्रकारेण एकेन बन्धवक्रेण सम्बन्धितं भागत्रयं भवति यत् एकम् अन्यस्मात् पृथक्भवति।



(i) वक्रस्य अन्तस्थभागः

(ii) वक्रस्य परिसीमा

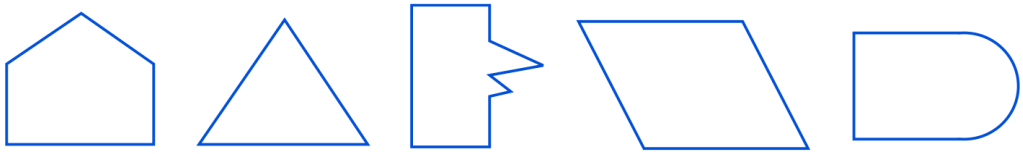
(iii) वक्रस्य बहिर्भागः

सम्मुखाकृतौ 4.12 इत्यत्र A वक्रस्य अन्तः अस्ति, C वक्रस्य बहिर्भागे अस्ति अपि च B स्वयं परिसीमायाः उपरि अस्ति।

वक्रस्य अन्तर्भागं तस्य परिसीमां योजयित्वा तस्य वक्रस्य क्षेत्रम् इति वदामः।

4.9 बहुभुजः

अधः दत्ताकृत्यः 4.13 (i), (ii), (iii), (iv) अपि च (v) एताः पश्यन्तु।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

भवन्तः दर्शिताकृतीनां विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? किम् एताः पिहित-आकृतयः सन्ति ? आकृतिः परस्परं कथं भिन्ना अस्ति ? आकृतिः 4.13 (i), (ii), (iii) अपि च (iv) इत्येताः विशेषाः आकृतयः सन्ति। यतो हि एताः केवलं रेखाखण्डैः निर्मिताः सन्ति। एतादृशाः आकृतयः **बहुभुज** इति रूपेण कथ्यन्ते। अतः काचित् आकृतिः बहुभुजा भवति यावत्पर्यन्तं सा काचित् सरलबद्धा आकृतित्वेन स्यात् अपि च केवलं रेखाखण्डैः एव निर्मिता स्यात्। एताः वयं बहुभुजः इति वदामः। दशानां पृथक् पृथक् आकृतियुक्तानां बहुभुजानां निर्माणं कुर्वन्तु।

एतानि सम्पादयन्तु।

अधोलिखितैः सह बहुभुजम् रचयितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु

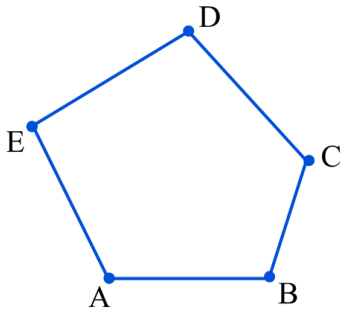
1. पञ्च-अग्निशलाकाः
2. चतस्रः अग्निशलाकाः
3. तिस्रः अग्निशलाकाः
4. द्वे अग्निशलाके

कस्मिन् सन्दर्भे अस्य सम्भवनीयता नास्ति ? किमर्थम् ?

भुजाः, शीर्षकम् अपि च विकर्णः

संलग्नाकृतिं 4.14 पश्यन्तु। अमुं बहुभुजः इति वक्तुं कानिचन कारणानि ददतु। एकस्य बहुभुजस्य निर्माणं कुर्वाणाः रेखाखण्डाः तस्य भुजाः इत्युच्यन्ते।

बहुभुजस्य ABCDE इत्यस्य भुजानां नाम किमस्ति ?
(अवधानं ददतु यत् कोणान् कस्मिन् क्रमे योजयित्वा बहुभुजस्य नाम लिखितं वर्तते इति।)



अस्य भुजाः $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ अपि च $\overline{EA}$ सन्ति।

द्वौ भुजौ यत्र मिलतः तं बिन्दुं वयं बहुभुजस्य शीर्षबिन्दुः इति रूपेण वदामः।

भुजौ $\overline{AE}$ अपि च $\overline{ED}$ बिन्दौ E इत्यत्र मिलतः, अतः E बहुभुजस्य ABCDE इत्यस्य शीर्षकत्वेन अस्ति। B अपि च C अस्य अन्य-शीर्षकद्वयम् अस्ति। किं भवन्तः एतेषु बिन्दुषु मेलिष्यमाण-भुजानां नाम लेखितुं शक्नुवन्ति ?

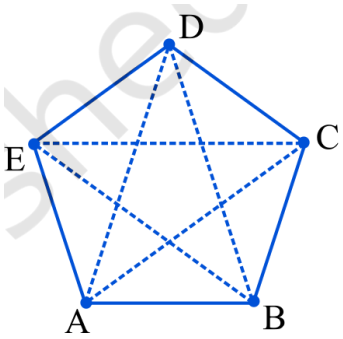
किं भवन्तः दर्शितस्य ABCDE इत्यस्य बहुभुजस्य अन्येषां शीर्षकानां नाम लेखितुं शक्नुवन्ति ?

कौ अपि द्वौ भुजौ ययोः एकः उभयनिष्ठः बिन्दुः भवेत् ते **आसन्नभुजौ इति** उच्येते।

किं AB अपि च BC आसन्नभुजौ स्तः ? भवन्तः AE अपि च DC अनयोः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

बुहुभुजस्यएकस्य एव भुजस्य अन्त्यबिन्दू **आसन्नशीर्षत्वेन** स्तः। शीर्षकं E अपि च D आसन्नशीर्षके स्तः, यत्र शीर्षकं A अपि च D आसन्नशीर्षके न स्तः। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति किमर्थमिति ?

तानि शीर्षकानि स्वीकुर्वन्तु यानि आसन्नशीर्षकानि न सन्ति। एतादृशानां शीर्षकानां मेलनेन निर्मित-रेखाखण्डं बहुभुजस्य **विकर्णः** इति वदामः।



संलग्नाकृतौ रेखाखण्डाः $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ अपि च $\overline{CE}$ बहुभुजस्य विकर्णाः सन्ति।

किं रेखाखण्डः $\overline{BC}$ एकः विकर्णः अस्ति ? किमर्थम् अथवा किमर्थं न ?

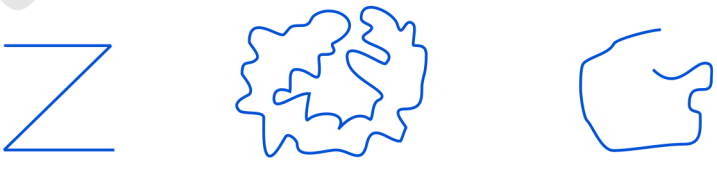
किं भवन्तः आसन्नशीर्षकान् योजयित्वा विकर्णं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

आकृत्याः ABCDE (आकृतिः 4.15) इत्यस्याः सर्वेषां भुजानाम्, आसन्नभुजानाम्, आसन्नशीर्षकानां नाम लिखन्तु।

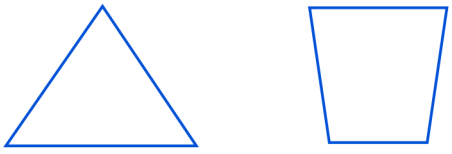
एकं बहुभुजं ABCDEFGH निर्मान्तु अपि च तस्य सर्वेषां भुजानाम् आसन्नभुजानां तथा शीर्षकेन सह विकर्णानां नाम लिखन्तु।

अभ्यासः 4.2

1. अधः दत्तानां वक्राणां (i) उद्घाटित-वक्रः (ii) पिहित-वक्रः इति रूपेण वर्गीकरणं कुर्वन्तु।



(a) (b) (c)



(d) (e)

2. अधोलिखितान् स्पष्टयितुं सामान्याकृतिं रचयन्तु।

   (a) उद्घाटित-वक्रः (b) पिहित-वक्रः

3. कमपि बहुभुजं रचयन्तु अपि च तस्य अन्तर्भागं छायाङ्कितं कुर्वन्तु।

4. संलग्नाकृतिं दृष्ट्वा अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं ददतु।

   (a) किम् एषः एकः वक्रः ?

   (b) किं एषः एकः पिहितः ?

5. सामान्याकृतिं रचयित्वा यदि अपेक्षा अस्ति तर्हि अधोलिखितान् स्पष्टयन्तु।

   (a) एकः पिहितः वक्रः यः बहुभुजः नास्ति।

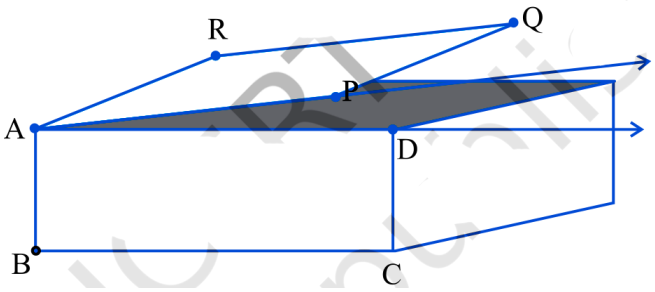
   (b) केवलं रेखाखण्डैः निर्मित उद्घाटितः वक्रः।

   (c) द्वाभ्यां भुजाभ्यां सहितः कश्चन बहुभुजः।

4.10 कोणः

यदा कोणाः भवन्ति तदा कोणाकृतेः निर्माणम् अपि भवति।

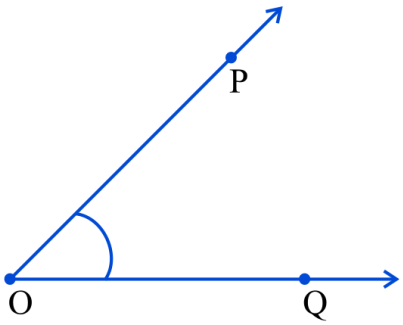
अत्र एका आकृतिः 4.16 दत्ता अस्ति, यत्र एकस्याः मञ्जूषायाः उपरितनः प्रान्तभागः पिञ्जयुक्त-द्वारम् इव अस्ति। मञ्जूषायाः तटः AD अपि च द्वरस्य तटः AP अनयोः $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AP}$ इति द्वयोः किरणयोः रूपेण कल्पनां कर्तुं शक्यते। द्वयोः अपि किरणयोः एकः उभयनिष्ठः अन्त्यबिन्दुः A अस्ति, एतदुच्यते यत् द्वौ एतौ करणौ एकं कोणं निर्मीतः इति।



उभयनिष्ठ-प्रारम्भिकबिन्दुभ्यां एकः कोणः भवति।

कोणं रचयितुं यौ किरणौ सायाय्यं कुरुतः तौ तस्य भुजौ इति वदामः। उभयनिष्ठ-प्रारम्भिक-बिन्दुः कोणस्य शीर्षभागः इत्युच्यते।

संलग्नाकृतौ किरणाभ्यां $\overleftrightarrow{OP}$ अपि च $\overleftrightarrow{OQ}$ इत्याभ्यां निर्मितः एकः कोणः दर्शितः अस्ति। कोणं दर्शयितुं शीर्षके एकस्य लघुवक्रस्य प्रयोगः कृतः। O अस्य कोणस्य शीर्षकम् अस्ति। अस्य कोणस्य भुजौ कौ ? किम् एतौ किरणौ $\overleftrightarrow{OP}$ अपि च $\overleftrightarrow{OQ}$ न स्तः ?

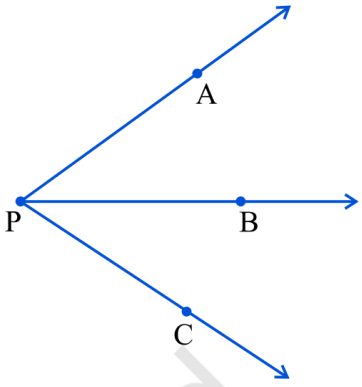


अमुं कोणं वयं केन प्रकारेण नामाङ्कितं कर्तुं शक्नुमः ? वयम् इत्थमपि वक्तुं शक्नुमः यत् एषः O इत्यस्योपरि एकः कोणः अस्ति एवम् अधिकविशिष्टार्थं वयं कोणस्य द्वाभ्यां भुजाभ्यां एकम् एकं

बिन्दुं स्वीकृत्य अपि च तस्य शीर्षकं स्वीकृत्य कोणस्य नाम लिखामः । अनेन प्रकारेण अमुं कोणं, कोणः POQ इति नाम दद्मः । वयं एतद् ∠POQ इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः ।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु ।

संलग्नाकृतिं 4.18 पश्यन्तु । अस्य कोणस्य नाम किम् ? किं वयम् अमुं ∠P इति वक्तुं शक्नुमः ? परन्तु कं कोणं वयं ∠P इति वदामः ? ∠P इत्यनेन अस्माकं तात्पर्यं किम् ?



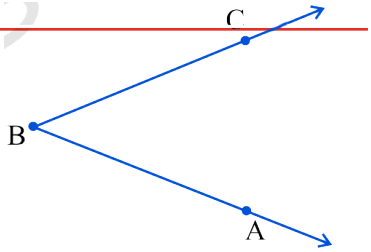
किम् एकं कोणं केवलं तस्य शीर्षकद्वारा नामाङ्कनकरणम् अत्र सहायकं भवति ? किमर्थं न ?

∠P इत्यस्यार्थः अत्र ∠APB अथवा ∠CPB अथवा ∠APC इति भवितुं शक्यते । अतः अत्र इतोऽपि सूचनायाः आवश्यकता अस्ति ।

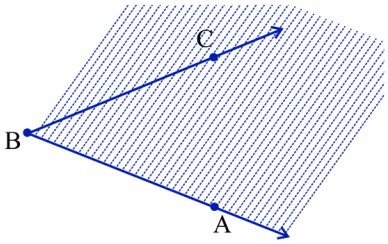
अवधानं ददतु यत् कोणलेखन-समये तस्य शीर्षकस्य अक्षरं सदैव मध्ये लिखितं भवति ।

एतत् कुर्वन्तु

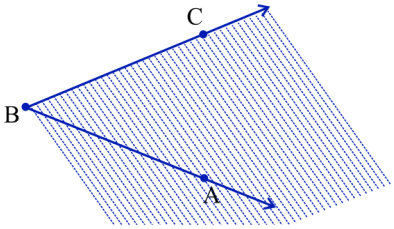
∠ABC इति कमपि कोणं स्वीकुर्वन्तु ।



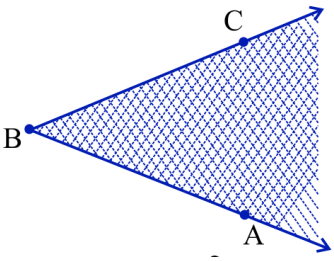
$\overleftrightarrow{BA}$ इति परिसीमां स्वीकृत्य तद्भागं $\overleftrightarrow{BC}$ इत्यस्य अभिमुखं छायाङ्कितं कुर्वन्तु ।



अधुना $\overleftrightarrow{BC}$ इति परिसीमां स्वीकृत्य अन्येन वर्णेन तद्भागं $\overleftrightarrow{BA}$ इत्यस्य अभिमुखं छायाङ्कितं कुर्वन्तु ।

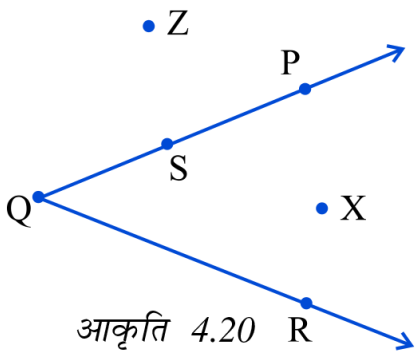


द्वयोः अपि प्रकारयोः छायाङ्कितभागे उभयनिष्ठः भागः ∠ABC इत्यस्य अन्तः अस्ति (आकृतिः 4.19)।



(अवधानं ददतु यत् अन्तर्भागः एकं सीमितं क्षेत्रं नास्ति । एतत् अनिश्चितरूपेण विस्तृतः अस्ति यतो हि कोणस्य द्वौ अपि भुजौ अनिश्चितरूपेण स्वाभिमुखे विस्तृतौ वर्तेते ।

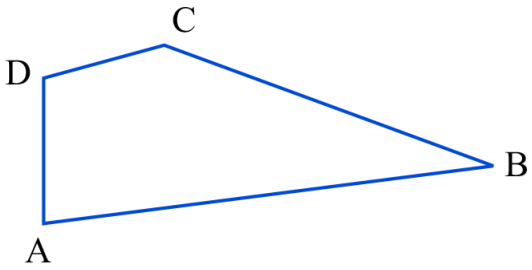
संलग्नाकृतौ 4.20 इत्यत्र X कोणस्य अन्तर्भागे स्थितः अस्ति । Z कोणस्य अन्तः स्थितः न अस्ति । एषः कोणस्य बहिर्भागे स्थितः अस्ति । बिन्दुः S स्वयं ∠PQR इत्यस्य उपरि स्थितः अस्ति । अतः कोणेन सम्बन्धितानि अपि त्रीणि क्षेत्राणि भवन्ति ।



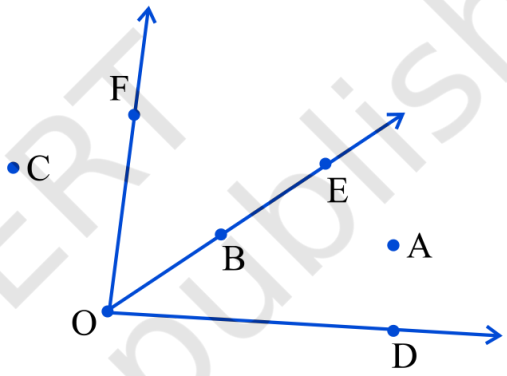
आकृति 4.20

अभ्यासः 4.3

1. अधोलिखितायाम् आकृतौ कोणानां नाम लिखन्तु ।



2. संलग्नाकृतौ तान् बिन्दून् लिखन्तु ये –
   (a) ∠DOE इत्यस्य अन्तः स्थिताः सन्ति ।
   (b) ∠EOF इत्यस्य बहिर्भागे स्थिताः सन्ति ।
   (c) ∠EOF उपरि सन्ति सन्ति ।

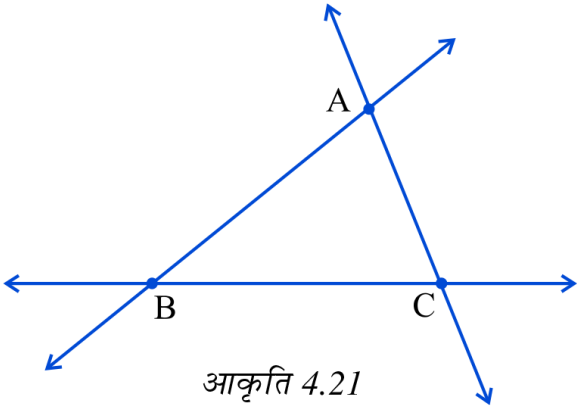


3. द्वयोः कोणयोः सामान्याकृतीः रचयन्तु याभिः –
   (a) तस्याम् एकः बिन्दुः उभयनिष्ठः भवेत् ।
   (b) तस्यां बिन्दुद्वयम् उभयनिष्ठं भवेत् ।
   (c) तस्यां त्रयः बिन्दवः भवेयुः ।
   (d) तस्यां चत्वारः बिन्दवः भवेयुः ।
   (e) तस्यां एकः किरणः उभयनिष्ठः भवेत् ।

4.11 त्रिभुजः

त्रिभुजः एकः भुजत्रयेण सहितः बहुभुजः भवति । वास्तवे तु एषः न्यूनतम-भुजेन सहितः बहुभुजः अस्ति ।

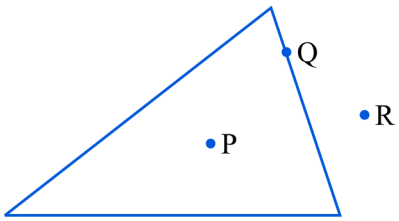
संलग्नाकृतौ 4.21 दत्तत्रिभुजं पश्यन्तु । वयं त्रिभुजस्य ABC इत्यस्य कृते साङ्केतिकरूपेण △ABC इति लिखामः । △ABC इत्यत्र कति भुजाः सन्ति ? अस्मिन् कति कोणाः सन्ति ?



आकृति 4.21

अस्य त्रिभुजस्य त्रयः भुजाः $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ अपि च $\overline{CA}$ अस्ति । अस्य त्रयः कोणाः सन्ति – △BAC, △BCA अपि च △ABC । बिन्दवः A,B अपि च C त्रिभुजस्य शीर्षकाः इति उच्यन्ते ।

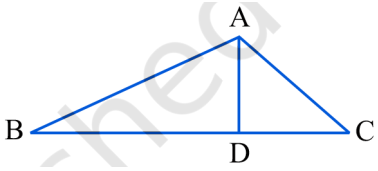
एकः बहुभुजः अस्ति इति कारणेन एकस्य त्रिभुजस्य एकः बर्हिभागः भवति एवम् एकः अन्तर्भागः भवति । संलग्नाकृतौ 4.22 इत्यत्र P त्रिभुजस्य अन्तर्भागे अपि च R त्रिभुजस्य बहिर्भागे अपि च Q स्वयं त्रिभुजे स्थिताः सन्ति।



अभ्यासः 4.4

1. त्रिभुजः ABC इत्यस्य एकं सामान्यं चित्रं रचयन्तु । अस्य त्रिभुजस्य अन्तः एकं बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु अपि च अस्य बहिः एकं बिन्दुं Q इति अङ्कितं कुर्वन्तु । किं बिन्दुः A अस्य अन्तः स्थितः अस्ति अथवा बहिः स्थितः अस्ति ?

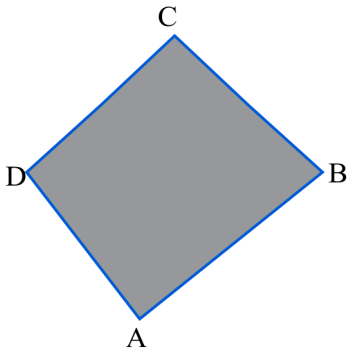
2. (a) संलग्नाकृतौ त्रयाणां त्रिभुजानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु।
   (b) सप्त-कोणानां नाम लिखन्तु।
   (c) अस्यामेव आकृतौ षड्-कोणानां नाम लिखन्तु।
   (d) कयोः द्वयोः त्रिभुजयोः $\angle B$ उभयनिष्ठः अस्ति ?

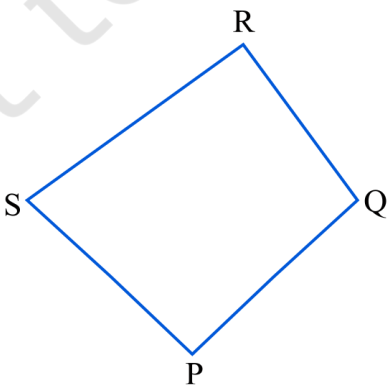


4.12 चतुर्भुजः

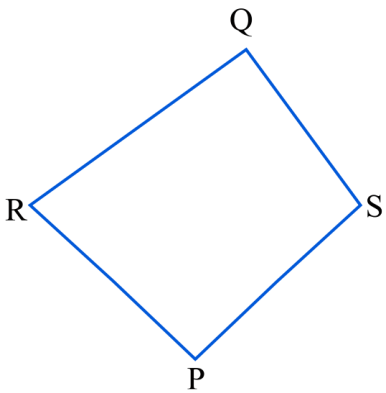
चतुर्भिः भुजैः सहितः बहुभुजः चतुर्भुजः इति वदामः । अस्य चतुर्भुजाः अपि च चत्वारः कोणाः भवन्ति । यथा एकस्य त्रिभुजस्य अन्तर्भागः वर्तते तथैव अस्यापि अन्तर्भागं द्रष्टुम् अर्हन्ति।

चतुर्भुजस्य ABCD (आकृतिः 4.23) चत्वारः भुजाः AB BC CD अपि च DA सन्ति। अस्य चत्वारः कोणाः $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ अपि च $\angle D$ सन्ति।





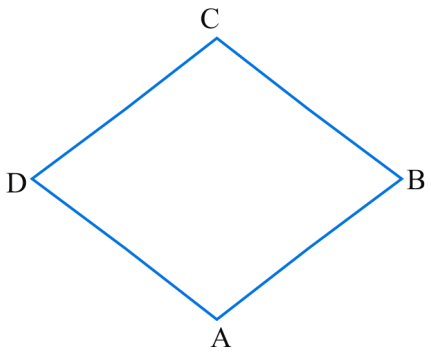
एषः चतुर्भुजः PQRS अस्ति।



किम् एषः चतुर्भुजः PQRS अस्ति ?

ABCD इत्यस्मिन् चतुर्भुजे इत्यत्र AB अपि च BC आसन्नभुजौ स्तः । किं भवन्तः आसन्नभुजयोः अन्ययुग्मयोः नाम लेखितुं शक्नुवन्ति ?

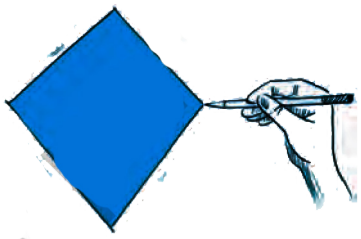
अस्मिन् चतुर्भुजे AB अपि च DC **सम्मुखभुजौ स्तः** । सम्मुखभुजयोः अन्ययुग्मयोः नाम लिखन्तु ।



∠A अपि च ∠C चतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य **सम्मुखकोणौ** इत्युच्येते । अनेन प्रकारेण ∠D अपि च ∠B अपि सम्मुखकोणौ स्तः । स्वाभाविकम् अस्ति यत् ∠A अपि च ∠B **आसन्नकोणौ** स्तः । इदानीं भवन्तः आसन्नकोणानाम् अन्ययुग्मौ लेखितुं शक्नुवन्ति ।

अभ्यासः 4.5

1. चतुर्भुजस्य PQRS इत्यस्य एकं सामान्यचित्रं रचयन्तु । अस्य विकर्णम् आलिखन्तु । अस्य नाम लिखन्तु । किं विकर्णस्य प्रतिच्छेदबिन्दुः चतुर्भुजस्य अन्तः अस्ति अथवा बहिः अस्ति ?



2. चतुर्भुजस्य KLMN इत्यस्य एकं सामान्यं चित्रम् आलिखन्तु । वदन्तु –
   (a) सम्मुखभुजानां द्वौ युग्मौ
   (b) सम्मुखकोणानां द्वौ युग्मौ
   (c) आसन्नभुजानां द्वौ युग्मौ
   (d) आसन्नकोणानां द्वौ युग्मौ
3. **अन्वेषणं कुर्वन्तु ।**
   पट्टिकाः अपि च तासां बन्धनार्थं वस्तूनि स्वीकृत्य एकं त्रिभुजं निर्मान्तु तथा च एकं चतुर्भुजं निर्मान्तु । त्रिभुजस्य कस्यापि एकस्य शीर्षकस्य उपरि पट्टिकाः अन्तर्भागे इतोऽपि नोदितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । इदमेव कार्यं चतुर्भुजस्य कृते अपि कुर्वन्तु । किं त्रिभुजे किमपि परिवर्तनम् आगतम् ? किं चतुर्भुजे किमपि परिवर्तनम् आगतम् । किं त्रिभुजः एका दृढाकृतिः अस्ति ? किं कारणं स्यात् यत् विद्युद्स्तम्भ-सदृशेषु संरचनेषु त्रिभुजीय-आकाराणां प्रयोगं कुर्वन्ति ? चतुर्भुजं किमर्थं न कुर्वन्ति ?

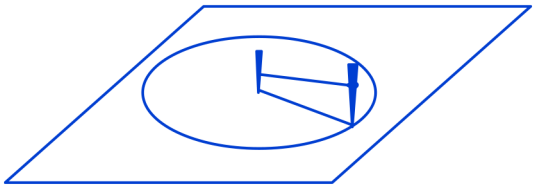
4.13 वृत्तः

भवन्तः स्व-पर्यावरणे अनेकानि वस्तूनि प्राप्नुवन्ति यानि गोलाकाराणि भवन्ति । यथा चक्र, वलयं, नाणकम् इत्यादीनि । वयम् अनेकप्रकारेण गोलाकारस्य प्रयोगं कुर्मः । कस्यचित् भारयुक्तस्य स्टील्-निर्मितस्य गोलाकारवस्तुनः आकर्षणापेक्षया उत्थापनस्य वा अपेक्षया तस्य चक्रत्वेन चालनम् अपकर्षणं वा बहुसरलं भवति ।

वृत्तः एकः सरल-पिहित-वक्रः अस्ति यः एकः बहुभुजः नास्ति । अस्यापि केचन विशिष्टाः गुणाः सन्ति ।

एतत् कुर्वन्तु

- एकं वलयम् अथवा किमपि गोलाकारं वस्तु स्वीकृत्य कर्गदस्योपरि स्थापयन्तु अपि च तत् परितः अङ्कनीं भ्रामयित्वा एकां वृत्ताकृतिं कुर्वन्तु।



- यदि भवतां कृते एकं वृत्ताकारकम् उद्यानं निर्मातव्यम् अस्ति चेत् तर्हि भवन्तः किं कुर्वन्ति ?

दण्डद्वयम् अपि च एकं रज्जुं स्वीकुर्वन्तु। एकं दण्डं भूमौ स्थापयन्तु। एषः आलेख्यमानस्य वृत्तस्य केन्द्रः अस्ति। रज्जोः प्रान्तद्वये अपि प्रत्येकमेकां ग्रन्थिं कुर्वन्तु। एकां ग्रन्थिं केन्द्र-दण्डे स्थापयन्तु। एकां च अन्यस्मिन् दण्डे स्थापयन्तु। अपि च दण्डद्वयं भूमेः ऊर्ध्वाधरं स्थापयन्तु। रज्जुं दृढं गृहीत्वा भूमौ द्वितीयदण्डं भ्रामयित्वा एकस्य पथस्य निर्माणं कुर्वन्तु। भवन्तः एकं वृत्तं प्राप्नुवन्ति।

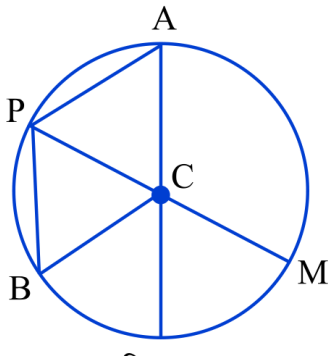
स्वाभाविकम् अस्ति यत् वृत्तस्योपरि स्थितः प्रत्येकं बिन्दुः केन्द्रेण समाने दूरे अस्ति।

वृत्तस्य भागाः

संलग्नाकृतौ 4. 24 इत्यस्यां केन्द्रः C इति एकः वृत्तः अस्ति।

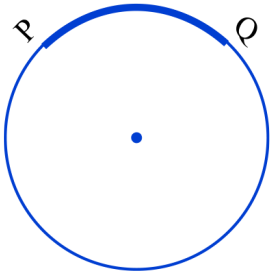
A,P,B,M वृत्तस्योपरि स्थिताः केचन बिन्दवः सन्ति। भवन्तः

पश्यन्ति यत् CA = CB = CP = CM अस्ति।



प्रत्येकं रेखाखण्डः $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CP}$ अथवा $\overline{CM}$ वृत्तस्य एका **त्रिज्या** अस्ति। त्रिज्या सा रेखाखण्डरूपा भवति या वृत्तस्योपरि स्थितं बिन्दुं केन्द्रेण सह योजयति। अस्याम् एव आकृतौ $\overline{CP}$ अपि च $\overline{CM}$ एतादृश्यौ त्रिज्ये स्तः यत् बिन्दवः P, C, M एकस्यां रेखायाम् अस्ति। रेखाखण्डः $\overline{PM}$, वृत्तस्य एकः **व्यासः** इत्युच्यते।

किं वृत्तस्य व्यासः तस्य त्रिज्यायाः द्विगुणः अस्ति ? आम्। वृत्तस्योपरि स्थितबिन्दुद्वयं यः रेखाखण्डः योजयति तं **जीवा** इति वदामः।

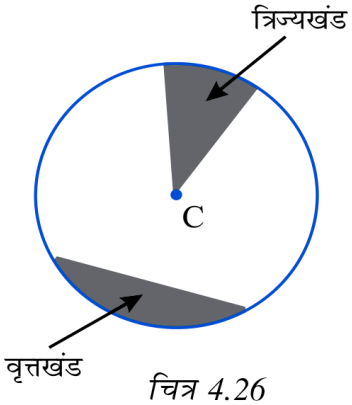


अनेन प्रकारेण PB वृत्तस्य एकः जीवः अस्ति। किं $\overline{PM}$ अपि वृत्तस्य एकः जीवः अस्ति ?

वृत्तस्य एकः भागः तस्य चापः इत्युच्यते। यदि P अपि च Q वृत्ते स्थितौ बिन्दू स्तः तर्हि भवतां कृते चापः PQ प्राप्यते। वयं अमुं $\overset{\frown}{PQ}$ इति व्यक्तीकुर्मः (आकृतिः 4.25)।

कोऽपि सरल-पिहित-वक्रः इव भवन्तः एकस्य **वृत्तस्य अन्तः** अपि च **बहिर्भागस्य** विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति। वृत्तीय-क्षेत्रस्य सः भागः यः द्वे त्रिज्ये अपि च चापेन परिवृत्य रचितो

भवति अपि च एकः **त्रिज्याखण्डः** इत्युच्यते । वृत्तस्य एकः जीवः अपि च सङ्गतचापेन परिवृतः वित्तीय क्षेत्रस्य भागः एकः **वृत्तखण्डः** इत्युच्यते ।



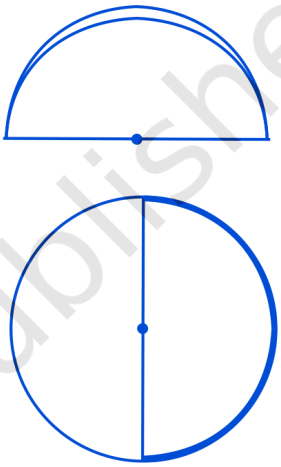
चित्र 4.26

कमपि गोलाकारं वस्तु स्वीकुर्वन्तु । एकं रज्जुं स्वीकुर्वन्तु अपि च तं तस्य वस्तुनः अनुदिशि एकवारं स्थापयित्वा रज्जोः लम्बं मापयन्तु । रज्जोः सः लम्बः वस्तु परितः एकवारं परिभ्रमयितुं स्वीकृतदूरम् अस्ति । एषः लम्बः किं व्यक्तीकरोति ?

वृत्तस्य अनुदिशि गतदूरं तस्य **परिधिः** इति वदामः ।

एतत् कुर्वन्तु

एकं वृत्तकारं पत्रं स्वीकुर्वन्तु । तत् पुटीकृत्वा अर्धद्वयं कुर्वन्तु । नोदित्वा पुटचिह्नं कुर्वन्तु अपि च पत्रम् उद्घाटयन्तु । किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वृत्तीयक्षेत्रं तस्य व्यासद्वारा द्वयोः अर्धभागयोः विभाजितम् अस्ति ? वृत्तस्य एकः व्यासः तं द्वयोः समानभागयोः विभाजनं करोति । प्रत्येकं भागः एकः अर्धवृत्तः इत्युच्यते ।

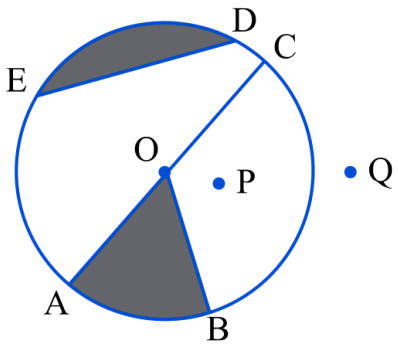


एकः अर्धवृत्तः वृत्तस्य अर्धभागः अस्ति । यस्मिन् वृत्तस्य व्यासः (स्वस्य अन्त्यबिन्दुं त्यक्त्वा) सम्मिलितः नास्ति ।

© NCERT not to be republished

अभ्यासः 4.6

1. संलग्नाकृतिं दृष्ट्वा लिखन्तु ।



   (a) वृत्तस्य केन्द्रः
   (b) तिस्रः त्रिज्याः
   (c) एकः व्यासः
   (d) एकः जीवः
   (e) अन्तः बिन्दुद्वयम्
   (f) बहिः एकः बिन्दुः
   (g) एकः त्रिज्याखण्डः
   (h) एकः वृत्तखण्डः

2. (a) किं वृत्तस्य प्रत्येकं व्यासः तस्य एकः जीवः अपि भवितुं शक्यते ?
   (b) किं वृत्तस्य प्रत्येकं जीवः तस्य एकः व्यासः अपि भवितुं शक्यते ?

3. कमपि वृत्तं रचयन्तु अपि च अधोदत्तान् अङ्कितान् कुर्वन्तु।

(a) तस्य केन्द्रम्
(b) एका त्रिज्या
(c) एकः व्यासः
(d) एकः त्रिज्यखण्डः
(e) एकः वृत्तखण्डः
(f) तस्य अन्तः एकः बिन्दुः
(g) तस्य बहिर्भागे कञ्चन बिन्दुः
(h) एकः चापः

4. सत्यम् अथवा असत्यम् इति वदन्तु।

(a) वृत्तस्य व्यासद्वयम् अवश्यं प्रतिच्छेदं करोति।
(b) वृत्तस्य केन्द्रः सदैव तस्य आभ्यन्तरे स्थितः भवति।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः

1. बिन्दुः एकां स्थितिं निर्धारयति। अमुं प्रायः आङ्लभाषायाः स्थूलाक्षरेण व्यक्तीकुर्वन्ति।
2. बिन्दुद्वयं योजयितुं समीपमार्गम् एकः रेखाखण्डः दर्शयति। बिन्दुं A अपि च B इत्याख्यं युज्यमानं रेखाखण्डं $\overline{AB}$ इत्यनेन दर्शयामः। $\overline{AB}$ अपि च $\overline{BA}$ इति द्वयमपि एकमेव रेखाखण्डं दर्शयति।
3. यदि एकं रेखाखण्डं यथा $\overline{AB}$ इत्याख्यं द्वयोः अपि दिशयोः विना कमपि अन्त्यं विस्तृतं कुर्मः तर्हि अस्माकं कृते एका रेखा लभ्यते। इमां $\overleftrightarrow{AB}$ इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः। इमां यदा कदापि I इत्यक्षरेणापि व्यक्तीकुर्मः।
4. द्वे विभिन्नरेखे यदा एका अन्यां कस्मिन्नपि बिन्दौ कर्तयति तर्हि ते प्रतिच्छेदिरेखे इति वदामः।
5. द्वे रेखे यावत्पर्यन्तम् एका अन्यां न कर्तयति तर्हि ते समानान्तर-रेखे इति वदामः।
6. किरणः रेखायाः एकः भागः भवति यः एकस्मात् बिन्दोः आरभ्य एकस्यां दिशि विना अन्त्यं विस्तृतः भवति।
7. कर्गजे अङ्कनीम् अनुत्थाप्य लिखिताकृतिं एकः वक्रः इति वदामः। अस्मिन् सन्दर्भे एका रेखा अपि एकः वक्रः भवति।
8. यदि कोऽपि वक्रः स्वं न कर्तयति तर्हि सः सरलवक्रः इति उच्यते।
9. एकः वक्रः यस्य प्रान्तः योजितः स्यात् तर्हि पिहितवक्रः इति वदामः अन्यथा तम् उद्घाटितवक्रः इति वदामः।
10. रेखाखण्डेभ्यः निर्मित पिहिताकृतिः बहुभुजः इति वदामः। यत्र-

(i) बहुभुजं ये रेखाखण्डाः निर्मान्ति ते तस्य भुजाः सन्ति।
(ii) कौ अपि द्वौ भुजौ ययोः एकः उभयनिष्ठः अन्त्यबिन्दुः अस्ति तौ आसन्नभुजौ इति उच्येते।
(iii) द्वौ भुजौ यत्र स्पृशतः तं बिन्दुं बहुभुजस्य शीर्षकौ इति उच्येते।

(iv) बहुभुजस्य एकस्य एव भुजस्य अन्त्यबिन्दुः आसन्नशीर्षकः इत्युच्यते।

(v) एतादृशाः शीर्षकाः ये आसन्नाः न सन्ति यत् तान् मेलयित्वा निर्मित-रेखाखण्डः बहुभुजस्य विकर्णः इत्युच्यते।

11. उभयनिष्ठ-प्रारम्भिक-बिन्दुयुक्ताभ्या द्वाभ्यां किरणाभ्यां एकः कोणः भवति।

द्वौ किरणौ $\overleftrightarrow{OA}$ अपि च $\overleftrightarrow{OB}$, $\angle AOB$ इति कोणं निर्मातः (अमुं $\angle BOA$ इत्यपि लेखितुं शक्नुमः)। कोणेन सम्बन्धितानि त्रीणि क्षेत्राणि सन्ति– कोणस्योपरि, कोणस्यान्तः, कोणस्य बहिः।

12. त्रिभुजः एकः त्रीभिः भुजैः युक्तः एकः बहुभुजः अस्ति।

13. चतुर्भिः भुजैः युक्तः एकः बहुभुजः चतुर्भुजः इत्युच्यते। अमुं शीर्षकाणाम् एकेन क्रमेण नामाङ्कनं कर्तव्यम् अस्ति।

कस्मिन्नपि चतुर्भुजे ABCD इत्याख्ये $\overline{AB}$ अपि च $\overline{DC}$ अपि च $\overline{AD}$ अपि च $\overline{BC}$ सम्मुखभुजानां युग्मौ स्तः। $\angle A$ अपि च $\angle C$ तथा $\angle B$ अपि च $\angle D$ सम्मुखकोणानां युग्मौ स्तः। $\angle A$ अपि च $\angle B$ आसन्नकोणौ स्तः। एवमेव आसन्नकोणानां त्रयः अन्ययुग्माः सन्ति।

14. एकस्मात् निश्चितबिन्दोः समानदूरे परिभ्रमणेन निर्मित-बिन्दूनां पथः वृत्तः इत्युच्यते। निश्चित-बिन्दुः वृत्तस्य केन्द्रः इत्युच्यते। निश्चितदूरं त्रिज्या इत्युच्यते। वृत्तस्य सर्वासु दिशासु गतदूरं तस्य परिधिः इति वदामः।

वृत्तस्य उपरि कौ अपि द्वौ बिन्दू मिलमानः रेखाखण्डः वृत्तस्य एकः जीवः इत्युच्यते।

केन्द्रद्वारा चलित-जीवः वृत्तस्य व्यासः अस्ति। वृत्तीय-क्षेत्रस्य सः भागः यः द्वे त्रिज्ये अपि च सङ्गतचापेन परिवृत्य निर्मितः भवति सः एकः त्रिज्याखण्डः इत्युच्यते। वृत्तस्य एकः जीवः अपि च सङ्गतचापेन परिवृतः वृत्तीयक्षेत्रस्य भागः एकः वृत्तखण्डः भवति। वृत्तस्य एकस्य व्यासस्य द्वौ अपि अन्त्यबिन्दू तं द्वयोः समानभागयोः विभाजनं कुरुतः। प्रत्येकमपि भागः एकः अर्धवृत्तः इत्युच्यते।

मूलभूत-आकृतीनां ज्ञानम्

अध्यायः 5

5.1 भूमिका

अस्मान् परितः वयं यं कमपि आकारं पश्यामः सः वक्रैः अथवा रेखाभिः निर्मितः भवति। वयम् अस्माकं परिवेशे कोणान्, प्रान्तभागान् , तलान्, उद्घाटितवक्रान् अपि च पिहितवक्रान् पश्यामः। वयं एतान् रेखाखण्डेषु , कोणेषु त्रिभुजेषु, बहुभुजेषु वृत्तेषु च विभाजयामः। वयं प्राप्नुमः यत् एते विभिन्न-आकाराणाम् अथवा मापानां भवन्ति। आयान्तु एतेषां मापानां तोलनं कर्तुं काञ्चन विधीन् विकासयामः।

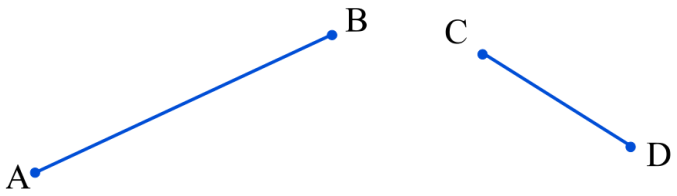
5.2 रेखाखण्डानां मापनम्

वयं तु अनेकवारं रेखाखण्डं दृष्टवन्तः अपि च आलिखितवन्तः। एकः त्रिभुजः त्रीभिः रेखाखण्डैः निर्मितो भवति। एकः चतुर्भुजः चतुर्भिः रेखाखण्डैः निर्मितो भवति।

एकः रेखाखण्डः एकस्याः रेखायाः निश्चितः भागः अस्ति । अनेन रेखाखण्डस्य मापनं कर्तुं शक्यते। प्रत्येकं रेखाखण्डस्य एषः मापः एका अद्वितीयसंख्या अस्ति यः तस्य लम्बः इत्युच्यते। वयम् इमाम् अवधारणां रेखाखण्डानां तुलनासम्बद्धे कार्यं प्रयोक्तुं शक्नुमः।

द्वयोः रेखाखण्डयोः मध्ये परस्परं तुलनां कर्तुं वयं तयोः लम्बयोः मध्ये एकस्य सम्बन्धस्य परिज्ञानं कुर्मः। एवम् अनेकविधीनां माध्यमेन कर्तुं शक्नुमः।

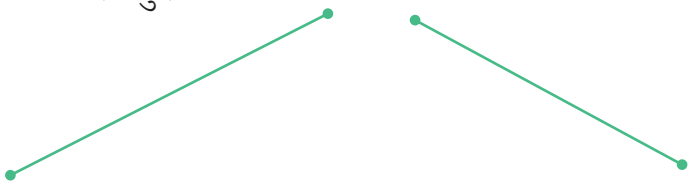
(i) दृष्ट्वा तुलना



केवलं दृष्ट्वा एव किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् उपरि दत्तरेखाखण्डयोः कः रेखाखण्डः दीर्घतरः अस्ति इति ?

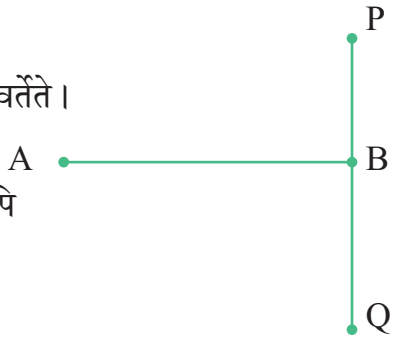
भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् रेखाखण्डः $\overline{AB}$ बृहत्तरः अस्ति।

परन्तु भवन्तः भवतां सामान्यनिर्णयस्य विषये सदैव निश्चिताः भवितुं नार्हन्ति। उदाहरणार्थम्, अधोलिखितौ रेखाखण्डौ पश्यन्तु।



एतयोः द्वयोः अपि रेखाखण्डयोः लम्बयोः अन्तरं तावान् स्पष्टं नास्ति। अतः, अस्माकं कृते तुलनार्थम् अन्यविधीनाम् आवश्यकता अस्ति।

यथार्थतः, तु संलग्नाकृतौ AB अपि च PQ समानलम्बौ वर्तेते। एतदपि स्पष्टं नास्ति।



अतः अस्माकं कृते रेखाखण्डानां परस्परं तुलनार्थम् इतोऽपि उत्तमविधीनाम् आवश्यकता अस्ति।

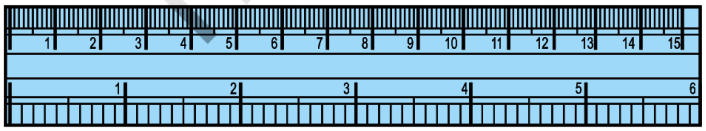
(ii) अनुरेखणद्वारा तोलनम्

$\overline{AB}$ अपि च $\overline{CD}$ एतयोः मध्ये तुलनां कर्तुं वयम् एकस्य अनुरेखण-कर्गजस्य प्रयोगं कुर्मः। वयं अनुरेखण-कर्गजे $\overline{CD}$ इत्यस्य अनुरेखणं कुर्मः अपि च इदम् अनुरेखणकर्गजे आलेखित-रेखाखण्डं $\overline{AB}$ इत्यस्य उपरि स्थापयामः।

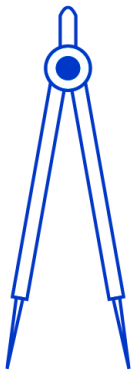
किम् अधुना भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् $\overline{AB}$ अपि च $\overline{CD}$ इत्यनयोः मध्ये कः बृहत्तरः अस्ति इति ? एषः विधिः अस्य अंशस्य उपरि निर्भरः अस्ति यत् वयं कियत्या शुद्धतया अनुरेखणं कृतवन्तः इति। एतत् परित्यज्य यदि भवन्तः केनापि अन्येन रेखाखण्डेन तुलनां कर्तुं वाञ्छन्ति तर्हि अन्यस्य रेखाखण्डस्यापि अनुरेखणं कर्तव्यं भवति। एतत् कठिनम् अस्ति यतः रेखाखण्डानां तुलनं कर्तव्यम् अस्ति तर्हि भवन्तः सदैव रेखाखण्डस्य अनुरेखणं कुर्वन्तः न भवन्ति।

(iii) मापिकाद्वारा अथवा विभाजनीद्वारा तुलना

किं भवन्तः भवतां ज्यामिति-पेटिकायां स्थापितवस्तूनि जानन्ति ? अन्यैः वस्तुभिः सह अत्र एका मापिका एका च विभाजनी अस्ति।



मापिका



विभाजनी

अवधानं यच्छन्तु यत् मापिकायाः उपरि चिह्नं कथम् अङ्कितम् अस्ति। इदं 15 समानभागेषु विभाजितम् अस्ति। प्रत्येकं भागस्य लम्बः 1 सेमी अस्ति।

अत्र प्रत्येकं भागः पुनः उपविभजितः कृतः अस्ति। कथम्? अनेन प्रकारेण उपविभाजितस्य प्रत्येकं भागस्य लम्बः कः अस्ति?

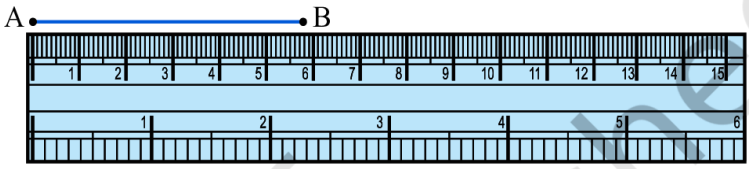
प्रत्येकं सेण्टीमीटर्-मापनं दशसु समानभागेषु उपविभाजितं कृतमस्ति। 1 से.मी. इत्यस्य प्रत्येकम् उपविभाजितः भागः 1 मि.मी. इति अस्ति।

कति मि.मी. योजनेन एकं सेण्टीमीटर् भवति?

1 सेमी = 10 मिमी भवति चेत् वयं 2 से.मी. इति अपि च 3 मिमी इत्येतत् कथं लिखामः? 7.7 सेमी इत्यस्यार्थः कः?

1 मिमी 0.1 सेमी भवति,
2 मिमी 0.2 सेमी भवति,
इत्यादिः। 2.3 सेमी इत्यस्य अर्थः भवति 2 सेमी अपि च 3 मिमी

चिन्तयन्तु AB इति रेखाखण्डस्य लम्बमानं मापनीयम् अस्ति। मापिकायाः शून्यचिह्नं A इत्यत्र स्थापयन्तु। B इत्यस्य सम्मुखचिह्नं मापिकायां पठन्तु।

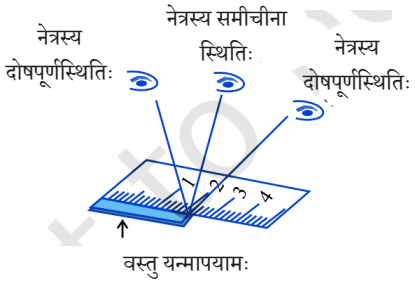


एतेन रेखाखण्डस्य AB इत्यस्य लम्बः ज्ञातो भवति। चिन्तयन्तु एषः लम्बः 5.8 से.मी. अस्ति। वयम् एतं लम्बम् AB = 5.8 सेमी इति लेखितुं शक्नुमः अथवा केवलं AB = 5.8 से.मी. इति लेखितुं शक्नुमः।

अस्यां प्रक्रियामपि त्रुटेः सम्भवनीयता अस्ति। मापिकायाः स्थूलकारणतः तस्याः उपरि अङ्कितचिह्नं पठितुं कठिनता भवेत्।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

1. अन्याः काः त्रुटयः अथवा कठिनताः अस्माकं पुरतः आगच्छन्ति।
2. यदि मापिकायाः उपरि अङ्कितचिह्नान् उत्तमप्रकारेण न पठेत् तर्हि काः काः त्रुटयः भवितुम् अर्हन्ति? एताभिः कथं रक्षिताः भवेम?

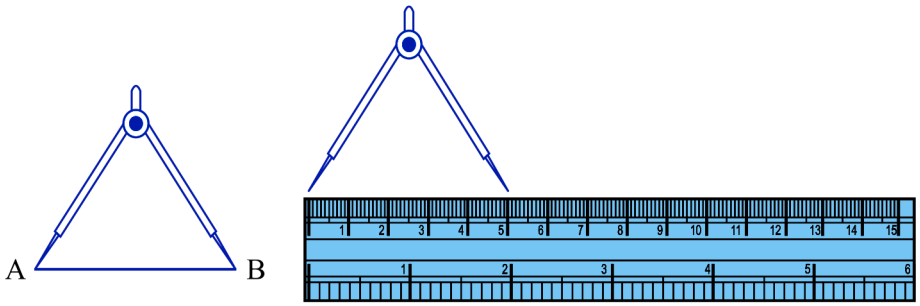


स्थितेः कारणं त्रुटयः

समीचीनमापनं स्वीकर्तुं नेत्रयोः स्थितिः अपि समीचीना भवेत्। नेत्रं चिह्नस्य साक्षात् उपरि भवेत्। अन्यथा तिर्यक् दर्शनेन त्रुटिः भवेत्।

किं वयं अनया समस्यया रक्षिताः भवेम? किम् अस्याः अपेक्षया इतोऽपि उत्तमविधयः सन्ति? आयान्तु लम्बं मापितुं विभाजन्याः प्रयोगं कुर्मः।

विभाजनीं स्वीकुर्वन्तु। अस्याः एकस्य भुजस्य अन्त्यबिन्दुं A उपरि स्थापयन्तु अपि च अन्यस्य भुजस्य अन्त्यबिन्दुम् B उपरि स्थापयन्तु। तथैव स्वीकृत्य विभाजनीं मापिकायाः उपरि उक्तरीत्या स्थापयन्तु यत् एकः अन्त्यबिन्दुः मापिकायाः शून्यचिह्नस्य उपरि भवेत्। अधुना अन्यान्त्यबिन्दोः सम्मुखबिन्दुं पठन्तु। एषः एव रेखाखण्डः AB इत्यस्य लम्बः अस्ति।



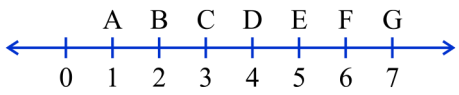
प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एकं सन्देशपत्रं स्वीकुर्वन्तु। उपरि उक्तकौशलस्य प्रयोगं कृत्वा अस्य द्वयोः आसन्नभुजयोः मापनं कुर्वन्तु।
2. कानि अपि त्रीणि वशूनि चिन्वन्तु येषाम् उपरितन-प्रान्तभागाः समतलाः भवेयुः। विभाजन्याः अपि च मापिकायाः प्रयोगं कृत्वा उपरितन-प्रान्तभागानां सर्वासां भुजानां मापनं कुर्वन्तु।

अभ्यासः 5.1

1. रेखाखण्डानां तोलनं केवलं द्रष्ट्वा करणेन का हानिः भवति ?
2. एकस्य रेखाखण्डस्य लम्बं मापयितुं मापिकापेक्षया विभाजन्याः प्रयोगः अधिकसमीचीनतरः अस्ति ?
3. कमपि AB इति रेखाखण्डं रचयन्तु। A अपि च B एतयोः मध्ये स्थितमेकं बिन्दुं C स्वीकुर्वन्तु AB, BC अपि च CA एतेषां लम्बं मापयन्तु। किं AB = AC + CB अस्ति ?

   (**टिप्पणी** : यदि कस्याः अपि रेखायाः उपरि बिन्दवः A,B,C अनेन प्रकारेण स्थिताः सन्ति यत् AC + CB = AB अस्ति तर्हि निश्चितरूपेण बिन्दुः C बिन्दोः A अपि च B अनयोः मध्ये एव स्थितः अस्ति।)
4. एकस्याः रेखायाः उपरि बिन्दवः A,B,C अनेन प्रकारेण स्थिताः सन्ति यत् AB = 5 से.मी., BC = 3 सेमी अपि च AC = 8 से.मी. अस्ति। एतेषु कः बिन्दुः अन्य-द्वयोः बिन्दोः मध्ये स्थितः अस्ति ?
5. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् संलग्नाकृतौ D रेखाखण्डः AG इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति।



6. B रेखाखण्डः AC इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति अपि च C रेखाखण्डः BD इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति, यत्र A,B,C अपि च D एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। वदन्तु यत् AB = CD किमर्थमस्ति।
7. पञ्च-त्रिभुजान् आलिखन्तु अपि च ताः भुजाः मापयन्तु। प्रत्येकं स्थितौ परीक्षणं कुर्वन्तु यत् कयोः अपि द्वयोः भुजयोः लम्बयोगः तृतीयभुजस्य लम्बापेक्षया सदैव बृहत्तरः अस्ति।

5.3 कोणः, समकोणः अपि च ऋजुकोणः

भवन्तः भूगोले दिशानां विषये श्रुतवन्तः। वयं जानीमः यत् चीनदेशः भारतस्य उत्तरे अपि च श्रीलङ्का दक्षिणे अस्ति इति। वयम् एतदपि जानीमः यत् सूर्यः पूर्वस्यां दिशि उदयति पश्चिमायां दिशि अस्तं गच्छति। आहत्य चतस्रः दिशाः सन्ति।

ताः सन्ति– उत्तरदिशा , दक्षिणदिशा, पूर्वदिशा अपि च पश्चिमदिशा । किं भवन्तः जानन्ति यत् उत्तरस्य विरुद्धदिशि का दिक् वर्तते इति ?

पश्चिमदिशायाः विरुद्धदिशि का दिक् वर्तते ?

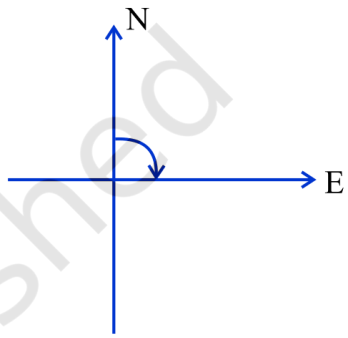
भवन्तः प्रथमतः यत् जानन्ति तत्सर्वं स्मरन्तु । अधुना वयं कोणानां काञ्चन गुणान् अध्येतुम् अस्य ज्ञानस्य प्रयोगं कुर्मः ।

एतत् कुर्वन्तु

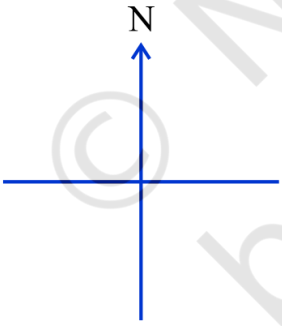
उत्तराभिमुखं तिष्ठन्तु ।

ततः पूर्वाभिमुखं प्रदक्षिणं भ्रमन्तु ।

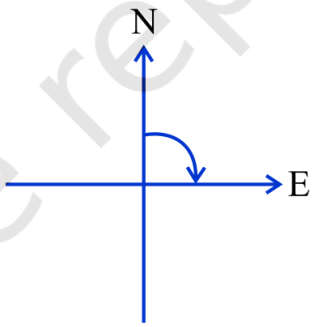
भवन्तः एकस्य समकोणस्य समानं भ्रमणं कृतवन्तः । पुनः एकं समकोणं प्रदक्षिणं कुर्वन्तु । इदानीं भवतां मुखं दक्षिणदिशि अस्ति । अधुना पुनः एकं समकोणम् अप्रदक्षिणं कुर्वन्ति चेत् तर्हि अधुना भवतां मुखं कस्यां दिशि अस्ति ? एषा पुनः पूर्वादिक् अस्ति ? (किमर्थम् ?)



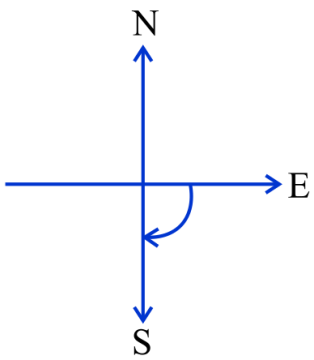
अधोलिखितस्थितीः पश्यन्तु ।



भवन्तः उत्तराभिमुखिनः भूत्वा स्थितवन्तः



घटिकायाः दिशि एकं समकोणं भ्रमणेन अधुना भवन्तः पूर्वाभिमुखिनः भूत्वा स्थितवन्तः



एकम् अन्यं समकोणं भ्रमणेन अन्ते दक्षिणाभिमुखिनः भूत्वा स्थितवन्तः

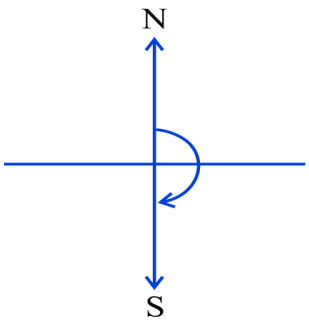
उत्तराभिमुखात् दक्षिणाभिमुखपर्यन्तस्य भ्रमणे भवन्तः द्वौ समकोणौ भ्रमितवन्तः । किम् एतत् द्वयोः समकोणयोः एकेन भ्रमणेन समानं नास्ति ?

उत्तरतः पूर्वपर्यन्तं भ्रमणं एकेन समकोणेन समानं भ्रमणम् अस्ति ।

उत्तरतः दक्षिणपर्यन्तं भ्रमणं द्वाभ्यां समकोणाभ्यां समानं भ्रमणम् अस्ति ।

अस्य वयं ऋजुकोणः इति वदामः । NS एका सरलरेखा अस्ति ।

दक्षिणाभिमुखं तिष्ठन्तु ।



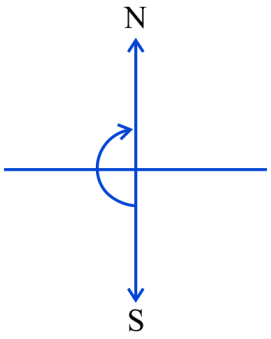
© NCERT not to be republished

एकेन ऋजुकोणेन समानं भ्रमन्तु।

अधुना भवन्तः कस्याः दिशायाः अभिमुखाः सन्ति ?

भवन्तः उत्तरदिशायाः अभिमुखाः सन्ति।

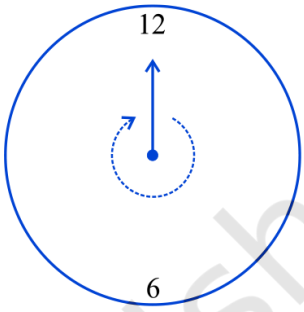
उत्तरतः दक्षिणपर्यन्तं भ्रमितुं भवन्तः एकेन ऋजुकोणेन समं भ्रमणं कृतवन्तः ।अनेन प्रकारेण द्वाभ्याम् ऋजुकोणाभ्यां समं तस्यामेव दिशि भ्रमणेन भवन्तः पूर्वस्थानम् एव प्राप्नुवन्ति।



चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

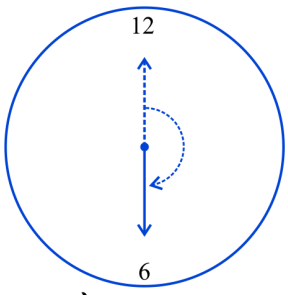
भवन्तः भवतां प्रारम्भिक-स्थिति-पर्यन्तम् आगन्तुम् एकस्यामेव दिशि कति समकोणान् भ्रमामः ?

एकस्याम् एव दिशि द्वौ ऋजुकोणौ अथवा चतुरः समकोणान् भ्रमणेन एकं भ्रमणं सम्पूर्णं भवति। एतत् एकं पूर्णं भ्रमणं एकं परिभ्रमणम् इति कथ्यते । एकं सम्पूर्णं परिभ्रमणात्मककोणं सम्पूर्णकोणः इति वदामः।

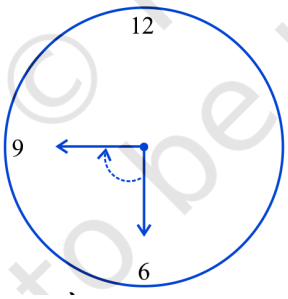


वयं तु एतान् भ्रमणान् घटिषु द्रष्टुं शक्नुमः। यदा घट्याः एका सूची एकस्मात् स्थानात् अन्यस्थानं प्राप्नोति तदा सा एकस्मिन् कोणे भ्रमति।

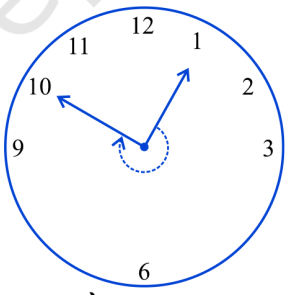
चिन्तयन्तु घट्याः एका सूची 12 इत्यनेन चलनस्य प्रारम्भं कृत्वा भ्रमणं कुर्वती 12 इत्यस्योपरि पुनः आगच्छति। किं सा सूची एकं भ्रमणं पूर्णं न कृता ? अतः सा कति समकोणम् अभ्रमत् ? उदाहरणानि पश्यन्तु।



12 इत्यनेन 6 पर्यन्तं एकस्य सम्पूर्णभ्रमणस्य $\frac{1}{2}$ अथवा 2 समकोणः



6 इत्यनेन 9 पर्यन्तं एकस्य सम्पूर्णभ्रमणस्य $\frac{1}{4}$ अथवा 1 समकोणः



1 इत्यनेन 10 पर्यन्तं एकस्य सम्पूर्णभ्रमणस्य $\frac{3}{4}$ अथवा 3 समकोणः

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अर्धभ्रमणस्य कृते कोणस्य नाम किम् ?
2. एकस्य चतुर्धा भ्रमणस्य कृते कोणस्य नाम किम्?
3. एकस्याः घट्याः उपरि अर्धभ्रमणस्य, एकस्य चतुर्धा भ्रमणस्य अपि च तृतीय-चतुर्थांश-घूर्णनस्य कृते पञ्च अन्यस्थितीः ददतु।

अवधानं यच्छन्तु यत् तृतीय-चतुर्थांशस्य भ्रमणस्य कृते कोणस्य किमपि विशेषं नाम नास्ति।

अभ्यासः 5.2

1. घट्याः घण्टाबोधिनी सूची एकस्य घूर्णनस्य कियता परिमाणेन भिन्नरूपेण भ्रमति ? यदा सा –

   (a) 3 इत्यनेन 9 पर्यन्तं प्राप्नोति ? (b) 4 इत्यनेन 7 पर्यन्तं प्राप्नोति ?

   (c) 7 इत्यनेन 10 पर्यन्तं प्राप्नोति ? (d) 12 इत्यनेन 9 पर्यन्तं प्राप्नोति ?

   (e) 1 इत्यनेन 10 पर्यन्तं प्राप्नोति ? (f) 6 इत्यनेन 3 पर्यन्तं प्राप्नोति ?

2. एकस्याः घट्याः सूची कुत्र विरमति यदि सा –

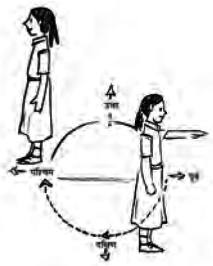
   (a) 12 इत्यनेन प्रारम्भं कृत्वा घट्याः दिशि $\frac{1}{2}$ भ्रमणं कुर्मः तर्हि ?

   (b) 2 इत्यनेन प्रारम्भं कृत्वा घट्याः दिशि $\frac{1}{2}$ भ्रमणं कुर्मः तर्हि ?

   (c) 5 इत्यनेन प्रारम्भं कृत्वा घट्याः दिशि $\frac{1}{4}$ भ्रमणं कुर्मः तर्हि ?

   (d) 5 इत्यनेन प्रारम्भं कृत्वा घट्याः दिशि $\frac{3}{4}$ भ्रमणं कुर्मः तर्हि ?

3. भवन्तः कां दिशां पश्यन्तः भवेयुः यदि भवन्तः आरम्भे



   (a) पूर्वाभिमुखं पश्यन्तः सन्ति अपि च घट्याः दिशि $\frac{1}{2}$ भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि ?

   (b) पूर्वाभिमुखं पश्यन्तः सन्ति अपि च घट्याः दिशि $1\frac{1}{2}$ भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि ?

   (c) पश्चिमाभिमुखं पश्यन्तः सन्ति अपि च घट्याः विरुद्धदिशि $\frac{3}{4}$ भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि ?

   (d) दक्षिणाभिमुखं पश्यन्तः सन्ति अपि च सम्पूर्णम् एकं भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि ?

(किम् अस्य अन्तिमप्रश्नस्य कृते वयं घट्याः दिशायाः अपि च घट्याः विरुद्धदिशायाः विषये वार्तां कुर्याम? किमर्थम् ?)

4. भवन्तः एकस्य भ्रमणस्य कियतः भागान् भ्रमन्ति यदि भवन्तः

   (a) पूर्वाभिमुखं स्थित्वा घट्याः दिशि भ्रमणं कृत्वा उत्तराभिमुखं कुर्वन्ति तर्हि ?

   (b) दक्षिणाभिमुखं स्थित्वा घट्याः दिशि भ्रमणं कृत्वा पूर्वाभिमुखं कुर्वन्ति तर्हि ?

   (c) पश्चिमाभिमुखं स्थित्वा घट्याः दिशि भ्रमणं कृत्वा पूर्वाभिमुखं कुर्वन्ति तर्हि ?

5. घट्याः घण्टाबोधिनीसूचीद्वारा भ्रमित-समकोणानां संख्यां जानन्तु यदा सा

   (a) 3 इत्यनेन 6 पर्यन्तं प्राप्नोति। (b) 2 इत्यनेन 8 पर्यन्तं प्राप्नोति।

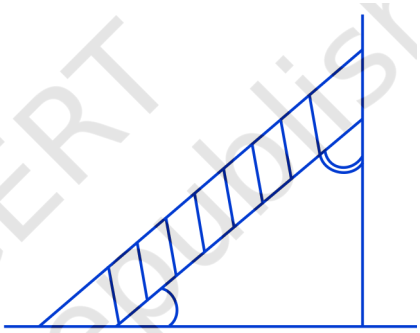
   (c) 5 इत्यनेन 11 पर्यन्तं प्राप्नोति। (d) 10 इत्यनेन 1 पर्यन्तं प्राप्नोति।

   (e) 12 इत्यनेन 9 पर्यन्तं प्राप्नोति। (f) 12 इत्यनेन 6 पर्यन्तं प्राप्नोति।

6. भवन्तः कति समकोणान् भ्रमन्ति यदि भवन्तः आरम्भे
   (a) दक्षिणाभिमुखं स्थित्वा घट्याः दिशि भ्रमणं कृत्वा पश्चिमाभिमुखं कुर्वन्ति तर्हि ?
   (b) उत्तराभिमुखं स्थित्वा घट्याः विरुद्ध-दिशि भ्रमणं कृत्वा पूर्वाभिमुखं कुर्वन्ति तर्हि ?
   (c) पश्चिमाभिमुखं स्थित्वा पश्चिमाभिमुखं भ्रमन्ति तर्हि ?
   (d) दक्षिणाभिमुखं स्थित्वा उत्तराभिमुखं भ्रमन्ति तर्हि ?

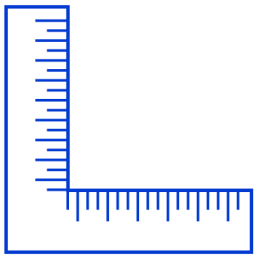
7. घट्याः घण्टाबोधिनीसूची कुत्र विरमति यदि सा आरम्भे –
   (a) 6 इत्यनेन 1 समकोणं भ्रमन्ति तर्हि ?
   (b) 8 इत्यनेन 2 समकोणं भ्रमन्ति तर्हि ?
   (c) 10 इत्यनेन 3 समकोणं भ्रमन्ति तर्हि ?
   (d) 7 इत्यनेन 2 ऋजुकोणं भ्रमन्ति तर्हि ?

5.4 न्यूनकोणः, अधिककोणः अपि च प्रतिवर्तिकोणः



वयं दृष्टवन्तः यत् एकस्य समकोणस्य अपि च ऋजुकोणस्य अर्थः कः इति । परन्तु यः कोणः अस्माकं कृते द्रष्टुं लभ्यते सः सर्वदा एतादृश-प्रकारद्वयेन एव न भवति । एकेन सोपानेन द्वारे निर्मितकोणः न समकोणः अस्ति अथवा ऋजुकोणः अपि नास्ति ।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु ।



किम् एतादृशाः समकोणाः अपि सन्ति ये समकोणात् लघुतराः ?

किम् एतादृशाः समकोणाः अपि सन्ति ये समकोणात् बृहत्तराः ?

किं भवन्तः तक्षकस्य वर्गं दृष्टवन्तः ? एषः आङ्ग्लवर्णमालायाः 'L' अक्षरवत् भवति । सः अनेन समकोणानां परीक्षणं करोति । आयान्तु वयमपि समकोणानां परीक्षणं कर्तुम् एतादृशस्य एव परीक्षणयन्त्रस्य निर्माणं कुर्मः ।

एतत् कुर्वन्तु

चरणम् 1
कर्गदस्य एकं भागं स्वीकुर्वन्तु

चरणम् 2
अमुं मध्ये पुटीकुर्वन्तु

चरणम् 3
ऋजुतटे पुनः पुटीकुर्वन्तु भवतां परीक्षणी सिद्धा अस्ति ।

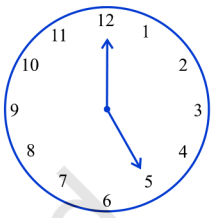
स्वनिर्मित-समकोण-परीक्षणीं पश्यन्तु (किं वयम् इमां समकोणीय-परीक्षणी इति वदामः ?) किम् अस्याः एकः तटः द्वितीये सारल्येन स्थितः अस्ति ?

चिन्तयन्तु कोणसहितः कोऽपि आकारः दत्तः । भवन्तः अस्य आकारस्य कोणान् समकोणीयेण परीक्षणयन्त्रेण परीक्षितुं शक्नुवन्ति ।

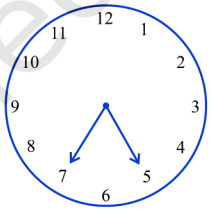
किम् अस्य प्रान्तभागः एकस्य कर्गदस्य कोणेन दृश्यते ? यदि दृश्यते तर्हि एतत् कञ्चित् समकोणं दर्शयति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. घट्याः घण्टाबोधिनी सूची 12 तः 5 पर्यन्तं चलति । किम् अस्याः भ्रमणं 1 समकोणेन अपि अधिकमस्ति ?



2. घट्यां एषः कोणः कथं दृश्यते ? घट्याः घण्टाबोधिनी सूची 5 तः 7 पर्यन्तं चलति । किं सूचीद्वारा भ्रमितकोणः 1 समकोणेन अपि अधिकः अस्ति ?



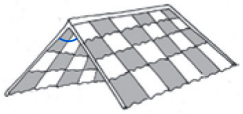
3. घट्यां सूचीनां स्थितिं अधोलिखित-प्रकारेण कृत्वा कोणानां परीक्षणं समकोणीय-परीक्षणी-द्वारा कुर्वन्तु ।
   (a) 12 तः 2 पर्यन्तं गमनम्
   (b) 6 तः 7 पर्यन्तं गमनम्
   (c) 4 तः 8 पर्यन्तं गमनम्
   (d) 2 तः 5 पर्यन्तं गमनम्

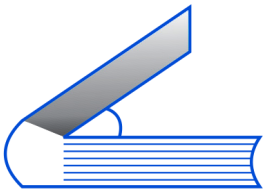
4. कोणयुक्तान् पञ्च भिन्न-भिन्न-आकारान् स्वीकुर्वन्तु । कोणानां नाम लिखन्तु । स्व-परीक्षणीद्वारा एतेषां कोणानां परीक्षणं कुर्वन्तु अपि च प्रत्येकं स्थितेः परिणामान् एकस्मिन् कोष्ठके अधोलिखितरीत्या लिखन्तु ।

कोणः	**तस्मात् लघुः**	**तस्मात् बृहत्**
A	.....	.....
B	.....	.....
C	.....	.....

अन्यनाम

- समकोणात् लघुकोणः **न्यूनकोणः** इत्युच्यते। एषः कोणः न्यूनकोणः अस्ति।

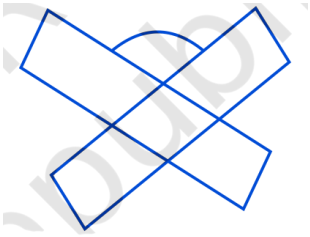




किं भवन्तः पश्यन्तः सन्ति यत् एतासु आकृतिषु प्रत्येकं भ्रमणं $\frac{1}{4}$ तः न्यूनम् अस्ति ? स्व-समकोणीय-परीक्षणी-द्वारा अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

- यदि कोऽपि कोणः एकस्मात् समकोणात् बृहत्तरः अपि च ऋजुकोणात् लघुतरः वर्तते तर्हि सः एकः **अधिककोणः** इति वदामः। एते कोणाः अधिककोणाः सन्ति।

गृहम्

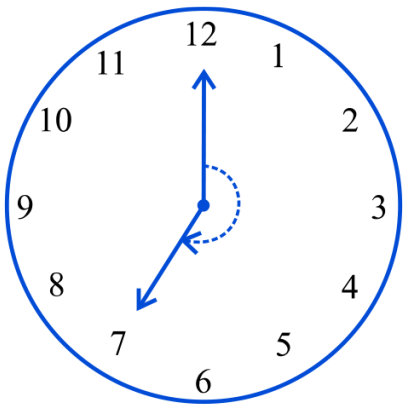


पठनोत्पीठिका

किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् एतासु प्रत्येकं $\frac{1}{4}$ भ्रमणतः अधिकाः सन्ति अपि च $\frac{1}{2}$ भ्रमणतः न्यूनम् अस्ति ? अस्य परीक्षणार्थं समकोणीय-परीक्षणी भवतां कृते सहाय्यतां करोति।

पूर्व-उदाहरणेषु अपि अधिककोणान् जानन्तु।

- एकः **प्रतिवर्तिकोणः** एकस्मात् ऋजुकोणात् बृहत्तरः भवति एवम् एकस्मात् सम्पूर्णकोणात् लघुतरः भवति। एतत् तुअस्याम् आकृतौ दर्शितप्रकारकं भवति। (घट्यां कोणं पश्यन्तु) भवन्तः एतस्मात् पूर्वम् आकृतीः निर्मितवन्तः आसन्, किं तासु आकृतिषु प्रतिवर्तिकोणः आसीत् ? भवन्तः अस्य परीक्षणं कथं कुर्वन्ति ?



प्रयत्नं कुर्वन्तु

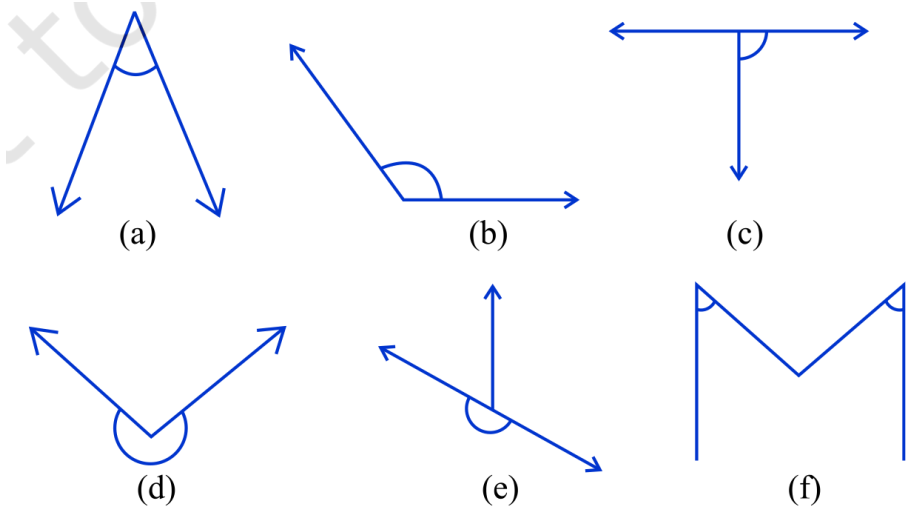
1. भवन्तः भवतां पार्श्वे पश्यन्तु अपि च कोणेषु लभमानान् प्रान्तभागान् जानन्तु ये कोणान् निर्मान्ति। एतादृश-दशस्थितीः लिखन्तु।
2. एतादृश-दशस्थितीः लिखन्तु यत्र न्यूनकोणाः भवन्ति।
3. एतादृश-दशस्थितीः लिखन्तु यत्र समकोणाः भवन्ति।
4. एतादृश-पञ्चस्थितीः लिखन्तु यत्र अधिककोणाः भवन्ति।
5. एतादृश-पञ्चस्थितीः लिखन्तु यत्र प्रतिवर्तिकोणाः भवन्ति।

अभ्यासः 5.3

1. संयोजयन्तु।

(i) ऋजुकोणः	(a) $\frac{1}{4}$ भ्रमणतः न्यूनम्
(ii) समकोणः	(b) $\frac{1}{2}$ भ्रमणतः अधिकम्
(iii) न्यूनकोणः	(c) $\frac{1}{2}$ भ्रमणम्
(iv) अधिककोणः	(d) $\frac{1}{4}$ भ्रमणम्
(v) प्रतिवर्तिकोणः	(e) $\frac{1}{4}$ भ्रमणम् अपि च $\frac{1}{2}$ भ्रमणयोः मध्ये
	(f) एकं पूर्णम् भ्रमणम्

2. अधोलिखितासु प्रत्येकं कोणान् समकोण-ऋजुकोण-न्यूनकोण-अधिककोण-प्रतिवर्तिकोणरूपेण वर्गीकरणं कुर्वन्तु।



5.5 कोणानां मापनम्

उक्त-समकोणीय-परीक्षण्याः साहाय्येन वयं कोणानां समकोणस्य तुलनां कृतवन्तः । अतः वयं कोणान् न्यूनकोण-अधिककोण-प्रतिवर्तिकोणेषु वर्गीकर्तुमपि समर्थाः अभवाम् ।

परन्तु अनेन कोणानां परिशुद्धतायाः तुलना न भवति । अनेन एतत् तु ज्ञातं न भवति यत् दत्तयोः द्वयोः अधिककोणयोः मध्ये बृहत्तरः अस्ति इति । अतः कोणानां तुलनाम् इतोऽपि परिशुद्धतया कर्तुम् इदम् आवश्यकं भवति यत् तेषां मापनं कुर्वन्तु । अपि च वयम् एकेन चान्द्रिकायाः साहाय्येन कर्तुं शक्यते ।

कोणस्य मापनम्

वयम् एतादृशं मापनम् अंशमापनम् इति वदामः । एकं सम्पूर्णं भ्रमणं 360 समानभागेषु विभाजितं भवति । प्रत्येकं भागः अंशः इत्युच्यते । वयं 360 अंशं 360^{o} इति लिखामः ।

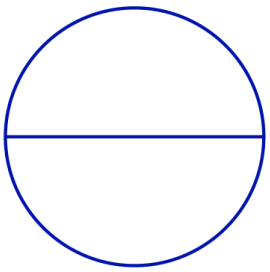
चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु

$\frac{1}{2}$ भ्रमणे कति अंशाः सन्ति ? 1 समकोणे कति अंशाः सन्ति ?

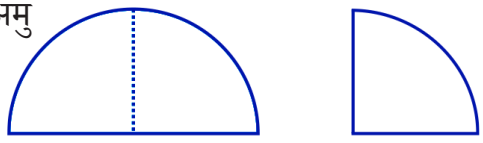
1 ऋजुकोणे कति अंशाः सन्ति ? कति समकोणैः 180^{o} भवन्ति ? कति समकोणैः 360^{o} भवन्ति ?

एतत् कुर्वन्तु

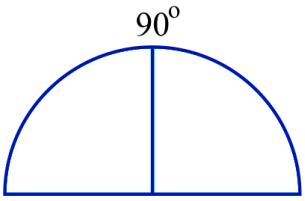
1. एकस्य वलयस्य साहाय्येन एकां वृत्ताकार-आकृतिं रचयन्तु अथवा एकं वृत्ताकारं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु ।



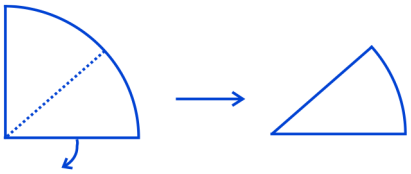
2. एतद् द्विवारं पुटीकुर्वन्तु येन दर्शिताकृतेः प्राप्तिः स्यात् । अमुं वयं चतुर्थांशः इति वदामः ।



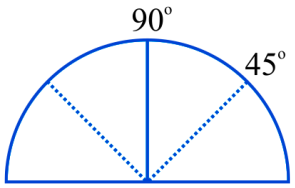
3. इदम् उद्घाटनं कुर्वन्तु । भवद्भिः कश्चन अर्धवृत्तः प्राप्यते । यस्य मध्ये एकं पुटचिह्नम् अस्ति ।



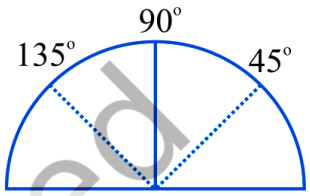
4. अमुं वृत्तं पुटीकृत्य चतुर्थांशं कुर्वन्तु । इदं चतुर्थांशं पुनरेकवारं पुटीकृत्य दर्शिताकृतिं प्राप्नुवन्तु । इदानीं कोणस्य 90° इत्यस्यार्धः अर्थात् 45° अस्ति ।



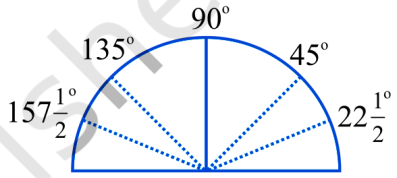
5. इदानीं उद्घाटयन्तु । द्वयोः अपि स्थानयोः पुटचिह्नं दृश्यते । आधाररेखायाः वामभागे प्रथमे पुटचिह्ने 45° इति लिखन्तु



6. अन्यस्मिन् पुटचिह्ने 90° + 45° = 135° इति लिख्यते ।

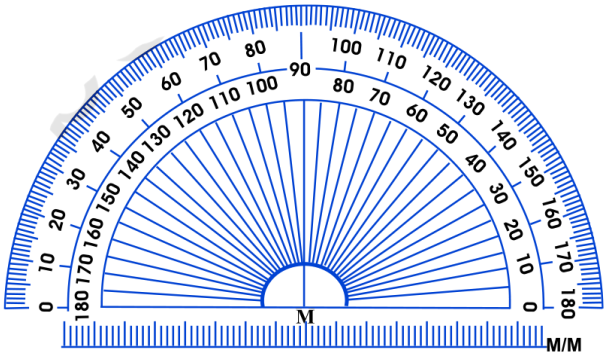


7. कर्गदम् अधुना 45° पर्यन्तं पुटीकुर्वन्तु । अधुना अस्य अर्धं कुर्वन्तु । आधाररेखायाः वामभागस्य प्रथमपुटचिह्नस्य 45° इत्यस्य अर्धम्, अर्थात् 22 ½° दर्शयति । 135° इत्यस्य वामभागाभिमुखकोणः 157 ½ ° अस्ति ।

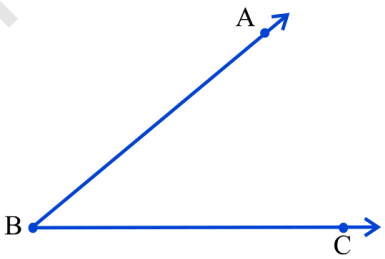


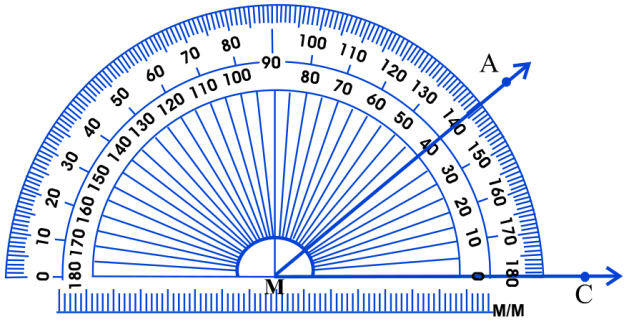
चन्द्रिका

भवतां ज्यामितिपेटिकायां भवतां कृते चान्द्रमापिका लभ्यते । अस्याः वक्रीयतटः 180 समानभागेषु विभाजितः अस्ति । प्रत्येकं भागः अंशः इत्युच्यते । अस्यां तु चिह्नं दक्षिणतः आरभ्य वामभागे 0° तः 180° पर्यन्तम् अङ्कितं भवति ।



चिन्तयन्तु भवन्तः कमपि कोणं ABC इत्याख्यं मापनं कर्तुम् इच्छन्ति ।

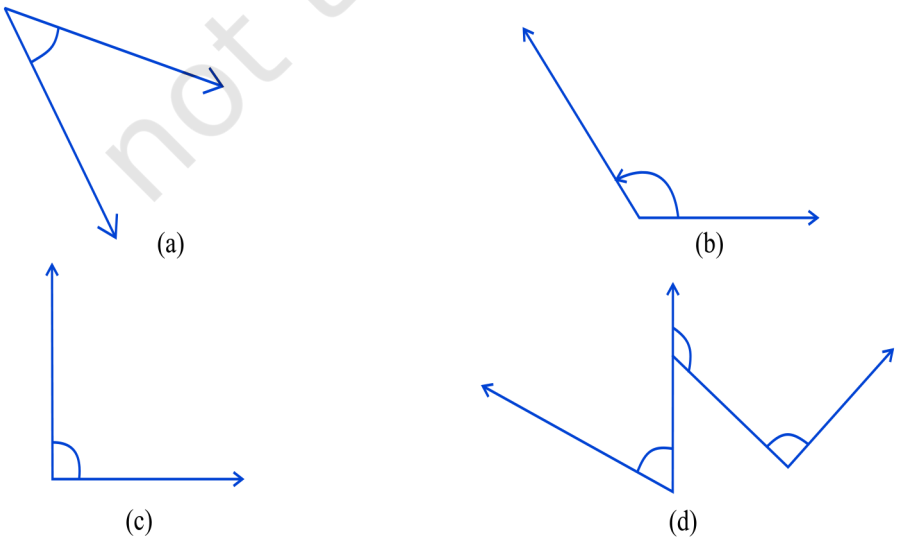




1. चान्द्रिकाम् अपि च स्थापयन्तु यत् अस्याः ऋजुप्रान्तभागस्य मध्यबिन्दुः (आकृतौ M) कोणस्य B इति शीर्षके भवेत् ।
2. चान्द्रिकाम् अपि च समायोजयन्तु यत् किरणः BC अस्य ऋजुप्रान्तभागस्य अनुदिशि भवेत् ।
3. चान्द्रिकायां मापिकाद्वयम् अस्ति । तां मापिकां पठन्तु येन BC इति किरणः 0^o चिह्नेन मिलेत् ।
4. वक्रीयतटे AB किरणद्वारा दर्शितचिह्नं कोणस्य अंशीयमापनां जानाति ।
   आकृतौ एषः 40^o अस्ति ।
   वयम् अमुं m $\angle ABC = 40^o$ इति लिखामः ।

अभ्यासः 5.4

1. अधस्तनस्य मापनं वदन्तु ।
   (i) एकः समकोणः ? (ii) एकः ऋजुकोणः
2. वदन्तु सत्यम् अथवा असत्यम् इति ।
   (a) एकस्य न्यूनकोणस्य मापनं $< 90^o$ अस्ति ।
   (b) एकस्य अधिककोणस्य मापनं $< 90^o$ अस्ति ।
   (c) एकस्य प्रतिवर्तिकोणस्य मापनं $< 180^o$ अस्ति ।
   (d) एकस्य सम्पूर्णभ्रमणस्य मापनं $< 360^o$ अस्ति ।
   (e) यदि m $\angle A = 53^o$ अपि च m $\angle B = 35^o$, तर्हि m $\angle A$ = m $\angle B$ अस्ति ।
3. अधस्तनस्य मापनं लिखन्तु ।
   (a) केचन न्यूनकोणाः
   (b) केचन अधिककोणाः
   (प्रत्येकम् उदाहरणद्वयं ददतु)
4. अधोलिखितकोणान् चन्द्रिकया मापयन्तु अपि च तेषां मापनं लिखन्तु ।



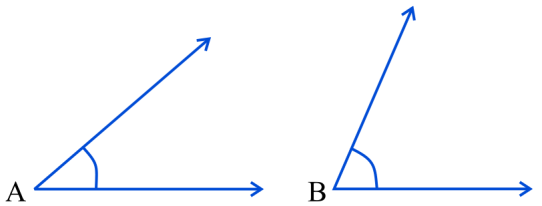
not to

5. कस्य कोणस्य मापनं बृहत् अस्ति ।

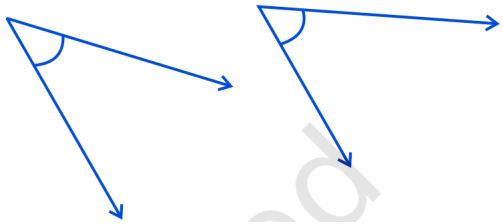
प्रथमं परिगणनं कुर्वन्तु तदनन्तरं मापनं कुर्वन्तु ।

A कोणस्य मापनं =

B कोणस्य मापनं =



6. दर्शिताकृतौ द्वयोः कोणयोः कस्य कोणस्य मापनं बृहत् अस्ति । प्रथमं परिगणनं कुर्वन्तु तदनन्तरं मापनेन पुष्टयन्तु ।



7. न्यूनकोणः , अधिककोणः, समकोणः अथवा ऋजुकोणः इति लिखित्वा रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

(a) सः कोणः यस्य मापनं एकस्य समकोणस्य मापनात् न्यूनम् अस्ति तर्हि _____ भवति ।

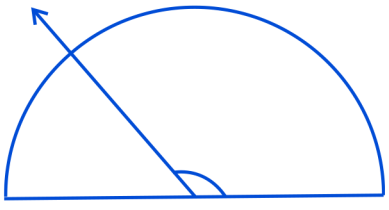
(b) सः कोणः यस्य मापनं एकस्य समकोणस्य मापनात् अधिकम् अस्ति तर्हि _____ भवति।

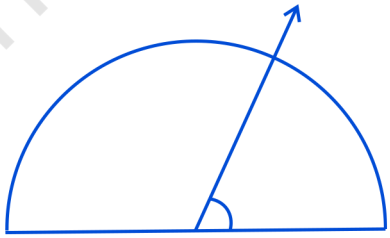
(c) सः कोणः यस्य मापनं द्वयोः समकोणयोः योगेन समानम् अस्ति तर्हि _____ भवति ।

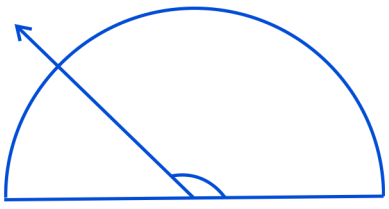
(d) यदि द्वयोः कोणयोः मापनस्य योगः समकोणस्य मापनस्य समानः अस्ति तर्हि प्रत्येकं कोणः _____ अस्ति ।

(e) यदि द्वयोः कोणयोः मापनस्य योगः एकस्य ऋजुकोणस्य मापनेन समानः अस्ति , एवम् एतेषु एकः कोणः न्यूनकोणः अस्ति, तर्हि द्वितीयकोणः _____ भवेत् ।

8. अधोदत्तासु आकृतिषु प्रत्येकं कोणस्य मापनं जानन्तु । (प्रथमं दृष्ट्वा परिगणयन्तु तदनन्तरं चन्द्रिकोपकरणेन मापनं कुर्वन्तु)

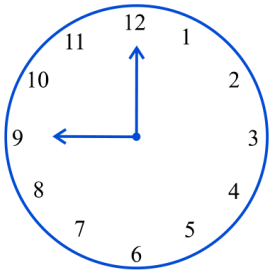




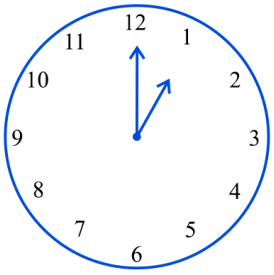


not to be republished

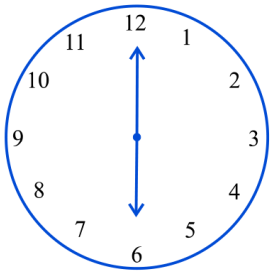
9. अधो दत्तासु प्रत्येकं आकृतिषु घट्याः सूचीनां मध्ये कोणानां मापनं जानन्तु।



प्रातः 9:00



दोपहर 1:00

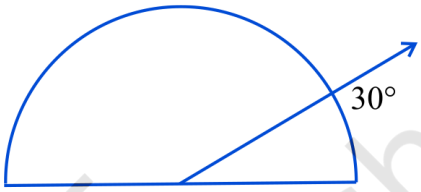


सायं 6:00

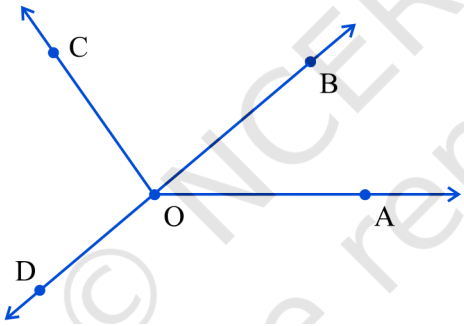
10. **अन्वेषणं कुर्वन्तु।**

दत्ताकृतौ चान्द्रिका 30° दर्शयति। इमामेवाकृतिम् एकेन आवर्धनकाचेन पश्यन्तु। किं एषः कोणः बृहद्भवति ?

किं कोणस्य मापनस्य वर्धनं भवति ?



11. मापनं कुर्वन्तु अपि च प्रत्येकं कोणं वर्गीकुर्वन्तु।



कोणः	∠AOB	∠AOC	∠BOC	∠DOC	∠DOA	∠DOB
मापनम्						
प्रकारः						

5.6 लम्बरेखाः

यदि द्वे रेखे परस्परं प्रतिच्छेदनं कुर्युः अपि च तयोः मध्यस्थः एकः कोणः समकोणः स्यात् तर्हि ते रेखे परस्परं लम्बरूपेण स्तः इत्युच्यते। यदि एका AB इति रेखा CD इत्यस्याः रेखायाः उपरि लम्बरूपेण अस्ति तर्हि इदं वयं $AB \perp CD$ इति लिखामः।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

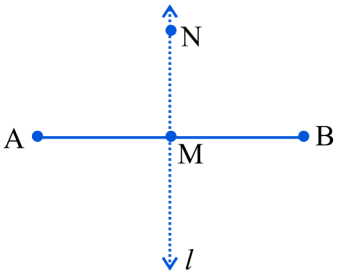
यदि $AB \perp CD$ अस्ति तर्हि किम् अस्माभिः एतदपि वक्तव्यम् अस्ति यत् $CD \perp AB$ अस्तीति ?

अस्मान् परितः लम्बरेखाः

भवन्तः निजपरिवेशस्थेषु विद्यमानवस्तुषु लम्बरेखाणाम् अनेकानि उदाहरणानि दातुं शक्नुवन्ति। आङ्ग्लवर्णमालायाः अक्षरं T एतेषु एकम्। किम् अन्यत् अपि किञ्चित् अक्षरम् अस्ति यत् लम्बानाम् उदाहरत्वेन भवितुं शक्नोति।

© NCERT not to be republished

एकं पत्रं स्वीकुर्वन्तु । किं अस्य प्रान्तभागः परस्परं लम्बः अस्ति ? चिन्तयन्तु । MN इत्याख्यः बिन्दुः M इत्यनेन भूत्वा गम्यमानरेखाखण्डस्य AB इत्यस्य उपरि कस्यचित् रेखा लम्बस्य रूपेण अस्ति । किं रेखा MN रेखाखण्डं AB इत्याख्यं समानभागद्वयेन विभाजयति ।



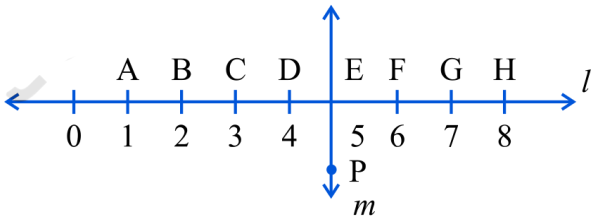
किं MN , रेखाखण्डस्य AB इत्यस्य उपरि लम्बः अस्ति ?

अनेन प्रकारेण MN रेखाखण्डं AB इत्याख्यं **समविभाजितं** करोति । अतः वयं वदामः यत् रेखा MN रेखाखण्डं AB इत्यस्य लम्ब-समविभाजकः अस्ति ।

अस्य रचनां भवन्तः अनन्तरं शिक्षन्ति ।

अभ्यासः 5.5

1. अधोलिखितेषु कानि लम्बरेखायाः उदाहरणानि सन्ति ।
   (क) उत्पीठिकायाः उपरि प्रान्तस्य आसन्नभुजाः ।
   (ख) रैल्-यानस्य मार्गः ।
   (ग) अक्षरं L निर्मातृरेखाखण्डः ।
   (घ) अक्षरं V निर्मातृरेखाखण्डः ।
2. भावयन्तु रेखाखण्डः PQ रेखाखण्डस्य XY इत्यस्य उपरि लम्बः अस्ति । भावयन्तु एतौ परस्परं बिन्दौ A इत्यस्युपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः । $\angle$PAY इत्यस्य मापनं किम् स्यात् ?
3. भवतां ज्यामितिपेटिकायां वर्गमापिकाद्वयम् अस्ति । अनयोः वक्रेषु सम्भूतं मापनं किमस्ति ? किम् अस्मासु एतादृशकोणाः सन्ति , ये द्वयोः अपि उभयनिष्ठाः सन्ति ?
4. इमाम् आकृतिं ध्यानेन पश्यन्तु । I रेखा, m उपरि लम्बः अस्ति ।



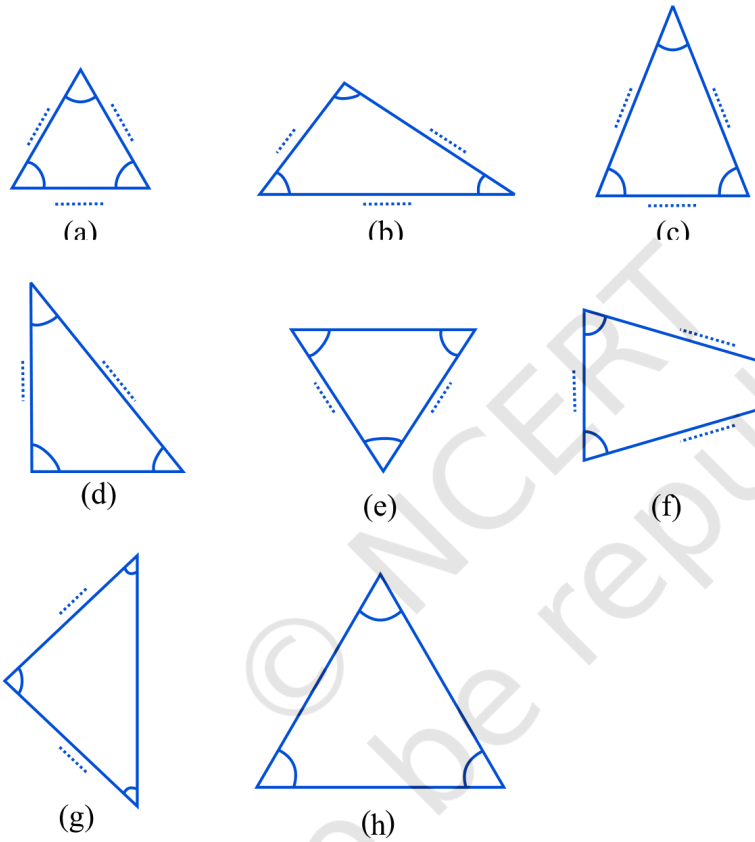
   (क) किं CE = EG अस्ति ?
   (ख) किं रेखा PE, रेखाखण्डं CG इत्याख्यं समविभजितं करोति ?
   (ग) कयोः अपि द्वयोः रेखाखण्डयोः नाम लिखन्तु ययोः कृते PE लम्बसमविभाजकः अस्ति ।
   (घ) किम् अधोलिखितं सत्यमस्ति ?
      (i) AC > FG
      (ii) CD = GH
      (iii) BC < EH

5.7 त्रिभुजानां वर्गीकरणम्

किं भवतां कृते न्यूनतमभुजानां बहुभुजस्य स्मरणम् अस्ति ? एषः एकः त्रिभुजः अस्ति । आयान्तु विभिन्नप्रकाराणां त्रिभुजान् पश्यामः ।

एतत् कुर्वन्तु

आयान्तु, अधो दत्तत्रिभुजानां कोणान् अपि च भुजान् चन्द्रिकया मापिकया च मापनं कुर्वन्तु । प्रदत्तकोष्ठके एतेषां मापनानि लिखन्तु ।



© NCERT not to be republished

त्रिभुजस्य कोणानां मापनम्	भवन्तः कोणानां विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?	त्रिभुजस्य भुजानां मापनम्
(a) ..60°.., ..60° .., ..60° ..,	सर्वे कोणाः समानाः	
(b) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(c) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(d) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(e) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(f) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(g) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	
(h) ……., ……., ……	_____ कोणाः _____	

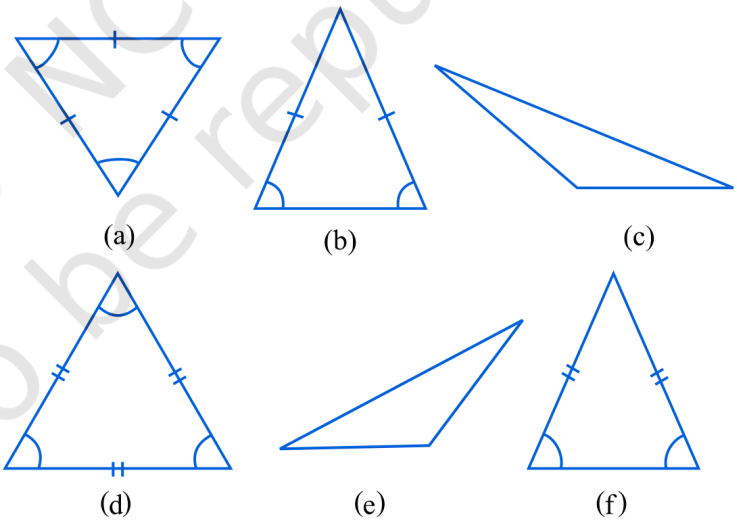
उपरि उक्तकोणानां त्रिभुजानां तथा च तेषां भुजानां मापनं ध्यानेन पश्यन्तु। किम् एतेषां विषये किमपि वक्तुं शक्यते ?

भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ?

- त्रिभुजः यस्मिन् सर्वे कोणाः समानाः सन्ति।
  यदि कस्यापि त्रिभुजस्य सर्वे कोणाः समानाः सन्ति तर्हि तस्य भुजाः अपि _____ सन्ति।
- त्रिभुजः यस्मिन् सर्वाः भुजाः समानाः सन्ति।
  यदि एकस्य त्रिभुजस्य सर्वे भुजाः समानाः सन्ति तर्हि तस्य कोणाः अपि _____ सन्ति।
- त्रिभुजः यस्मिन् द्वौ कोणौ समानौ स्तः तथा द्वौ भुजौ समानौ स्तः। यदि कस्यापि त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ समानौ स्तः तर्हि तस्य _____ कोणौ अपि समानौ भवतः।
- त्रिभुजः यस्मिन् के अपि द्वे भुजे समाने न स्तः। यदि कस्यापि त्रिभुजस्य कौ अपि द्वौ कोणौ समानौ न स्तः तर्हि तस्य कौ अपि द्वौ भुजौ समानौ न भवतः। यदि कस्यापि त्रिभुजस्य तिस्रः अपि भुजाः समानाः न सन्ति तर्हि तस्य त्रयः कोणाः अपि _____ न भवन्ति।

इतोऽपि काञ्चन त्रिभुजान् स्वीकुर्वन्तु तथा च उपर्युक्तस्य कथनस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। एतदर्थम् अस्माकं कृते त्रिभुजानां कोणानां तथा च तेषां भुजानां च पुनः मापनं कर्तव्यं भवति।

त्रिभुजाः विभिन्नश्रेणिषु वर्गीकृताः सन्ति तथा च तेषां कृते विशेषनाम अपि दत्तवन्तः। आयान्तु तत् किमिति पश्यामः।



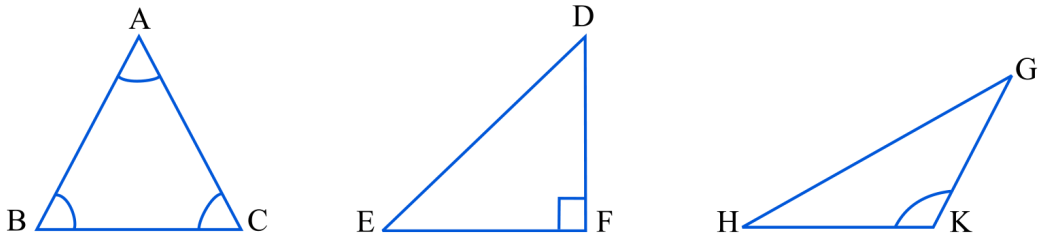
भुजानां आधारेण त्रिभुजानां नामकरणम्

एकः त्रिभुजः यस्य त्रयः अपि भुजाः समानाः न सन्ति तर्हि सः **विषमबाहुत्रिभुजः** [(c),(e)] इति उच्यते। एकः त्रिभुजः यस्य द्वौ भुजौ समानौ तर्हि सः समद्विबाहुत्रिभुजः इति उच्यते।

[(a), (d)] एतादृशीनां परिभाषाणां प्रयोगद्वारा तान् सर्वान् अपि त्रिभुजान् वर्गीकुर्वन्तु येषां भुजाः भवन्तः पूर्वमेव मापितवन्तः।

कोणानाम् आधारेण त्रिभुजानां नामकरणम्

यदि त्रिभुजस्य प्रत्येकं कोणः 90° तः न्यूनः स्यात् तर्हि सः एकः न्यूनकोणत्रिभुजः इत्युच्यते। यदि अस्य कोणः समकोणः अस्ति तर्हि सः समकोणत्रिभुजः इत्युच्यते। यदि अस्य कोणः 90° तः अधिकः स्यात् तर्हि सः एकः अधिककोणत्रिभुजः इत्युच्यते।



न्यूनकोणत्रिभुजः समकोणत्रिभुजः अधिककोणत्रिभुजः

उपरि उक्तपरिभाषाणामनुसारं तान् त्रिभुजान् वर्गीकुर्वन्तु येषां कोणं भवन्तः पूर्वमेव मापितवन्तः। एतेषु कति समकोणत्रिभुजाः सन्ति ?

एतत् कुर्वन्तु

अधोलिखितानां सामान्यचित्रम् आलेखितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

(a) एकः विषमबाहु-न्यूनकोण-त्रिभुजः

(b) एकः अधिककोण-समद्विबाहु-त्रिभुजः

(c) एकः समकोण-समद्विबाहु-त्रिभुजः

(d) एकः विषमबाहु-समकोण-त्रिभुजः

किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् अधोलिखित-आकृतीनाम् आलेखः सम्भवः अस्ति इति ?

(e) एकः अधिककोण-समबाहु-त्रिभुजः

(f) एकः समकोण-समबाहु-त्रिभुजः

(g) एकः त्रिभुजः यस्मिन् द्वौ समकोणौ स्याताम्।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु पुनः स्व-निष्कर्षान् लिखन्तु।

अभ्यासः 5.6

1. अधोदत्त-त्रिभुजानां प्रकारं लिखन्तु।

(a) त्रिभुजः यस्य भुजाः 7 से.मी. 8 से.मी. 9 से.मी. अस्ति।

(b) $\triangle ABC$ यस्मिन् AB = 8.7 सेमी, AC = 7 से.मी., BC = 6 से.मी. अस्ति।

(c) $\triangle PQR$ यस्मिन् PQ=QR=RP= 5 से.मी. अस्ति।

(d) $\triangle DEF$ यस्मिन् $m\angle D = 90^\circ$ अस्ति।

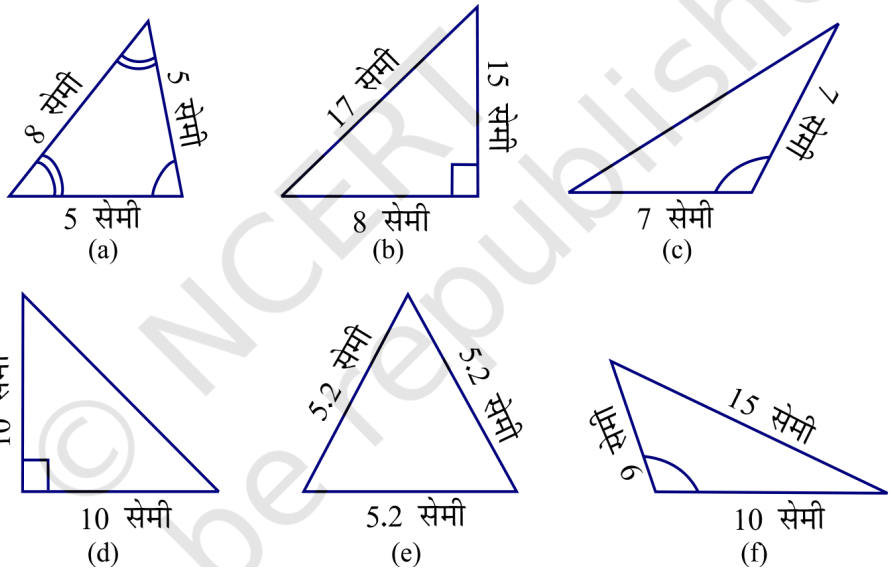
(e) $\triangle XYZ$ यस्मिन् $m\angle Y = 90^\circ$ अपि च XY = YZ अस्ति।

(f) $\triangle LMN$ यस्मिन् $m\angle L = 30^\circ$, $m\angle M = 70^\circ$, $m\angle N = 80^\circ$ अस्ति।

2. संयोजयत।

त्रिभुजस्य मापः	**त्रिभुजानां प्रकारः**
(i) समानलम्बमानस्य भुजत्रयं	(a) विषमबाहु-समकोण-त्रिभुजः
(ii) समानलम्बमानस्य भुजद्वयं	(b) समद्विबाहु-समकोण-त्रिभुजः
(iii) पृथक्-लम्बमानस्य सर्वे भुजाः	(c) अधिककोण-त्रिभुजः
(iv) 3 न्यूनकोणः	(d) समकोण-त्रिभुजः
(v) 1 समकोणः	(e) समबाहु-त्रिभुजः
(vi) समानलम्बमानस्य भुजैः सह 1 समकोणः	(f) न्यूनकोण-त्रिभुजः
	(g) समद्विबाहु-त्रिभुजः

3. अधोलिखितत्रिभुजानां मध्ये प्रत्येकं त्रिभुजस्य नामकरणं प्रकारद्वयेन कुर्वन्तु, (भवन्तः कोणानां प्रकारं केवलं दृष्ट्वा एव वक्तुं शक्नुवन्ति)।



4. अग्निशलाकानां साहाय्येन त्रिभुजनिर्माणस्य प्रयत्नं कुर्वन्तु । केचन आकृतिषु दर्शिताः सन्ति । किं भवन्तः अधोलिखितैः त्रिभुजं निर्मातुं शक्नुवन्ति ?

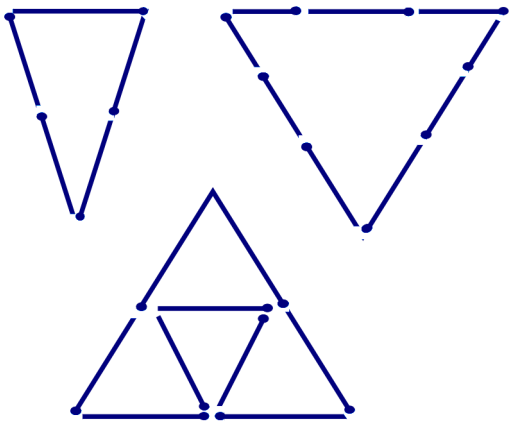
(a) 3 अग्निशलाकाः

(b) 4 अग्निशलाकाः

(c) 5 अग्निशलाकाः

(d) 6 अग्निशलाकाः

(अवधानं यच्छन्तु यत् भवद्भिः प्रत्येकं स्थितिषु उपलब्धसर्वाः अपि शलाकाः उपयोक्तव्याः)।



प्रत्येकं स्थितिषु त्रिभुजप्रकारस्य नाम वदन्तु। यति भवन्तः त्रिभुजान् निर्मातुं न शक्नुवन्ति तर्हि तस्य कारणानां विषये चिन्तयन्तु।

© NCERT not to be republished

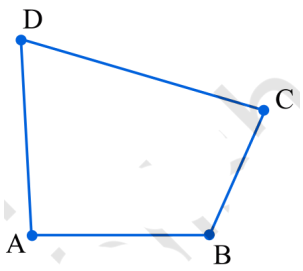
5.8 चतुर्भुजः

भवन्तः स्मरन्तः स्युः यत् चतुर्णां भुजानां बहुभुजः एकः चतुर्भुजः इत्युच्यते इति।

एतत् कुर्वन्तु

1. यष्टिद्वयं स्वीकुर्वन्तु पुनः तौ इत्थं स्थापयन्तु यथा तयोः द्वौ प्रान्तभागौ एकस्मिन् प्रान्ते मिलेताम्। अधुना अन्यं यष्टियुग्मं स्वीकृत्य अपि च स्थापयन्तु यथा तयोः द्वौ प्रान्तौ पूर्वतनयुग्मस्य स्वतन्त्रप्रान्तस्योपरि मिलितौ भवेताम्। इत्थम् अस्माभिः का आकृतिः प्राप्यते।

एषः एकः चतुर्भुजः अस्ति, यत् भवन्तः अग्रे पश्यन्तः सन्ति। अस्य चतुर्भुजस्य भुजाः AB, BC, ___, ___ सन्ति।
अस्य चतुर्भुजस्य कोणाः सन्ति। ते ∠ BAD, ∠ ADC, ∠ DCB अपि च _____ सन्ति।



AC अस्य विकर्णः अस्ति। अन्यः विकर्णः कः अस्ति ? प्रत्येकं भुजस्य अपि च विकर्णस्य लम्बं मापयन्तु। सर्वान् कोणान् अपि मापयन्तु।

2. यथा भवन्तः उपतितनं क्रियाकलापं कृतवन्तः तथा यष्टिचतुष्टयं स्वीकृत्य पश्यन्तु यत् किं भवन्तः एतैः तादृशचतुर्भुजान् निर्मातुं शक्नुवन्ति येषु
   (a) चत्वारः कोणाः अपि न्यूनकोणाः सन्ति।
   (b) एकः अधिककोणः अस्ति।
   (c) एकः समकोणः अस्ति।
   (d) द्वौ अधिककोणौ स्तः।
   (e) द्वौ समकोणौ स्तः।
   (f) विकर्णः परस्परं समकोणस्योपरि अस्ति।

आयतः

एतत् कुर्वन्तु

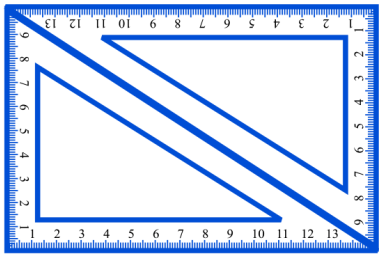
भवतां ज्यामितिपेटिकायां वर्गमापिकाद्वयम् अस्ति। एका 30°, 60°, 90° समूहकोणात्मक-वर्गमापिका अस्ति। द्वितीया तु 45°, 45°, 90°

समूहकोणात्मक-वर्गमापिका अस्ति।

(a) आकृतौ दर्शितरीत्या एते स्थापयन्तु। किं भवन्तः इत्थं निर्मितचतुर्भुजस्य नाम वक्तुं शक्नुवन्ति ? अस्य प्रत्येकं कोणस्य मापः किम् अस्ति ?

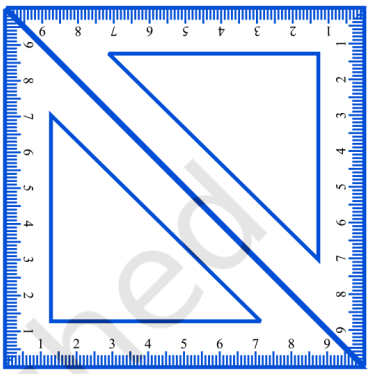
एषः चतुर्भुजः एकः **आयतः** अस्ति।

आयतस्य इतोऽपि एकं गुणं भवन्तः स्पष्टतया द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् अस्य सम्मुखभुजाः समानाः भवन्ति।



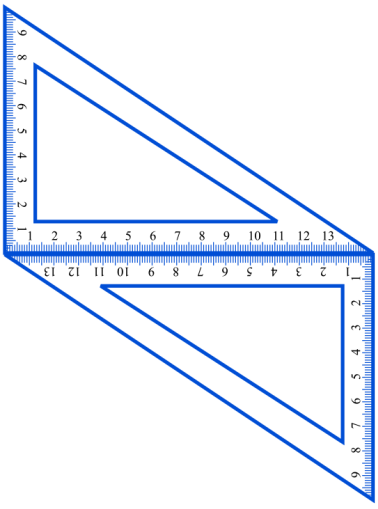
भवन्तः कान् अन्यगुणान् ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

(b) यदि अन्यं वर्गमापिकायुग्मं 45°, -45°, -90° कोणयुक्तं प्रयोगं कुर्मः तर्हि भवद्भिः एकः अन्यः चतुर्भुजः प्राप्यते। एषः एकः **वर्गः** अस्ति।



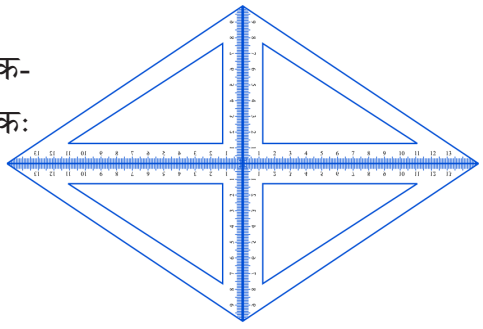
किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् सर्वेषां भुजानां लम्बाः समानाः सन्ति ? भवन्तः अस्य कोणानां तथा विकर्णानां विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? वर्गस्य अन्यगुणान् अपि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

(c) यदि भवन्तः 30°, -60°, -90° समूह कोणात्मकवर्गमापिकाम् आकृतौ दर्शितरीत्या एकस्यां अन्यस्थितौ स्थापयन्ति तर्हि भवद्भिः एकः **समानान्तर-चतुर्भुजः** प्राप्यते। किं भवन्तः पश्यन्तः सन्ति यत् अस्य सम्मुखभुजाः समानान्तराः सन्ति ? किम् अस्य सम्मुखभुजाः समानाः सन्ति ?



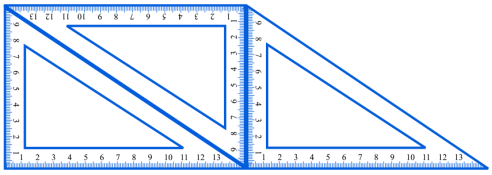
किम् अस्य विकर्णाः समानाः सन्ति ?

(d) यदि भवन्तः चतस्रः 30°, 60°, 90° समूहकोणात्मक-वर्गमापिकानां प्रयोगं कुर्वन्ति तर्हि भवद्भिः एकः **समचतुर्भुजः** प्राप्यते।



(e) यदि भवन्तः आकृतौ दर्शितरीत्या कतिचन वर्गमापिकानां प्रयोगं कुर्वन्ति तर्हि अस्माभिः एकः तादृशः चतुर्भुजः प्राप्यते यस्य द्वौ भुजौ समानान्तरौ भवतः ।

एषः एकः समलम्बः अस्ति ।



अत्र भवद्भिः कृतान्वेषणस्य एका रूपरेखा दीयते । एतत् पूर्णं कुर्वन्तु ।

चतुर्भुजः	सम्मुखभुजाः		सर्वे भजाः समानाः	सम्मुखकोणाः समानाः	विकर्णः	
	समानान्तरः	समानः			समानः	परस्परं लम्बाः
समानान्तर-चतुर्भुजः	आम्	आम्	न	आम्	न	न
आयतः			न			
वर्गः						आम्
समचुर्भुजः				आम्		
समलम्बः		न				

अभ्यासः 5.7

1. समीचीनम् अथवा न समीचीनम् इति लिखन्तु ।
   (a) आयतस्य प्रत्येकं कोणः समकोणः भवति ।
   (b) आयतस्य सम्मुखभुजानां लम्बः समानः भवति ।
   (c) वर्गस्य विकर्णः परस्परं लम्बः भवति ।
   (d) समचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समानलम्बाः भवन्ति ।
   (e) समानान्तरचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समानलम्बाः भवन्ति ।
   (f) समलम्बस्य सम्मुखभुजाः समानान्तराः भवन्ति ।
2. अधोलिखितानां कृते कारणं लिखन्तु ।
   (a) वर्गः, एकः विशेषप्रकारकः आयतः इति ज्ञातुं शक्यते ।
   (b) आयतः, एकः विशेषप्रकारकः समानान्तरचतुर्भुजः इति ज्ञातुं शक्यते ।
   (c) वर्गः, एकः विशेषप्रकारकः समचतुर्भुजः इति ज्ञातुं शक्यते ।
   (d) वर्ग-आयत-समचतुर्भुज-समानान्तरचतुर्भुजेषु प्रत्येकम् एकः चतुर्भुजः अपि वर्तते ।
   (e) वर्गः एकः समानान्तरचतुर्भुजः अपि अस्ति ।
3. एकः बहुभुजः समः भवति यदि तस्य सर्वाः भुजाः समानाः स्युः अपि च सर्वे कोणाः समानाः भवेयुः । किं भवन्तः एकं समचतुर्भुजम् अभिज्ञातुं शक्नुवन्ति ।

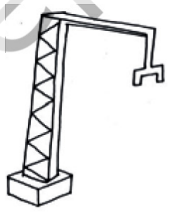
5.9 बहुभुजः

एतावत् पर्यन्तं भवन्तः 3 अपि च 4 भुजानां बहुभुजानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः । यौ क्रमेण त्रिभुजः तथा चतुर्भुजः इति कथयामः । अधुना वयं बहुभुजानाम् अवधारणायाः विस्तारणम् एतादृश-आकृतिनां रूपेण कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः यासु चतुर्भ्यः अधिकभुजाः भवन्ति । वयं बहुभुजान् तेषां भुजानां संख्यानाम् आधारेण अधोलिखितप्रकारेण वर्गीकर्तुं शक्नुमः ।

भुजानां संख्या	नाम	आकृतिः
3	त्रिभुजः	
4	चतुर्भुजः	
5	पञ्चभुजः	
6	षड्भुजः	
8	अष्टभुजः	

भवन्तः एतादृशान् आकारान् दैनिकजीवने पश्यन्ति । गवाक्षाः, द्वाराणि, भित्तयः, अवधानिकाः, कृष्णफलकानि, अभ्यासपुस्तकानि इत्यादीनि सर्वाणि अपि आयताकारे भवन्ति । धरातल-इष्टिकाः (Floor tiles) अपि आयताकाराः भवन्ति । त्रिभुजानां दृढतायाः कारणेन एव यान्त्रिकनिर्माणेषु लाभप्रदरूपेण अस्य आकारस्य प्रयोगं कुर्वन्ति ।

निर्माणकार्येषु त्रिभुजानाम् अनुप्रयोगः भवति

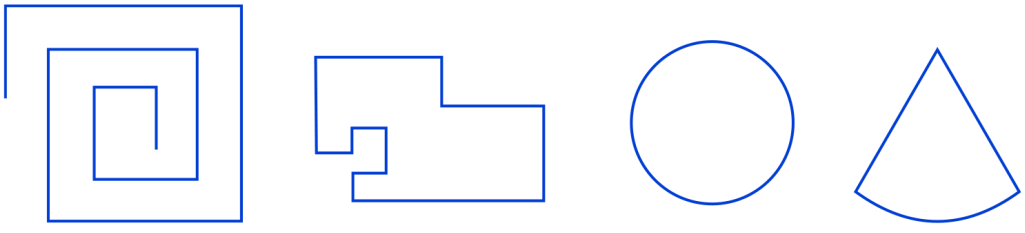


मधुमक्षिका स्वगृहनिर्माणे षड्भुज-आकारस्य उपयोगित्वं जानाति

स्वपरिवेशे पश्यन्तु यत् भवन्तः एतान् आकारान् कुत्र कुत्र प्राप्तुं शक्नुवन्ति इति ।

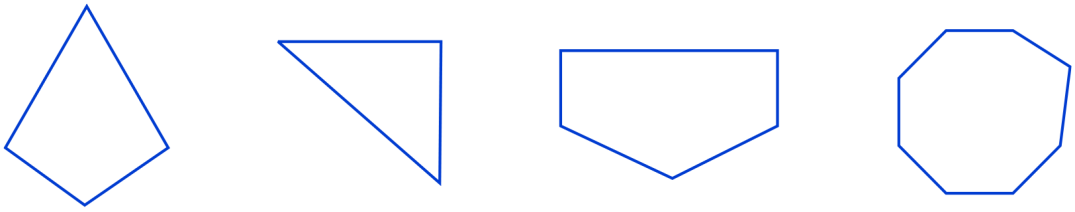
अभ्यासः 5.8

1. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् अधोदत्तासु आकृतिषु कतमाः आकृतयः बहुभुजाः सन्ति । यदि अत्र कोऽपि बहुभुजः नास्ति तर्हि कारणं वदन्तु ।



(a) (b) (c) (d)

2. प्रत्येकं बहुभुजस्य नाम लिखन्तु।



(a) (b) (c) (d)

उपरि दतानां प्रत्येकं बहुभुजानां कृते इतोऽपि द्वे उदाहरणे यच्छन्तु।

3. एकस्य समषड्भुजस्य एकं सामान्यचित्रं रचयन्तु। तस्य कानि अपि त्रीणि शीर्षाणि स्वीकृत्य एकं त्रिभुजं निर्मान्तु। अभिजानन्तु यत् भवन्तः कं प्रकारकं त्रिभुजम् आलिखितवन्तः ?

4. एकस्य समाष्टचतुर्भुजस्य सामान्यं चित्रं रचयन्तु। [यदि भवन्तः इच्छन्ति तर्हि वर्गाङ्कितकर्गदस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।] अस्य अष्टभुजस्य चत्वारि शीर्षाणि संयुज्य एकम् आयतं निर्मान्तु।

5. कस्यापि बहुभुजस्य विकर्णः, तस्य कयोरपि द्वयोः भुजयोः (आसन्नभुजौ त्यक्त्वा) योजनेन प्राप्तः भवति (एषः अस्य भुजाः न भवन्ति)। एकस्य पञ्चभुजस्य सामान्य चित्रं रचयन्तु अपि च तस्य विकर्णम् आलिखन्तु।

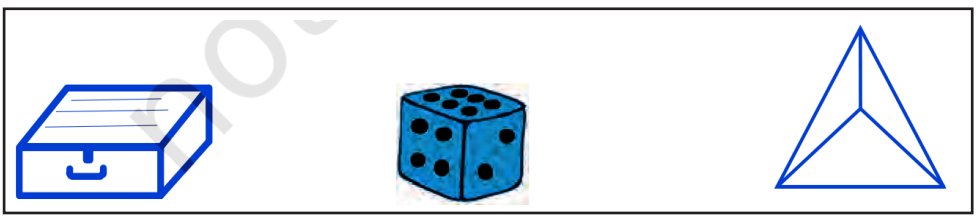
5.10 त्रिधाकाराः आकृतयः

अत्र काश्चन विशिष्टाकृतयः प्रस्तूयमानाः सन्ति याः भवन्तः स्वदैनिकजीवने पश्यन्ति। प्रत्येकम् आकारः एकः घनः अस्ति। एषः एकः समतलः आकारः नास्ति।

एतत् कन्दुक गोलाकाररूपेण अस्ति।

पयोहिमः शङ्कु-आकारे अस्ति।

एषः सङ्ग्राहकः एकः वेलनाकारः अस्ति।



एषा पेटिका, लम्बकोणिक-समानान्तर-षट्फलक-रूपेण(cuboid) अस्ति।

एषः अक्षः एकः घनः अस्ति।

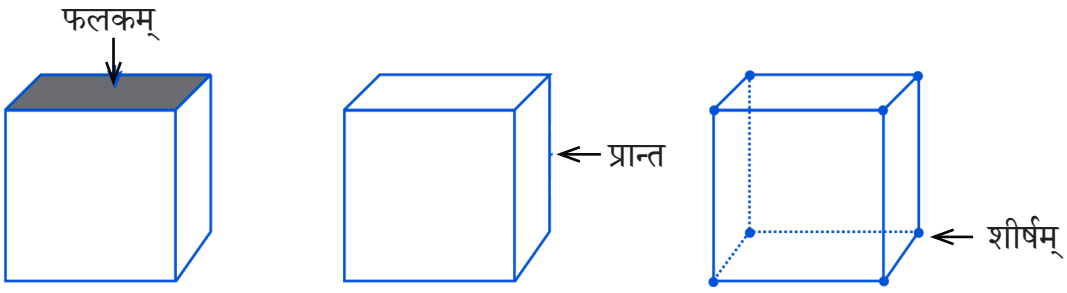
एषः चतुष्फलक-आकारः अस्ति।

केषाञ्चन पञ्चवस्तूनां नाम वदन्तु यानि गोलाकारतुल्यानि स्युः।

केषाञ्चन तादृश-पञ्चवस्तूनां नाम वदन्तु यानि शङ्कुतुल्यानि स्युः।

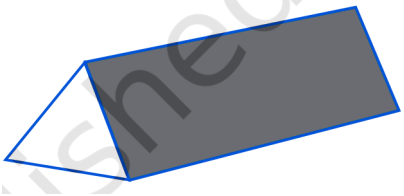
फलकं, प्रान्तभागः अपि च शीर्षम्

अनेक-त्रिधाकारयुक्तासु आकृतिषु वयं तेषां फलकान्, प्रान्तभागान् अपि च शीर्षाणि सरलतया ज्ञास्यामः। एतेभ्यः त्रिभ्यः पदेभ्यः अर्थात् फलकं, प्रान्तभागः, शीर्षम् इत्यादिभ्यः वयं किं जानीमः ?



उदाहरणार्थम्, एकं घनं स्वीकुर्वन्तु।

घनस्य प्रत्येकं उपरितनं समतलम् एकं फलकम् अस्ति। अस्य समतलद्वयम् एकस्मिन् रेखाखण्डे मिलति यः घनस्य एकः **प्रान्तभागः** इत्युच्यते । प्रान्तत्रयम् एकस्मिन् बिन्दौ मिलति यत् घनस्य **शीर्षम्** इत्युच्यते।



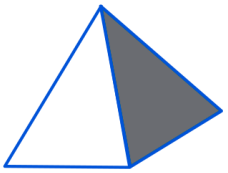
पुरतः **समपार्श्वस्य**(prism) चित्रं दत्तम्। किं भवन्तः अमुं स्व-प्रयोगशालायां दृष्टवन्तः ? अस्य फलकद्वयं त्रिभुजाकारम् अस्ति। अतः एषः समपार्श्वः **त्रिभुजाकारकः** समपार्श्वः इत्युच्यते।

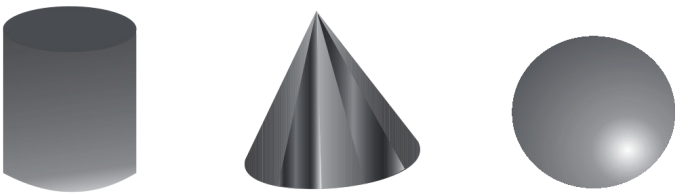
एतत् त्रिभुजाकारं फलकं समपार्श्वस्य आधारः इत्यपि कथ्यते । अस्य समपार्श्वस्य द्वे सर्वसमे त्रिभुजाकारफलके स्तः। एकः **आधारः** अपि च अन्यः उपरितनभागः शिरः इत्युच्यते। एतद्द्वयोः फलकयोः अतिरिक्तम् अन्यफलकं समानान्तरचतुर्भुजः अस्ति ।

यदि समपार्श्वस्य आधारः आयताकारः भवति तर्हि समपार्श्वः एकः **आयताकारकः** समपार्श्वः इति कथ्यते। आयताकार- समपार्श्वस्य कृते किं भवद्भिः स्मर्यते यत् एकम् अन्यत् नाम किम् अस्ति इति ?

एकः **त्रिशङ्कुः** सः आकारः अस्ति यस्याम् आधारस्य फलकं कस्यापि बहुभुजस्य आकारकं भवितुं शक्नोति अपि च शिष्टफलकं त्रिभुजाकारं भवति।

पुरतः वर्ग-त्रिशङ्कोः एकं चित्रं दत्तम् अस्ति। अस्य आधारः एकः वर्गः अस्ति। किं भवन्तः एकस्य त्रिभुजाकारस्य त्रिशङ्कोः कल्पनां कर्तुं शक्नुवन्ति ? अस्य एकं सामान्यचित्रं निर्मातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

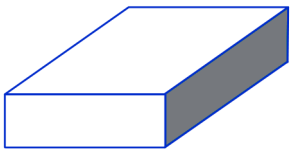




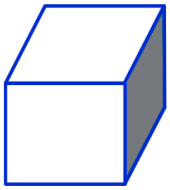
वेलने, शङ्कौ, अपि च वलये कोऽपि ऋजुः प्रान्तः न भवति। शङ्कोः आधारः कः अस्ति ? किं एषः एकः वृत्तः अस्ति ? वेलनस्य आधारः अपि एकः वृत्तः अस्ति। वेलनस्य उपरितनः शिरोभागः अपि आधारवत् सर्वसमः वृत्तः अस्ति। गोलस्य किमपि फलकं न भवति। अस्य विषये चिन्तयन्तु !

एतत् कुर्वन्तु

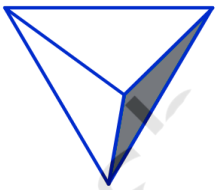
1. एकं लम्बकोणिक-समानान्तर-षट्फलकम्, एकम् आयताकारकम् इव अस्ति। अस्य 6 फलकानि सन्ति। प्रत्येकं फलकस्य 6 प्रान्तभागाः सन्ति। प्रत्येकं फलकस्य 4 कोणाः सन्ति (यानि अस्य शीर्षाणि इत्युच्यन्ते)।



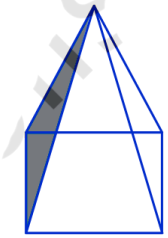
2. एकः घनः एतादृशं लम्बकोणिक-समानान्तर-षट्फलकम् अस्ति यस्य सर्वेऽपि प्रान्ताः समानलम्बकाः भवन्ति।
   अस्य _____ फलकानि सन्ति।
   प्रत्येकं फलकस्य _____ प्रान्तभागाः सन्ति।
   प्रत्येकं फलकस्य _____ शीर्षाणि सन्ति।



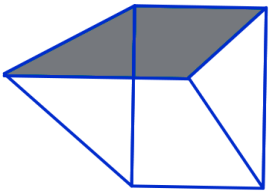
3. एकस्य त्रिभुजाकार-त्रिशङ्कोः आधारः एकः त्रिभुजः भवति। एषः चतुष्फलकम् इत्यपि कथ्यते।
   फलकम् : _____
   प्रान्तभागः : _____
   कोणः : _____



4. एकस्य वर्गत्रिशङ्कोः आधारः एकः वर्गः भवति।
   फलकम् : _____
   प्रान्तभागः : _____
   कोणः : _____

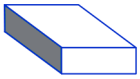


5. एकः त्रिभुजाकारः समपार्श्वः इत्याख्यः बहुरूपदर्शक-(Kaleidoscope) आकारकः भवति। अस्य आधारः अपि च उपरितनः शिरोभागः त्रिभुजाकारकः भवति।
   फलकम् : _____
   प्रान्तभागः : _____
   कोणः : _____



अभ्यासः 5.9

1. संयोजयन्तु।

(a)	शङ्कुः	(i)	
(b)	गोलः	(ii)	
(c)	वेलनम्	(iii)	
(d)	लम्बकोणिक-समानान्तर-षट्फलकम्	(iv)	

(e) त्रिशङ्कुः (v)

एतेषाम् आकाराणां कृते इतोऽपि उदाहरणद्वयं ददतु।

2. आकारान् अभिजानन्तु।

(a) भवतां ज्यामितिपेटिका
(b) एका इष्टिका
(c) एका अग्निपेटिका
(d) मार्गनिर्माण-वेलनयन्त्रम्
(e) एकं (मोदकम्) लड्डुकम्

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः

1. एकस्य रेखाखण्डस्य द्वयोः अन्तर्बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरं तस्य लम्बः इत्युच्यते।
2. रेखाखण्डानां तोलनं कर्तुम् एकस्याः अंशाङ्किक-मापिकायाः अपि च एकस्याः विभाजन्याः प्रयोगं कुर्मः।
3. यदा घट्याः एका सूची एकस्मात् स्थानात् अन्यत्र चलति तदा अस्माभिः तत्र कोणस्य एकम् उदाहरणं प्राप्यते।

   सूच्याः एकं सम्पूर्णं परिभ्रमणं 1 **भ्रमणम्** इत्युच्यते।

   समकोणः $\frac{1}{4}$ भ्रमणम् अस्ति एवम् **ऋजुकोणः** $\frac{1}{2}$ भ्रमणम् अस्ति। कोणान् अंशेषु मापयितुं चन्द्रिकायाः प्रयोगं कुर्मः।

   समकोणस्य मापः 90° एवम् ऋजुकोणस्य मापः 180° भवति। एकः कोणः यस्य मापः समकोणात् न्यूनः अस्ति, न्यूनकोणः इत्युच्यते। तथा च यस्य मापः समकोणात् अधिकः एवम् ऋजुकोणात् न्यूनः अस्ति तर्हि अधिककोणः इत्युच्यते।

   एकः प्रतिवर्तिकोणः ऋजुकोणात् अधिकः अपि च सम्पूर्णकोणात् न्यूनः भवति।
4. प्रतिच्छेदिरेखाद्वयं परस्परं लम्बरूपम् इत्युच्यते यदि तयोः मध्यस्थः कोणः 90° भवति।
5. एकस्य रेखाखण्डस्य लम्ब-समद्विभाजकः तदुपरि लम्बः भवति तथा तं समानभागद्वये विभाजति।
6. कोणानाम् आधारेण त्रिभुजाः अधोलिखितप्रकारेण वर्गीकृताः भवन्ति।

त्रिभुजानां कोणानां प्रकारः	नाम
प्रत्येकं कोणः न्यूनकोणः	न्यूनकोणत्रिभुजः
एकः कोणः समकोणः	समकोणत्रिभुजः
एकः कोणः अधिककोणः	अधिककोणत्रिभुजः

7. भुजानां लम्बानाम् आधारेण त्रिभुजाः अधोलिखितप्रकारेण वर्गीकृताः भवन्ति।

त्रिभुजानां भुजानां लम्बः	नाम
त्रयः अपि भुजाः असमानाः	विषमबाहुत्रिभुजः
द्वौ भुजौ समानौ	समद्विबाहुत्रिभुजः
त्रयः अपि भुजाः समानाः	समबाहुत्रिभुजः

8. बहुभुजानां नाम तेषां भुजानां संख्यायाः आधारेण अधोलिखितप्रकारकाः भवन्ति।

भुजानां संख्या	बहुभुजानां नाम
3	त्रिभुजः
4	चतुर्भुजः
5	पञ्चभुजः
6	षड्भुजः
8	अष्टभुजः

9. चतुर्भुजाः तेषां गुणानाम् आधारेण वर्गीकृताः भवन्ति।

गुणाः	चतुर्भुजानां नाम
समानान्तररेखानां युग्मद्वयम्	समानान्तरचतुर्भुजः
4 समकोणयुक्तः समानान्तरचतुर्भुजः	आयतः
4 समानभुजयुक्ताः समानान्तरचतुर्भुजाः	समचतुर्भुजः
4 समकोणयुक्तः समचतुर्भुजः	वर्गः

10. वयं स्वपरिवेशे अनेक-त्रिधाकारयुक्तान् आकारान् पश्यामः । एतेषु घनः, लम्बकोणिक-समानान्तर-षट्फलकं, गोलः, वेलनं, शङ्कुः, त्रिशङ्कुः एते आकाराः अन्तर्भवन्ति।

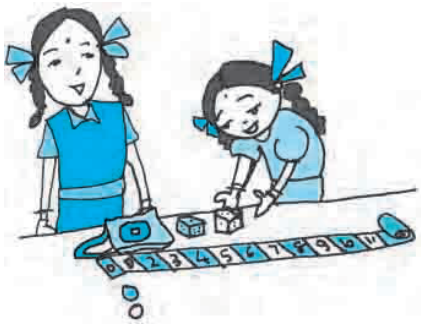
पूर्णाङ्काः

अध्यायः 6

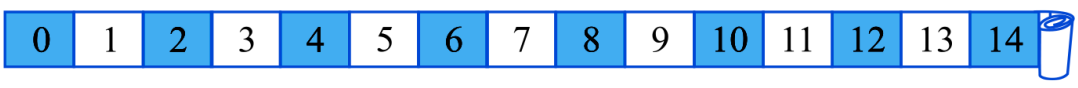
6.1 भूमिका

सुनीतायाः मातुः समीपे 8 कदलीफलानि सन्ति । सुनीतया स्व-मित्रैः सह स्वल्पकालाय प्रवासार्थं गन्तव्यम् अस्ति। सा पाथेयार्थं 10 कदलीफलानि नेतुम् इच्छति। किं तस्याः माता तस्यै 10 कदलीफलानि दातुं शक्नोति ? तस्याः समीपे अपेक्षितकदलीफलानि न सन्ति इत्यतः सा तस्याः प्रतिवेशिन्याः समीपात् 2 कदलीफले ऋणरूपेण स्वीकृत्य पश्चात् प्रत्यावर्तनाय आश्वासनं ददाति । सुनीतायै 10 कदलीफलानि दानानन्तरं तस्याः मातुः पार्श्वे कति कदलीफलानि अवशिष्टानि भवन्ति ? तस्याः पार्श्वे एकमपि कदलीफलं न अवशिष्यते, किन्तु तया स्वप्रतिवेशिन्यै 2 कदलीफले प्रत्यर्पणीये स्तः । यदा सा कतिचन कदलीफलानि प्राप्नोति, भावयन्तु 6 कदलीफलानि, तदा सा 2 कदलीफले प्रत्यार्पयति अपि च तस्याः पार्श्वे केवलं 4 कदलीफलानि अवशिष्टानि भवन्ति ।

रोनाल्डः एकां लेखनीं क्रेतुं विपणिं गच्छति । तस्य पार्श्वे केवलं 12 रूप्यकाणि सन्ति, परन्तु एकस्याः लेखन्याः मूल्यं 15 रू. सन्ति । आपणिकः तस्य 3 रूप्यकाणि ऋणरूपेण पुस्तके लिखति । परन्तु सः केन प्रकारेण स्मर्तुं शक्नोति यत् रोनाल्डेन 3 रूप्यकणि देयानि उत तेन स्वीकर्तव्यानि सन्ति इति ? किं सः अमुम् ऋणराशिं केनापि वर्णेन अथवा चिह्नेन व्यक्तीकर्तुं शक्नोति ?



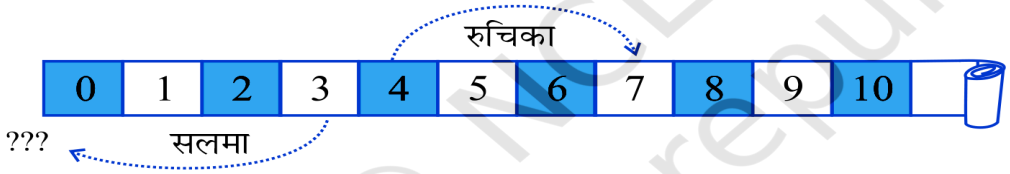
रुचिका अपि च सलमा समाने दूरे 0 तः 25 पर्यन्तम् अङ्काङ्कितया एकया संख्यापट्टिकया सह क्रीडन्त्यौ स्तः ।



प्रारम्भे तु ते द्वे शून्यचिह्नस्य उपरि एकां वर्णरञ्जितां चीटिकां स्थापयतः। एकस्मिन् स्यूते वर्णरञ्जितम् अक्षद्वयं स्थापितम् अपि च तौ क्रमशः निष्कास्यतः। तयोः एकः अक्षः रक्तवर्णीयः अस्ति अन्यः नीलवर्णीयः। यदि अक्षः रक्तवर्णीयः अस्ति तर्हि तस्य क्षेपणेन यः अङ्कः प्राप्तः भवति चीटिका तावत् पर्यन्तम् अग्रे स्थाप्यते। यदि अक्षः नीलवर्णीयः अस्ति तर्हि तस्य क्षेपणेन यः अङ्कः प्राप्तः भवति चीटिका तावत् पर्यन्तं पृष्ठे स्थाप्यते। प्रत्येकं चालनानन्तरम् अक्षौ पुनः स्यूते स्थाप्येते यतो हि द्वयोः कृते अपि अक्षक्षेपणार्थं समानावकाशः लभ्येत। रुचिका-सलमयोः मध्ये या 25 इति चिह्नपर्यन्तं प्रथमं गच्छति साः विजयिनी इति मन्यते। सा क्रीडारम्भं करोति। रुचिका रक्ताक्षं प्राप्नोति अपि च तस्य क्षेपणेन 4 अङ्कस्य प्राप्तिः भवति। अनेन प्रकारेण सा चीटिकां पट्टिकायाः उपरि 4 अङ्काङ्कितस्थाने स्थापयति। सलमा अपि स्यूतात् रक्तवर्णीयम् अक्षं स्वीकरोति अपि च तस्य क्षेपणेन 3 इत्यङ्कं प्राप्नोति। सा चीटिकां पट्टिकायाः उपरि 3 अङ्काङ्कितस्थाने स्थापयति।

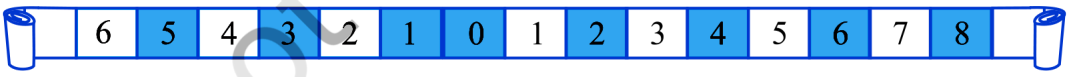
द्वितीयप्रयत्ने रुचिका रक्ताक्षेण 3 इत्यङ्कं प्राप्नोति। सलमा नीलाक्षेण 4 इत्यङ्कं प्राप्नोति। किं भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् द्वितीयप्रयत्नानन्तरं ते स्व-चिटिकां कस्मिन् कस्मिन् स्थाने स्थापयन्ति इति ?

रुचिका अग्रे चलति अपि च 4 + 3, अर्थात् 7 इति स्थाने स्व-चीटिकां स्थापयति।

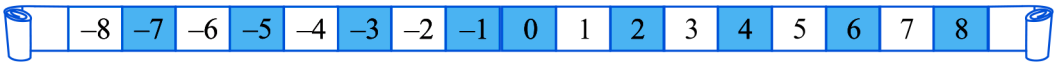


सलमा स्व-चीटिकां शून्ये स्थापयति। रुचिका अस्य उपरि प्रश्नम् उत्थापितवती तथा च सा अवदत् यत् तया शून्यात् पृष्ठे भवितव्यम् इति। सलमा अङ्गीकरोति। परन्तु शून्यात् पृष्ठभागे किमपि नास्ति। ताभ्यां किं करणीयम् ?

तदा सलमा च रुचिका च अन्यस्मिन् पार्श्वे अस्याः पट्टिकायाः वर्धनं कृतवत्यौ। ते अन्यपार्श्वे एकस्याः नीलपट्टिकायाः प्रयोगं कृतवत्यौ।



अधुना सलमा परामर्शं दत्तवती यत् सा शून्यात् एकं स्थानं पृष्ठे अस्ति इत्यतः तत् स्थानं नीलवर्णेन 1 इति अङ्कितं कर्तुं शक्यते। यदि चीटिका नीलवर्णयुक्तस्य 1 इत्यस्य उपरि वर्तते तर्हि तस्य पृष्ठस्थानं नीलयुक्त-द्वे भवति। एवमेव तदपेक्षया पृष्ठस्थानं नीलयुक्त-त्रीणि भवति। एवमेव प्रकारेण ते पृष्ठे चलनस्य निर्णयं स्वीकुर्वतः। परन्तु ताभ्यां नीलकर्गदं न प्राप्तम्। तदा रुचिका उक्तवती यत् यदि वयं विपरीतदिशि चलन्तः स्याम तर्हि अस्माभिः अन्यस्मिन् पार्श्वे एकस्य चिह्नस्य प्रयोगः करणीयः इति। अनेन प्रकारेण, पश्यन्तु यत् शून्यात् लघु-संख्यायाः पक्षे चलनेन अस्माभिः एकस्य चिह्नस्य प्रयोगः अवश्यं कर्तव्यः अस्ति। एतदर्थं संख्यायाः पुरतः



ऋण (-) चिह्नस्य प्रयोगः क्रियते। अनेन इदं प्रदर्शितं भवति यत् ऋणात्मकचिह्नयुक्ताः संख्याः शून्यात् लघुतमाः भवन्ति। एताः ऋणात्मकसंख्याः इत्युच्यन्ते।

एतत् कुर्वन्तु

(कः कुत्र अस्ति)

भावयन्तु यत् डेविडः अपि च मोहनः 0 स्थानात् विपरीतदिशि चलनस्य प्रारम्भं कृतवन्तौ। भावयन्तु यत् 0 इत्यस्य दक्षिणभागे चलितपादाः '+' चिह्नेन निरूपिताः भवन्ति अपि च 0 इत्यस्य वामभागे चलितपादाः '-' चिह्नेन निरूपिताः भवन्ति। यदि मोहनः शून्यात् दक्षिणभागे 5 पादान् चलति तर्हि तत् '+5' इति निरूपितं कर्तुं शक्यते अपि च डेविडः शून्यात् वामभागे 5 पादान् चलति तर्हि तत् '-5' इति निरूपयितुं शक्यते। अधुना अधोलिखित-स्थानान् + अथवा – चिह्नेन निरूपितान् कुर्वन्तु।

(a) शून्यात् वामभागे 8 पादाः

(b) शून्यात् दक्षिणभागे 7 पादाः

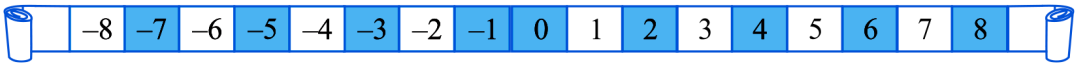
(c) शून्यात् दक्षिणभागे 11 पादाः

(d) शून्यात् वामभागे 6 पादाः

एतत् कुर्वन्तु

(मम पृष्ठभागे कः आगच्छन् वर्तते)

पूर्वतन-उदाहरणेषु वयं दृष्टवन्तः यत् यदि एकया धनात्मकसंख्यया समानं चलनीयम् अस्ति तर्हि वयं दक्षिणभागे चलामः। यदि अनेन प्रकारेण केवलं 1 पादः चलितः भवति तर्हि अस्माभिः तस्याः संख्यायाः



परवर्तिसंख्या प्राप्ता भवति।

अधोलिखितसंख्यानां परवर्तिसंख्यां लिखन्तु।

संख्या	परवर्तिनीसंख्या
10	
8	
-5	
-3	
0	

यदि अस्माभिः ऋणात्मकसंख्यया समानं चलनीयं चेत् तर्हि वामभागे गन्तव्यम्।

यदि वामभागे केवलं 1 पादः चलितः भवति तर्हि अस्माभिः तस्याः संख्यायाः पूर्ववर्तिसंख्या प्राप्ता भवति।

	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

अधुना अधोलिखितसंख्यानां पूर्ववर्तिसंख्यां लिखन्तु।

संख्या	पूर्ववर्तिनी संख्या
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मया सह एकं चिह्नं स्थापयन्तु

वयं तु दृष्टवन्तः यत् कासाञ्चन संख्यानां पुरतः ऋणचिह्नं (-) भवति । उदाहरणार्थं यदि वयम् आपणिकाय दीयमानं रोनाल्डस्य देयराशिं दर्शयितुम् इच्छामः तर्हि वयम् अमुम् ' – ' इति लिखामः।

अधः एकस्य आपणिकस्य वित्तविवरण-पञ्जिका (account) दर्शिता अस्ति या केषाञ्चन विशेषवस्तूनां विक्रयणेन प्राप्तलाभस्य उत नष्टस्य विवरणं ददाति।

वस्तूनां नाम	लाभः	नष्टम्	समुचितचिह्नद्वारा निरूपणम्
सर्षपतैलम्	150 रू		.....
तण्डुलम्		250 रू	.....
कृष्णमरीचिका	225 रू		.....
गोधूमः	200 रू		.....
कलायतैलम्		330 रू	.....

यतो हि लाभः अपि च नष्टम् एतत् द्वयमपि विपरीतस्थितिरूपेण अस्ति इत्यतः यदि लाभं '+' चिह्नेन निरूपयामः तर्हि नष्टं ' – ' चिह्नेन निरूपयामः। उपरि दर्शितायां वित्तविवरण्यां समुचितचिह्नस्य प्रयोगपुरस्सरं रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

एवमेव अन्यस्थितयः, यत्र वयम् एतादृशचिह्नानां प्रयोगं कुर्मः ताः अधोभागे दत्ताः सन्ति।

यथा यथा वयम् अधः चलामः, औन्नत्यं न्यूनं भवति । इत्थं समुद्रस्तलात् अधस्तनम् औन्नत्यं वयं एकया ऋणात्मकसंख्यया व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः अपि च समुद्रस्तलात् उपरितनम् औन्नत्यं एकया धनात्मकसंख्यया व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः।

यदि अर्जितधनराशिं '+' चिह्नेन निरूपितं कुर्मः तर्हि व्ययीकृतं धनराशिं ' – ' चिह्नेन निरूपयितुं शक्नुमः। इत्थं 0° C इत्यस्य उपरितनं तापमानं '+' चिह्नेन एवम् अधस्तनं तापमानं ' – ' चिह्नेन निरूपितं कुर्मः।

उदाहरणार्थं, 0° C तः 10° न्यूनः तापमानः -10° C इति लिख्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखतान् समुचितचिह्नेन सह लिखन्तु।

a) समुद्रतलात् 100 मी. अधः

b) 0° C तः 25° C उपरितनः तापमानः

c) 0° C तः 15° C न्यूनः तापमानः

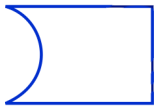
d) 0 तः न्यूनां काः अपि पञ्चसंख्याः

6.2 पूर्णाङ्काः

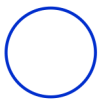
सर्वस्मात् पूर्वं ज्ञातसंख्याः प्राकृतसंख्याः, अर्थात् 1,2,3,4,... सन्ति। यदि वयं प्राकृतसंख्यानां सङ्ग्रहे शून्यं सम्मिलितं कुर्मः तर्हि अस्माभिः संख्यानां एकः नूतनसङ्ग्रहः लभ्यते। एताः संख्याः पूर्णसंख्याः इत्युच्यन्ते। इत्थं 0,1,2,3,4,... पूर्णसंख्याः सन्ति । द्वितीये अध्याये भवन्तः एतासां संख्यानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः। अधुना अस्माभिः ज्ञातं यत् ऋणात्मकसंख्याः, यथा $-1, -2, -3, -4, -5,...$ अपि भवन्ति । यदि वयं पूर्णसंख्याभिः सह एताः ऋणात्मकसंख्याः मेलयामः तर्हि अस्माभिः संख्यानाम् एकः नूतनसङ्ग्रहः प्राप्तः भवति, यः $1,2,3,..., -1, -2, -3, -4,...$ अस्ति। संख्यानाम् एषः सङ्ग्रहः पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहः इत्युच्यते।

अस्मिन् सङ्ग्रहे $1,2,3,...$ धनात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते अपि च $-1, -2, -3,...$ ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते।

आयान्तु, अमुम् अधोलिखितया कृतिद्वारा अवगन्तुं प्रयत्नं कुर्मः। भावयन्तु एताः आकृतयः सम्मुखे लिखितसंख्यानाम् अथवा तासां सङ्ग्रहाणां निरूपणं करोति।

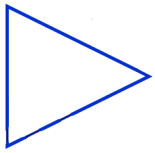


प्राकृतसंख्याः



शून्यम्

पूर्णसंख्याः

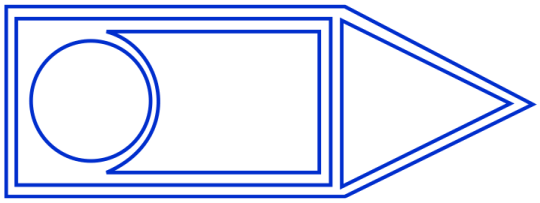


ऋणात्मकपूर्णाङ्काः

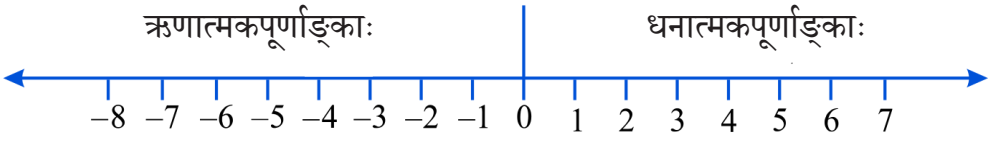
पूर्णाङ्काः

अधुना पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहम् अधोलिखित-आरेखणद्वारा अवगमयितुं शक्यते, यस्मिन् पूर्वोक्ताः सर्वाः संख्याः तथा तासां सङ्ग्रहाः सम्मिलिताः सन्ति।

पूर्णाङ्काः

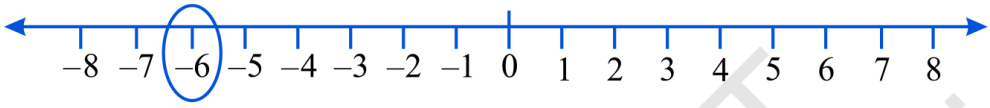


6.2.1 संख्यारेखायाः उपरि पूर्णाङ्कानां निरूपणम्

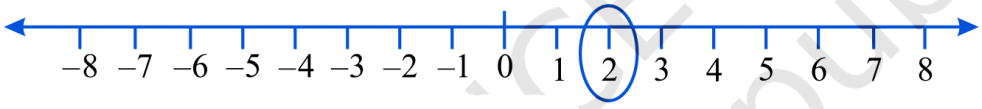


एकां रेखाम् आलिख्य तस्याः उपरि समानदूरे काञ्चनबिन्दून् स्थापयन्तु, यथा उपरितने चित्रे दर्शितम् अस्ति। एतेषु एकं बिन्दुं शून्येन अङ्कितं कुर्वन्तु। शून्यस्य दक्षिणभागे स्थिताः बिन्दवः धनात्मकपूर्णाङ्काः सन्ति अपि च ते +1,+2,+3 अथवा 1,2,3, इत्यादिभिः अङ्किताः सन्ति। वामभागे स्थिताः बिन्दवः ऋणात्मकपूर्णाङ्काः सन्ति अपि च ते –1, – 2, – 3 इत्यादिभिः अङ्किताः सन्ति।

अस्यां रेखायां – 6 इति अङ्कितं कर्तुं वयं शून्यस्य वामभागे 6 बिन्दुपर्यन्तं चलामः। (आकृतिः 6.1)



अस्यां रेखायां +2 इति अङ्कितं कर्तुं वयं शून्यस्य दक्षिणभागे 2 बिन्दुपर्यन्तं चलामः (आकृतिः 6.2)



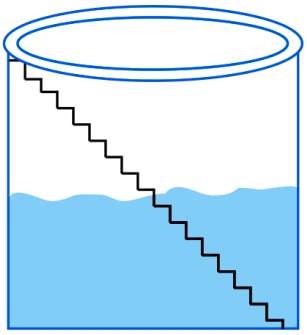
प्रयत्नं कुर्वन्तु

संख्यारेखायाः उपरि 3, 7, - 4, - 8, -1 अपि च – 3 इत्येताः संख्याः अङ्किताः कुर्वन्तु।

6.2.2 पूर्णाङ्कानां क्रमबद्धता

एकस्मिन् ग्रामे रमणः अपि च इमरानः वसतः यत्र सोपानयुक्तः कश्चन कूपः अस्ति। अस्मिन् कूपे तलपर्यन्तं आहत्य 25 सोपानानि सन्ति।

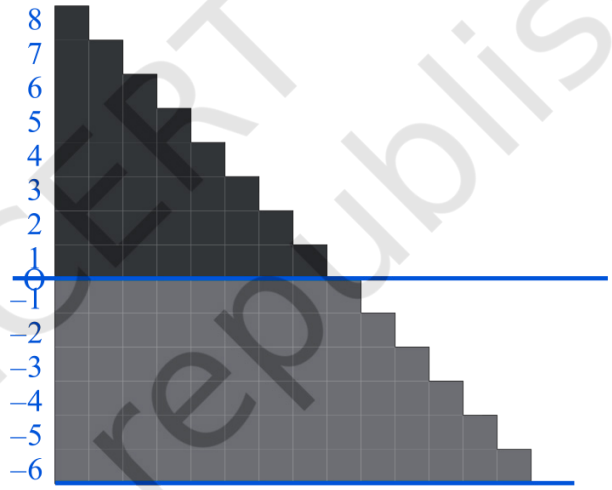
एकस्मिन् दिने तौ द्वौ अपि कूपस्य अन्तः गतौ। तत्र तौ प्राप्तवन्तौ यत् जलस्तरपर्यन्तं 8 सोपानानि सन्ति। तौ एतत् द्रष्टुं निर्धारितवन्तौ यत् वर्षापतनानन्तरं कूपः कियत्पर्यन्तं पूरितः भविष्यति इति। तौ अस्मिन् समये यः जलस्तरः अस्ति तस्योपरि शून्यम् अङ्कितं कृतवन्तौ तथा तस्योपरि स्थितेषु सोपानेषु क्रमशः 1,2,3,4,... इति अङ्कितवन्तौ। वर्षायाः अनन्तरं तौ दृष्टवन्तौ यत् जलस्तरः 6 सोपानपर्यन्तं वर्धितः अस्ति इति। कतिचन मासानन्तरं, तौ दृष्टवन्तौ यत् जलस्तरः शून्यात् 3 सोपानानि अधः गतः अस्ति इति। अधुना तौ जलस्तरस्य अधः पतनं सङ्गतसोपानैः अङ्कितं कृत्वा द्रष्टुं चिन्तितवन्तौ। किं भवन्तः तयोः कृते साहाय्यम् आचरन्ति ?



सहसा रमणः स्मरति यत् सः एकस्य बृहत्-बन्धस्य उपरि शून्यादपि अधस्तनाः लिखिताः संख्याः दृष्टवान् आसीत् । इमरानः एतत् प्रति ध्यानाकर्षणं करोति यत् शून्यस्य उपरितनानां संख्यानां तथा च अधस्तनानां संख्यानां भेदम् अवगन्तुं यः कोऽपि विधिः स्यादेव इति । तदा रमणः स्मरति यत् शून्यात् अधोलिखितानाम् अङ्कानां पुरतः ऋणचिह्नम् आसीत् । अतः सः शून्यात् अधः स्थितयोः द्वयोः सोपानयोः उपरि –1, – 2, – 3 इति अङ्कितवान् ।

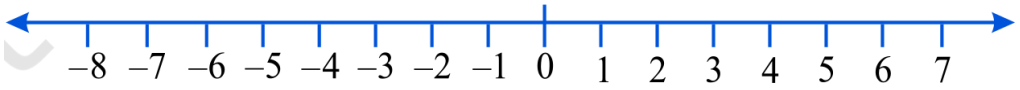
अतः अधुना जलस्तरः – 3 अस्ति (शून्यात् त्रीणि सोपानानि अधः) । एतदनन्तरं, जलस्य उपयोग-कारणात् जलस्तरः इतोऽपि एक-सोपानपर्यन्तम् अधः पतति अपि च – 4 भवति । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् – 4 < – 3 अस्ति इति ।

उपरि उक्तम् उदाहरणं चिन्तयन्तः मञ्जूषाम् > अथवा < चिह्नेन पूरयन्तु ।



0	☐	-1	-100	☐	-101
-50	☐	-70	50	☐	-51
-53	☐	-5	-7	☐	1

आयान्तु, अधुना पुनः तान् पूर्णाङ्कान् पश्यामः ये एकस्याः संख्यारेखायाः उपारि निरूपिताः सन्ति ।



आकृतिः 6.3

वयं जानीमः यत् 7 > 4 भवति एवम् उपरि आलिखितया संख्यारेखया वयं पश्यामः यत् संख्या 7 संख्यया 4 इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति (आकृतिः 6.3)।

इत्थं, 4 > 0 अपि च संख्या 4 संख्यया 0 इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति । अधुना संख्या 0 संख्यया – 3 इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति इत्यतः 0 > – 3 अस्ति । पुनः संख्या – 3 संख्यया – 8 इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति इत्यतः – 3 > – 8 अस्ति ।

इत्थं, वयं पश्यामः यत् संख्यारेखायां यदा वयं दक्षिणभागे चलामः तर्हि संख्यायाः मानम् अधिकं भवति तथा च वामभागे यदि वयं चलामः तर्हि संख्यायाः मानं न्यूनं भवति।

अतः, $-3 < -2, -2 < -1, -1 < 0, 0 < 1, 1 < 2, 2 < 3$ इत्यादयः।

अतः पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहम् ...., – 5, –4, –3,– 2,– 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 … इति अपि लेखितुं शक्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितसंख्यायुग्मान् > अथवा < इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तः तुलनां कुर्वन्तु।

0 ☐ -8 ; -1 ☐ -15

5 ☐ -5 ; 11 ☐ 15

0 ☐ 6 ; -20 ☐ 2

रोहिणी उपर्युक्तप्रश्नैः निम्नलिखितनिष्कर्षान् प्राप्नोति।

a) प्रत्येकं धनात्मकपूर्णाङ्कः प्रत्येकं ऋणात्मक-पूर्णाङ्कात् बृहद्भवति।

b) शून्यं प्रत्येकं धनात्मकपूर्णाङ्कात् लघु भवति।

c) शून्यं प्रत्येकं ऋणात्मकपूर्णाङ्कात् बृहद्भवति।

d) शून्यम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः अपि न तथा धनात्मकपूर्णाङ्कः अपि न अस्ति।

e) कापि संख्या शून्यात् दक्षिणभागे कियद्दूरं भवति तावती बृहती भवति।

f) कापि संख्या शून्यात् वामभागे कियद्दूरं भवति तावती लघ्वी भवति।

किं भवन्तः ताम् अनुमोदयन्ति ? उदाहरणं ददतु।

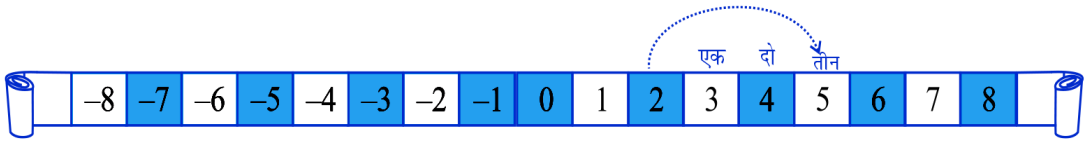
उदाहरणम् 1 : संख्यारेखां दृष्ट्वा अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।
–8 अपि च –2 एतयोः मध्ये काः काः पूर्णाङ्कसंख्याः सन्ति ? एतासु का संख्या बृहत्तमा अस्ति ? तथा का संख्या लघुतमा अस्ति ?

समाधानम् : –8 अपि च –2 एतयोः मध्ये स्थितसंख्याः –7, – 6, – 5, – 4 अपि च –3 सन्ति। एतासु –3 बृहत्तमा संख्या अस्ति अपि च –7 लघुतमा संख्या आस्ति।

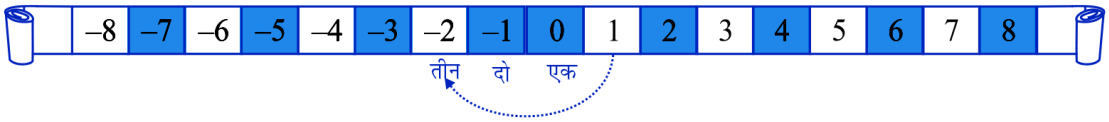
यदि अहं शून्यस्य उपरि न स्याम् तर्हि मम चलनेन किं भवति ?

आयान्तु, सलमया अपि च रुचिकया पूर्वं क्रीडिक्रीडायाः उपरि विचारं कुर्मः। भावयन्तु यत् रुचिकायाः चीटिका 2 संख्यायाः उपरि अस्ति। अग्रिम-पर्याये तया रक्ताक्षः प्राप्यते अपि च तस्य क्षेपणेन संख्या 3 प्राप्ता भवति। अस्यार्थः एवम् अस्ति यत् सा 2 संख्यायाः दक्षिणभागे 3 स्थानं चलिष्यति।

एवमेव सा 5 संख्यायाः उपरि आगच्छति।



अपरस्मिन् पक्षे यदि सलमा 1 संख्यायाः उपरि आसीत् अपि च स्यूतात् नीलाक्षं निष्कासयति, यस्य क्षेपणेन सा 3 संख्यां प्राप्नोति। अस्यार्थः एवम् अस्ति यत् सा 1 संख्यायाः वामभागे 3 स्थानं चलति। इत्थं सा – 2 प्राप्नोति।



संख्यारेखां दृष्ट्वा अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

उदाहरणम् 2 : (a) – 3 इत्यस्य उपरि एकः पिञ्जः स्थापितः अस्ति। – 9 पर्यन्तं गन्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशायां कति चरणानि गन्तव्यानि भवन्ति ?

(b) यदि वयं संख्यायाः – 6 इत्यस्याः दक्षिणभागे इतोऽपि 4 चरणानि चलामः तर्हि कां संख्यां प्राप्नुमः ?

समाधानम् : (a) अस्माभिः – 3 इत्यस्य वामभागे इतोऽपि 6 चरणानि गन्तव्यानि भवन्ति।

(b) यदि वयं संख्यायाः – 6 इत्यस्याः दक्षिणभागे इतोऽपि 4 पदानि चलामः तर्हि वयं – 2 संख्यां प्राप्नुमः।

अभ्यासः 6.1

1. अधोलिखितानां विपरीतं लिखन्तु।

   (a) भारे वृद्धिः (b) 30 कि.मी उत्तरदिशा

   (c) 326 क्रि.पूर्वम् (d) 700 रू इत्यस्य नष्टम् (e) समुद्रतलात् 100 मी. उपरि

2. अधोलिखितेषु प्रयुक्तसंख्याः समुचितं चिह्नं संस्थाप्य पूर्णाङ्कानां रूपेण लिखन्तु।

   a) एकं वायुयानं भूमेः 2000 मीटर् औन्नत्ये उड्डयति।

   b) एकं जलयानं समुद्रस्तरात् 800 मी. अन्तः चलति।

   c) वित्तकोशे 200 रू. नियोजनम्।

   d) वित्तकोशात् 700 रू. निष्कासनम्।

3. अधोलिखितसंख्याः संख्यारेखायां निरूपिताः कुर्वन्तु।

   (a) + 5 (b) – 10 (c) + 8 (d) – 1

4. संलग्नाकृतौ एका ऊर्ध्वाधरा संख्यारेखा दर्शिता अस्ति या पूर्णाङ्कान् निरूपितान् करोति। इमां रेखां पश्यन्तु अपि च अधोलिखितबिन्दूनां स्थानं जानन्तु।

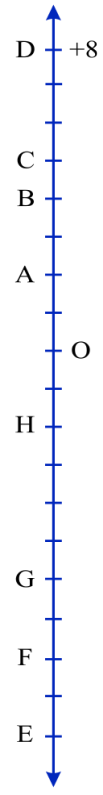
   (a) यदि बिन्दुः D पूर्णाङ्कः +8 अस्ति तर्हि – 8 युक्तः बिन्दुः कः अस्ति ?

   (b) किं G एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? अथवा धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ?

   (c) बिन्दोः B अपि च E इत्यनयोः सङ्गतपूर्णाङ्कौ लिखन्तु।

   (d) अस्याः संख्यारेखायाः उपरि अङ्कितबिन्दूनां मध्ये कस्य मानं न्यूनतमं अस्ति ?

   (e) सर्वान् बिन्दून् तेषां मानानाम् अवरोहणक्रमे लिखन्तु।

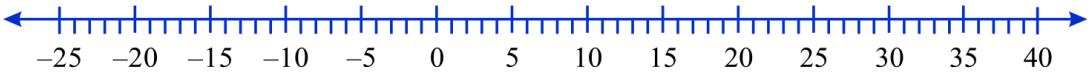


5. अधः वर्षस्य विशेषदिनेषु भारतस्य पञ्चस्थानेषु स्थिततापमानसूची दत्ता अस्ति।

स्थानम्	**तापमानः**
सियाचिनम्	0° C तः 10° C अधः _____
शिमला	0° C तः 2° C अधः _____
अहमदाबादः	0° C तः 30° C उपरि _____
देहली	0° C तः 20° C उपरि _____
श्रीनगरम्	0° C तः 5° C अधः _____

(a) एतेषां स्थानानां तापमानान् पूर्णाङ्कानां रूपेण रिक्तस्थानेषु लिखन्तु।

(b) अधोलिखितसंख्यारेखा तापमानान् डिग्री-सेल्शियस् (Degree Celsius) इत्यस्मिन् निरूपितान् करोति।



संख्यारेखायाः उपरि उक्तस्थानानां नाम तेषां तापमानेन सह अङ्कितं कुर्वन्तु।

(c) कतमं स्थानं अधिकं शीतलं भवति।

(d) तेषां स्थानानां नाम लिखन्तु येषां तापमानं 10° C तः उपरि स्यात्।

6. अधोलिखितयुग्मेषु कतमा संख्या संख्यारेखायाः उपरि अन्यसंख्यायाः दक्षिणभागे अस्ति।

(a) 2, 9 (b) – 3, – 8 (c) 0, – 1

(d) – 11, 10 (e) –6, 6 (f) 1, –100

7. अधः दत्तयुग्मानां पूर्णाङ्कानां मध्ये विद्यमानपूर्णाङ्कान् लिखन्तु। (आरोहणक्रमे)

(a) 0 अपि च – 7 (b) – 4 अपि च 4

(c) – 8 अपि च – 15 (d) – 30 अपि च – 23

8. (a) – 20 तः अधिकतरान् चतुरः ऋणात्मकपूर्णाङ्कान् लिखन्तु।

(b) – 10 तः न्यूनतरान् चतुरः ऋणात्मक-पूर्णाङ्कान् लिखन्तु।

9. अधोलिखितकथनं सत्यम् अथवा असत्यम् इति लिखन्तु। यदि कथनम् असत्यम् अस्ति, तर्हि सत्यं कुर्वन्तु।

(a) संख्यारेखायाः उपरि – 8, – 10 इत्यस्य दक्षिणभागे अस्ति।

(b) संख्यारेखायाः उपरि – 100, – 50 इत्यस्य दक्षिणभागे अस्ति।

(c) लघुतमः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः – 1 अस्ति।

(d) – 26, – 25 तः बृहदस्ति।

10. एकां संख्यारेखाम् आलिखन्तु अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) यदि वयं – 2 इत्यस्य दक्षिणभागे 4 पादान् चलामः तर्हि वयं कस्याः संख्यायाः समीपं प्राप्स्यामः ?

(b) यदि वयं 1 इत्यस्य अनन्तरं 5 पादान् चलामः तर्हि वयं कस्याः संख्यायाः समीपं प्राप्स्यामः ?

(c) यदि वयं संख्यारेखायां – 8 उपरि स्मः तर्हि – 13 प्राप्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशि गन्तव्यं भवति ?

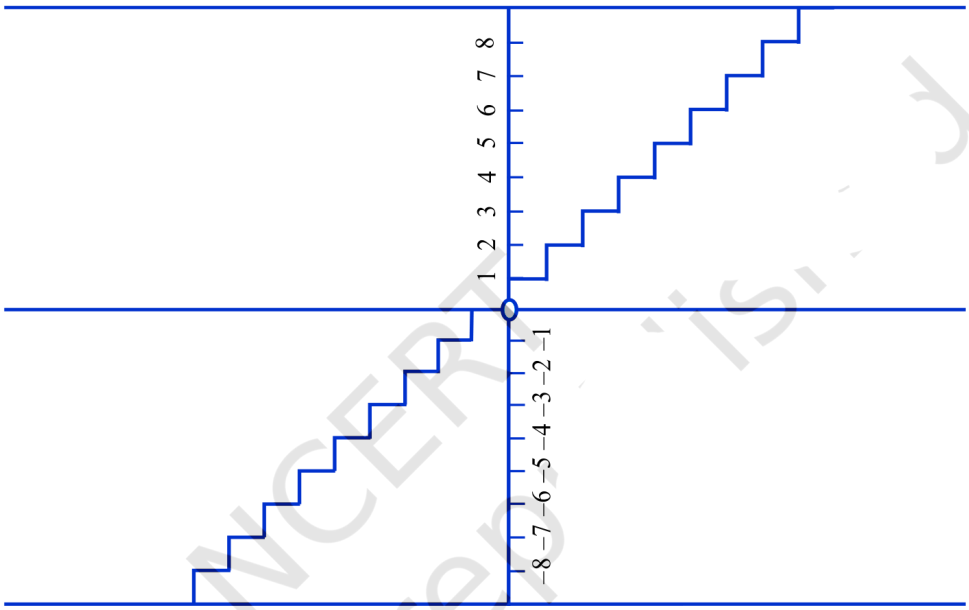
(d) यदि वयं संख्यारेखायां – 6 उपरि स्मः तर्हि – 1 प्राप्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशि गन्तव्यं भवति ?

6.3 पूर्णाङ्कानां योगः

एतत् कुर्वन्तु

(उपरि अपि च अधः गमनम्)

मोहनस्य गृहे छदेः उपरि गन्तुम् अपि च अधः वस्तुभण्डागारं गन्तुं सोपानानि निर्मितानि सन्ति। आयान्तु, छदेः उपरि गन्तुं विद्यमानसोपानानां संख्याः धनात्मकपूर्णाङ्काः इति तथैव वस्तुसंरक्षणालस्य सोपानानां संख्याः ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इति भावयन्तु तथा भूमिस्तरे निरूपितसंख्यां 0 इति भावयन्तु।



अधोलिखितप्राश्नानाम् उत्तरं ददतु अपि च स्व-उत्तरान् पूर्णाङ्कानां रूपेण लिखन्तु।

(a) भूमितलात् 6 सोपानानि उपरि चलन्तु।

(b) भूमितलात् 4 सोपानानि अधः चलन्तु।

(c) भूमितलात् 5 सोपानानि उपरि चलन्तु अपि च पुनः ततः 3 सोपानानि उपरि चलन्तु।

(d) भूमितलात् 6 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च पुनः ततः 2 सोपाने अधः चलन्तु।

(e) भूमितलात् 5 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च ततः 12 सोपानानि उपरि चलन्तु।

(f) भूमितलात् 8 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च पुनः ततः 5 सोपानानि अधः चलन्तु।

(g) भूमितलात् 7 सोपानानि उपरि चलन्तु अपि च पुनः ततः 10 सोपानानि अधः चलन्तु।

अमीना एतान् अधोलिखितरीत्या लिखितवती।

(a) +6

(b) – 4

(c) (+5) + (+ 3) = + 8

(d) (- 6) + (- 2) = - 4

(e) (-5) + (+ 12) = + 7

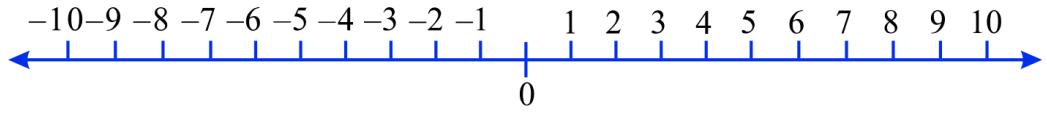
(f) (- 8) + (+ 5) = - 3

(g) (+ 7) + (- 10) = 17

सा काञ्चन दोषान् कृतवती। किं भवन्तः तस्याः उत्तरस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति अपि च दोषान् समीकर्तुं प्रभवन्ति ?

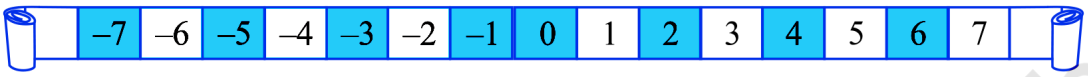
प्रयत्नं कुर्वन्तु

भूमेः उपरि क्षैतिजसंख्यारेखायाः रूपेण एकाम् आकृतिं रचयन्तु यथा अधः दर्शिता अस्ति। उपरि उक्तोदाहरणे दत्तप्रश्नैः सदृशान् कानिचन प्रश्नान् निर्मान्तु अपि च पुनः तान् समाधातुं स्व-मित्रान् कथयन्तु।



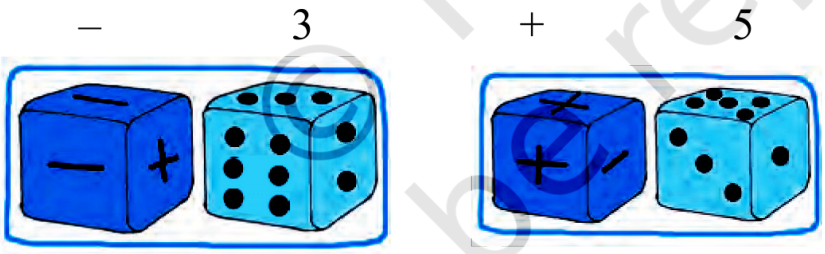
एका क्रीडा

एकां संख्यापट्टिकां स्वीकुर्वन्तु यस्याः उपरि + 25 तः – 25 पर्यन्तं पूर्णाङ्काः लिखिताः स्युः।



द्वौ अक्षौ स्वीकुर्वन्तु ययोः मध्ये एकस्य उपरि 1 तः 6 पर्यन्तं संख्याः अङ्किताः स्युः एकस्य उपरि त्रीणि "+" चिह्नानि अपि च त्रीणि "-" चिह्नानि अङ्कितानि भवेयुः।

क्रीडकाः भिन्न-भिन्नवर्णात्मकान् पिञ्जान् संख्यापट्टिकायाः उपरि 0 स्थानस्य उपरि स्थापयन्ति। द्वयोः अपि अक्षयोः क्षेपणानन्तरं क्रीडकः पश्यति यत् सः तयोः अक्षयोः किं प्राप्तवान् इति। यदि प्रथमाक्षात् 3 अपि च द्वितीयाक्षात् - आगच्छति तर्हि तेन – 3 प्राप्तम् अस्ति। यदि प्रथमाक्षात् 5 अपि च द्वितीयाक्षात् + आगच्छति तर्हि तेन + 5 प्राप्तम् अस्ति।

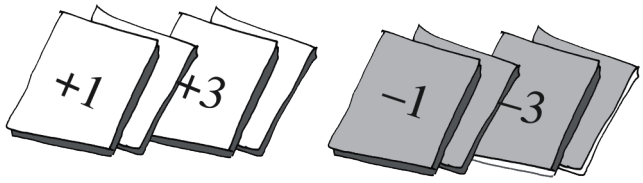


यदि क्रीडकेन + चिह्नं प्राप्यते तर्हि सः अग्रिमायां दिशि (+ 25 प्रति) चलति यदि केनापि क्रीडकेन – चिह्नं प्राप्यते तर्हि सः पृष्ठतः चलति (- 25 प्रति)।

प्रत्येकं क्रीडकः अक्षद्वयमपि सहैव क्षिपति। यः क्रीडकः यस्य पिञ्जः – 25 संख्यां प्राप्नोति सः क्रीडातः बहिर्भवति अपि च यस्य पिञ्जः + 25 संख्यां स्पृशति सः विजयी भवति।

भवन्तः इमामेव क्रीडां एतादृशानि 12 स्फोरकपत्राणि येषामुपरि + 1, +2, + 3, + 4, + 5, + 6 तथा – 1, – 2, – 3, – 4, – 5, – 6 इति संख्याः अङ्किताः स्युः, तानि स्वीकृत्य अपि क्रीडितुं शक्नुवन्ति। स्फोरकपत्रस्वीकारस्य प्रत्येकं प्रयत्नस्यानन्तरं एतानि मिश्रीकुर्वन्तु।

कमला, रेश्मा अपि च मीनूः इमां क्रीडां क्रीडन्ति



कमला त्रिषु उत्तमप्रयत्नेषु + 3, + 2,+ 6 प्राप्तवती । सा तस्याः गणनकं + 11 उपरि स्थापितवती । रेश्मा – 5, + 3, + 1 प्राप्तवती । सा – 1 उपरि स्थापितवती । मीनूः + 4, – 3, – 2 प्राप्तवती । सा कुत्र स्थापयेत् ? – 1 उपरि अथवा + 1 उपरि ?

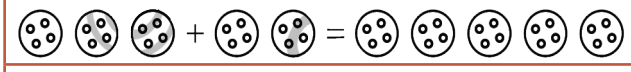
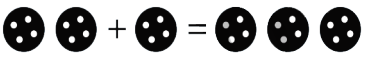
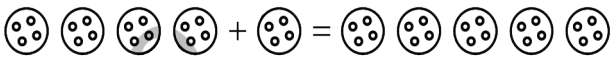
एतत् कुर्वन्तु

द्वयोः विभिन्नवर्णयोः तद्यथा श्वेतस्य कृष्णवर्णस्य च द्वौ कुड्मलौ स्वीकुर्वन्तु । आयान्तु कञ्चित् श्वेतकुड्मलं (+ 1) इति कृष्णकुड्मलम् (- 1) च इति रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु । एकः श्वेत-कृष्णयुग्मः शून्यं व्यक्तीकरोति अर्थात् [1 + (- 1) = 0] ।

अधोलिखितसारिण्यां, पूर्णाङ्काः वर्णीयकुड्मलानां साहाय्येन दर्शिताः सन्ति ।

विभिन्नवर्णीय-कुड्मलाः	पूर्णाङ्कः
	= 5
	= -3
	= 0

आयान्तु एतेषां वर्णीयकुड्मलानां साहाय्येन पूर्णाङ्कानां योजनं कुर्मः । अधोलिखितसारिणीं पश्यन्तु अपि च तान् पूर्णं कुर्वन्तु ।

	(+3) + (+2) = +5
	(-2) + (-1) = -3
	.....
=	.....

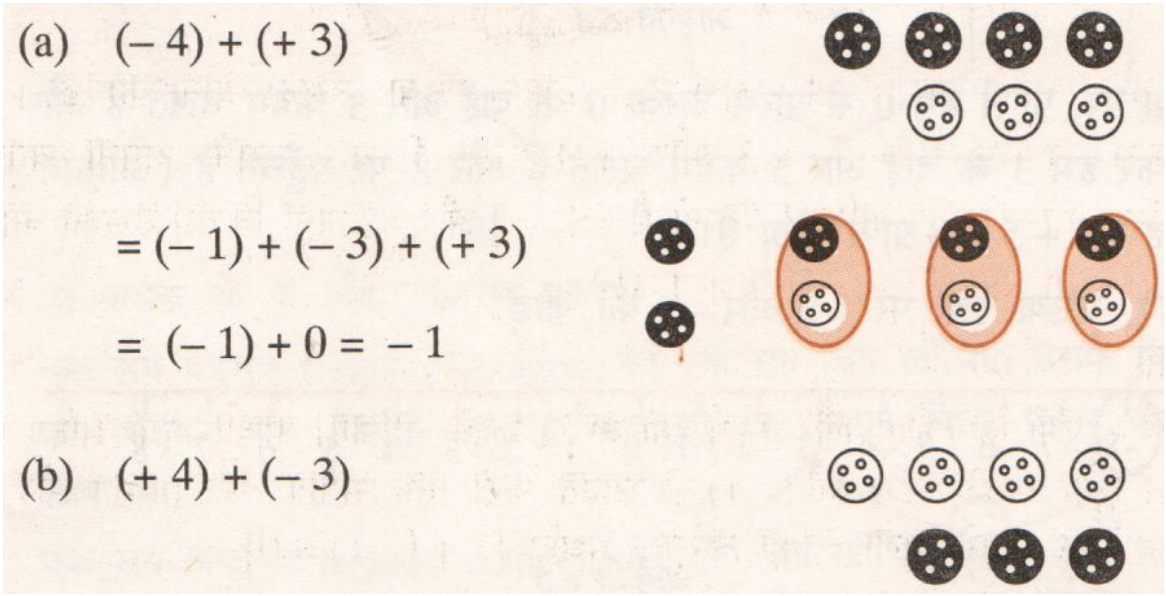
यदि भवन्तः धनात्मकपूर्णाङ्कद्वयं प्राप्नुवन्ति तर्हि तस्य योजनं कुर्वन्तु । यथा (+ 3) + (+ 2) = + 5 [3 + 2] अस्ति । यदि भवन्तः ऋणात्मकपूर्णाङ्कद्वयं प्राप्नुवन्ति तर्हि तदापि तस्य योजनं कुर्वन्तु किन्तु उत्तरे ऋणचिह्नं (-) स्थापयन्तु । यथा (- 2) + (- 1) = - 3 अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां योगं जानन्तु ।

(a) (- 11) + (- 12)
(b) (+10) + (+ 4)
(c) (- 32) + (- 25)
(d) (+ 23) + (+ 40)

अधुना एतेषां कुड्मलानां साहाय्येन धनात्मकम् एकं पूर्णाङ्कं ऋणात्मकेन एकेन पूर्णाङ्केन सह योजयन्तु। कुड्मलान् युग्मेषु अपसारयन्तु। अर्थात् एकं श्वेतकुड्मलम् अपि च एकं कृष्णकुड्मलं सहैव अपसारयन्तु [यतः (+1) + (- 1) = 0]। अवशिष्टानां कुड्मलानां निरीक्षणं कुर्वन्तु।



भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 4 – 3 = 1 अस्ति अपि च - 4 + 3 = - 1 अस्ति।

अतः यदि भवद्भिः एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन सह योजनीयः अस्ति तर्हि भवद्भिः संख्यात्मकमानं दृष्ट्वा योजनीयः (संख्याद्वये अपि बृहत्संख्याम् अन्वेष्टुं तया सह विद्यमानं चिह्नं त्यजन्तु)। साहाय्यार्थम् इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि अधोलिखितानि सन्ति।

(c) (+ 5) + (- 8) = (+ 5)+ (- 5) + (- 3) = 0 + (- 3) = (- 3)

(d) (+ 6) + (- 4) = (+ 2) + (+ 4) + (- 4) = (+ 2) + 0 = + 2

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां योगफलं जानन्तु।

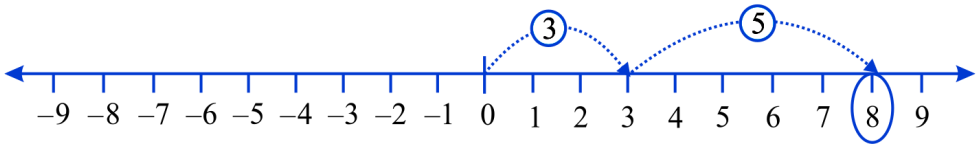
(a) (- 7) + (+ 8) (b) (- 9) + (+ 13)

(c) (+ 7) + (- 10) (d) (+ 12) + (-7)

6.3.1 संख्यारेखायाः उपरि पूर्णाङ्कानां योजनं (योगः)

विभिन्नवर्णात्मकानां पिञ्जानां प्रयोगपुरस्सरं पूर्णाङ्कानां योजनं सर्वदा सरलं न भवति। किम् अस्माभिः योजनं कर्तुं संख्यारेखायाः प्रयोगः करणीयः अस्ति ?

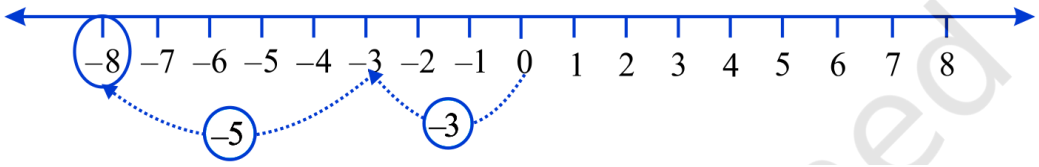
(i) आयान्तु, संख्यारेखायाः उपरि 3 अपि च 5 योजयन्तु।



आकृतिः 6.4

संख्यारेखायाः उपरि पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 3 पादान् स्थापयामः अपि च 3 इति प्राप्नुमः। पुनः वयं 3 इत्यस्य दक्षिणभागे 5 पादान् चलामः अपि च 8 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.4)। इत्थम् अस्माभिः 3 + 5 = 8 प्राप्तः भवति।

(ii) आयान्तु संख्यारेखायाः उपरि – 3 अपि च – 5 योजयन्तु।



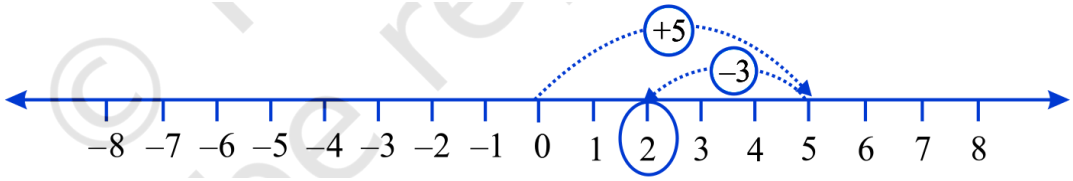
आकृतिः 6.5

संख्यारेखायाः उपरि पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य वामभागे 3 पादान् चलामः अपि च – 3 प्राप्नुमः। पुनः वयं – 3 तः वामभागे इतोऽपि 5 पादान् चलित्वा – 8 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.5)।

इत्थम्, अस्माभिः (- 3) + (- 5) = - 8 प्राप्तः भवति।

वयं पश्यामः यत् यदि वयं किमपि धनात्मकपूर्णाङ्कद्वयं योजयामः चेत् तर्हि योगः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति। यदि वयम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कद्वयं योजयामः तर्हि योगः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवति।

(iii) कल्पनां कुर्वन्तु, वयं संख्यारेखायाः उपरि (+ 5) अपि च (- 3) एतद्द्वयोः योगं ज्ञातुम् इच्छामः।

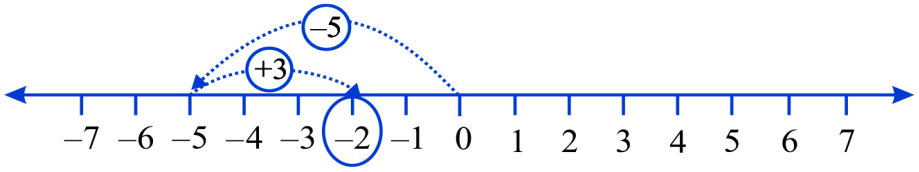


आकृतिः 6.6

पूर्वं वयं संख्यारेखायाः उपरि 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 5 पादान् चलित्वा 5 प्राप्नुमः। पुनः वयं 5 तः वामभागे 3 पादान् चलित्वा 2 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.6)।

इत्थं (+ 5) + (- 3) = 2 अस्ति।

(iv) इत्थमेव आयान्तु संख्यारेखायाः उपरि (- 5) अपि च (+ 3) एतद्द्वयोः योगं कुर्वन्तु।



आकृतिः 6.7

पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य वामभागे 5 पादान् चलामः अपि च – 5 प्राप्नुमः । पुनः वयं - 5 तः दक्षिणभागे 3 पादान् चलित्वा – 2 प्राप्नुमः ।

इत्थं (- 5) + (+ 3) = - 2 अस्ति (आकृतिः 6.7)।

यदि कस्मिन्नपि पूर्णाङ्के एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः योजितः भवति तर्हि परिणामपूर्णाङ्कः दत्तपूर्णाङ्कतः बृहान् भवति । यदि कस्मिन्नपि पूर्णाङ्के ऋणात्मकपूर्णाङ्कः योजितः भवति तर्हि परिणामपूर्णाङ्कः दत्तपूर्णाङ्कतः लघुमान् भवति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. संख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं अधोलिखितानां योगफलं जानन्तु ।

   (a) (- 2) + 6 (b) (- 6) + 2

   एवमेव इतोऽपि प्रश्नद्वयं निर्मान्तु तथा च संख्यारेखायाः साहाय्येन तयोः समाधानं कुर्वन्तु ।

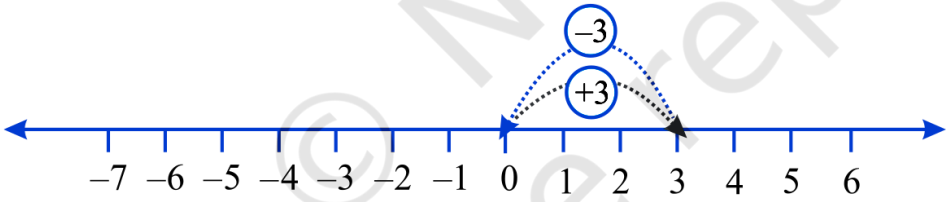
2. संख्यारेखायाः प्रयोगेण विना एव अधोलिखितानां प्रश्नानां समाधानं कुर्वन्तु ।

   (a) (+ 7) + (- 11) (b) (- 13) + (+ 10)

   (c) (- 7) + (+ 9) (d) (+ 10) + (- 5)

   एवमेव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु तथा तेषां समाधानं कुर्वन्तु ।

आयान्तु 3 अपि च – 3 इत्येतयोः योगं कुर्वन्तु । पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 3 पादान् चलित्वा 3 प्राप्नुमः । पुनः वयं 3 तः वामभागे 3 पादान् चलित्वा कां संख्यां प्राप्नुमः ?



आकृतिः 6.8 इत्यत्र वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् वयं 0 उपरि प्राप्तवन्तः । अतः 3 + (- 3) = 0 अस्ति । एवमेव यदि वयं 2 अपि च – 2 इत्यनयोः योजनं कुर्मः तर्हि तदा अपि 0 एव प्राप्यते । इत्थं संख्यायुग्मानां 3 अपि च – 3, 2 अपि च – 2 इत्यादीनां योजनं यदि कुर्मः तर्हि अस्माभिः 0 एव प्राप्तं भवति । एतादृशसंख्याः परस्परं **योज्यप्रतिलोमाः** इत्युच्यन्ते ।

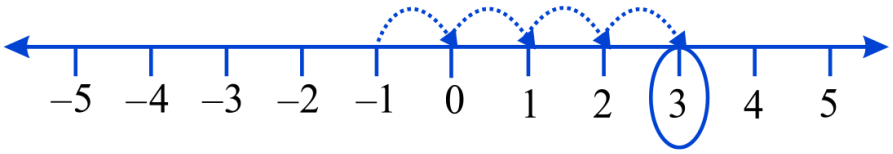
6 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः कः ? – 7 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः कः ?

उदाहरणम् 3 : संख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं तान् पूर्णाङ्कान् लिखन्तु ये

(a) – 1 तः 4 अधिकः अस्ति ।

(b) 3 तः 5 न्यूनः अस्ति ।

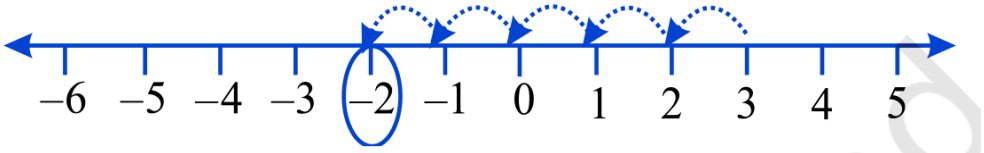
समाधानम् : (a) वयं तं पूर्णाङ्कं ज्ञातुम् इच्छामः यः - 1 तः 4 अधिकः अस्ति । अतः वयं – 1 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 4 पादान् चलामः । एतेन वयं 3 संख्यां प्राप्नुमः यथा अधः आकृतिः 6.9 इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृतिः 6.9

अतः – 1 तः 4 अधिकः पूर्णाङ्कः 3 अस्ति।

(b) वयं तं पूर्णाङ्कं ज्ञातुम् इच्छामः यः 3 तः 5 न्यूनः अस्ति। अतः वयं 3 तः प्रारभ्य वामभागे 5 पादान् चलित्वा – 2 प्राप्नुमः यथा आकृतिः 6.10 इत्यत्र दर्शितमस्ति।



आकृतिः 6.10

अतः 3 तः 5 न्यूनः पूर्णाङ्कः -2 इति।

उदाहरणम् 4 : योगं जानन्तु : (- 9) + (+ 4) + (- 6) + (+ 3)

समाधानम् : वयं संख्याः इत्थं पुनर्व्यवस्थितं कर्तुं शक्नुमः यथा धनात्मकपूर्णाङ्काः एकस्मिन् समूहे भवेयुः अपि च ऋणात्मकपूर्णाङ्काः एकस्मिन् समूहे भवेयुः। इत्थं

(- 9) + (+ 4) + (- 6) + (+3)

= (- 9) + (- 6) + (+ 4) + (+ 3) = (- 15) + (+ 7)

= - 8 + (- 7) + (+ 7) = - 8 + 0 = - 8

उदाहरणम् 5 : अभिजानन्तु : (30) + (- 23) + (- 63) + (+ 55)

समाधानम् : (30) + (+ 55) + (- 23) + (- 63)

= 85 + (- 86) = - 1

उदाहरणम् 6 : योगम् अभिजानन्तु : (- 10), (92), (84), (-15)

समाधानम् : (- 10) + (92) + (84) + (- 15)

= (- 10) + (- 15) + 92 + 82

= (- 25) + 176 = 151

अभ्यासः 6.2

1. संख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं तं पूर्णाङ्कं जानन्तु यः

   (a) 5 तः 3 अधिकः अस्ति। (b) – 5 तः 5 अधिकः अस्ति।

   (c) 2 तः 6 न्यूनः अस्ति। (d) – 2 तः 3 न्यूनः अस्ति।

2. संख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं अधोलिखितानां योगं कुर्वन्तु।

   (a) 9 + (- 6) (b) 5 + (- 11)

   (c) (- 1) + (- 7) (d) (- 5) + 10

(e) $(-1)+(+2)+(-3)$ (f) $(-2)+8+(-4)$

3. संख्यारेखायाः प्रयोगेण विना अधोलिखितानां योगं जानन्तु।

(a) $11+(-7)$ (b) $(-13)+(+18)$

(c) $(-10)+(+19)$ (d) $(-250)+(+150)$

(e) $(-380)+(-270)$ (f) $(-217)+(-100)$

4. अधोलिखितानां योगं जानन्तु।

(a) 137 अपि च – 354 (b) – 52 अपि च 52

(c) – 312, 39 अपि च 192 (d) – 50, – 200 अपि च 300

5. अधोलिखितानां मानं जानन्तु।

(a) $(-7)+(-9)+4+16$

(b) $(37)+(-2)+(-65)+(-8)$

6.4 संख्यारेखायाः साहाय्येन पूर्णाङ्कानां व्यवकलनम्

वयं संख्यारेखायाः उपरि द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं कृतवन्तः। उदाहरणार्थं $6+2$ अस्य विचारं कुर्वन्तु। वयं 6 तः प्रारम्भं कुर्मः अपि च दक्षिणभागे 2 पादान् चलामः। वयं 8 प्राप्नुमः। अतः $6+2=8$ अस्ति (आकृतिः 6.11)।

आकृतिः 6.11

वयं इदमपि दृष्टवन्तः आसन् यत् संख्यारेखायाः उपरि 6 अपि च (-2) इत्येतयोः योजनं कर्तुं वयं 6 तः प्रारभ्य वामभागे 2 पादौ चलामः अपि च 4 प्राप्नुमः। अतः अस्माभिः $6+(-2)=4$ प्राप्तः भवति। (आकृतिः 6.12)

आकृतिः 6.12

इत्थं वयं प्राप्नुमः यत् एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनार्थं वयं संख्यारेखायाः उपरि दक्षिणभागे चलामः अपि च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनार्थं संख्यारेखायाः वामभागे चलामः।

पूर्णसंख्यानां कृते संख्यारेखायाः प्रयोगकरणसमये अपि वयं दृष्टवन्तः आस्म यत् 6 इत्यस्मिन् 2 व्यवकलयितुं वयं 2 पादौ वामभागे चलितवन्तः आस्म (आकृतिः 6.13)।

आकृतिः 6.13

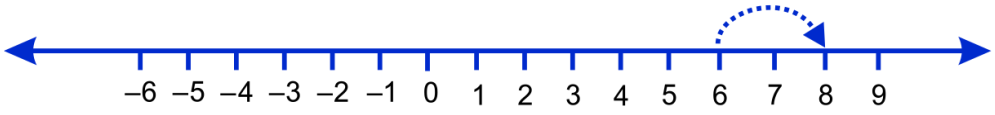
अर्थात् $6-2=4$ अस्ति।

वयं $6-(-2)$ कर्तुं किं कुर्मः ? किं वयं संख्यारेखायाः वामभागे चलामः अथवा दक्षिणभागे

चलामः ?

यदि वयं वामभागे चलामः तर्हि वयं 4 प्राप्नुमः । तदा अस्माभिः वक्तव्यं भवति यत् 6 – (– 2) = 4 अस्ति । एतत् सम्यक् नास्ति यतो हि 6 – 2 = 4 भवति तथा 6 – 2 ≠ 6 – (- 2) अस्ति ।

अतः अस्माभिः दक्षिणभागे गन्तव्यं भवति (आकृतिः 6.14) ।

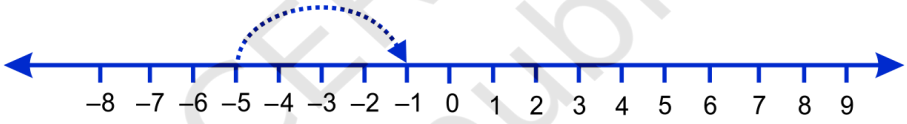


आकृतिः 6.14

अस्यार्थः एषः अपि अस्ति यत् यदा वयं एकस्य ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य व्यवकलनं कुर्मः तर्हि अस्माभिः एकः बृहत्पूर्णाङ्कः एव लभ्यते । अस्योपरि अन्यप्रकारेण अपि चिन्तयन्तु वयं जानीमः यत् – 2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः 2 अस्ति । अतः अनेन एतत् तु प्रतीयते यत् 6 इत्यस्मिन् – 2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमस्य योजनस्य अर्थः सः एव भवति यः 6 इत्यस्मिन् (– 2) इत्यस्य व्यवकलनस्य अस्ति ।

वयं लिखामः 6 – (– 2) = 6 + 2

आयान्तु अधुना – 5 – (– 4) इत्यस्य फलं संख्यारेखायाः साहाय्येन जानीमः । वयं वक्तुं शक्नुमः यत् एतत् – 5 + 4 इत्यस्य समानं अस्ति । अतः वयं संख्यारेखायाः उपरि – 5 तः प्रारभ्य 4 पादान् दक्षिणभागे चलामः (आकृतिः 6.15) । वयं – 1 प्राप्नुमः ।

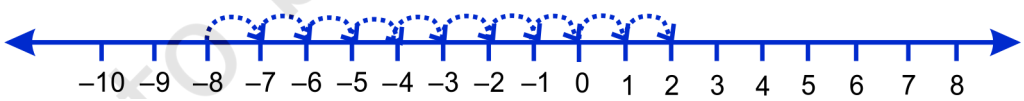


आकृतिः 6.15

अर्थात् – 5 + 4 = - 1 अस्ति । इत्थं – 5 – (– 4) = - 1 भवति ।

उदाहरणम् 7 : संख्यारेखायाः साहाय्येन (- 8) – (- 10) इत्यस्य फलं जानन्तु ।

समाधानम् : - 10 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः + 10 अस्ति, अतः (- 8) – (– 10) = - 8 + 10 अस्ति ।



आकृतिः 6.16

संख्यारेखायाः उपरि वयं – 8 तः 10 पादान् दक्षिणभागे चलामः ।

वयं 2 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.16)।अतः – 8 – (–10) = 2 अस्ति ।

इत्थम् एकेन पूर्णाङ्केन एकस्य अन्यपूर्णाङ्कस्य व्यवकलनार्थम् एतत् पर्याप्तम् अस्ति यत् व्यवकलनमानस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यप्रतिलोमस्य अन्यपूर्णाङ्केन सह योजनम् ।

उदाहरणम् 8 : (- 10) इत्यस्मिन् (– 4) व्यवकलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : (- 10) – (- 4) = (- 10) + (- 4 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः)

$= -10 + 4 = -6$

उदाहरणम् 9 : (-3) इत्यस्मिन् $(+3)$ व्यवकलयन्तु।

समाधानम् : $(-3) - (+3) = (-3) + (+3$ इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः$)$

$= (-3) + (-3) = -6$

अभ्यासः 6.3

1. व्यवकलनं कुर्वन्तु।

(a) $35 - (20)$ (b) $72 - (90)$

(c) $(-15) - (-18)$ (d) $(-20) - (-13)$

(e) $23 - (-12)$ (f) $(-32) - (-40)$

2. रिक्तस्थानं $>$, $<$ अथवा $=$ चिह्नेन पूरयन्तु।

(a) $(-3) + (-6)$ _____ $(-3) - (-6)$

(b) $(-21) - (-10)$ _____ $(-31) + (-11)$

(c) $45 - (-11)$ _____ $57 + (-4)$

(d) $(-25) - (-42)$ _____ $(-42) - (-25)$

3. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a) $(-8) +$ _____ $= 0$ (b) $13 +$ _____ $= 0$

(c) $12 + (-12)$ _____ $=$ (d) $(-4) +$ _____ $= -12$

(e) _____ $- 15 = -10$

4. अधोलिखितानां फलं जानन्तु।

(a) $(-7) - 8 - (-25)$ (b) $(-13) + 32 - 8 - 1$

(c) $(-7) + (-8) + (-90)$ (d) $50 - (-40) - (-2)$

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. वयं दृष्टवन्तः यत् केषुचित् अवसरेषु वयं ऋणात्मकचिह्नयुक्तानां संख्यानाम् आवश्यकताम् अनुभवामः। संख्यारेखायां शून्यात् अधः यदि वयं चलामः तर्हि एतदनुभूयते। एताः ऋणात्मकसंख्याः इत्युच्यन्ते। तापमानमापने, जलबन्धे अथवा नद्यां जलप्रमाणमापने, तैलसङ्ग्रहागारे तैलस्य मापने इत्यादिषु उदाहरणेषु ऋणात्मकचिह्नस्य उपयोगं कुर्मः। तथैव ऋणादान-प्रदाने अपि अस्य प्रयोगः भवति।

2. ..., - 4, - 3, - 2, - 1, 0 , 1, 2, 3, 4, … एतादृशसंख्यानां सङ्ग्रहः पूर्णाङ्कः इति कथ्यते। अतः – - 1, – 2, – 3, – 4,… ऋणात्मकसंख्याः सन्ति ये च ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते। 1, 2, 3, 4, … धनात्मकसंख्याः सन्ति ये च धनात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते।

3. वयं एतदपि दृष्टवन्तः यत् कस्यापि दत्तसंख्यायाः एका अधिकसंख्या तस्याः परवर्तिसंख्या भवति अपि च एका न्यून-संख्या पूर्ववर्तिसंख्या भवति।

4. वयं दृष्टवन्तः यत्

(a) यदि समानचिह्नं भवति चेत् तर्हि योजयन्तु अपि च तदेव चिह्नं स्थापयन्तु।

(i) यदा यदा द्वयोः धनात्मकसंख्ययोः योजनं भवति तदा अस्माभिः एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः एव प्राप्यते। [यथा, (+ 3) + (+ 2) = + 5]

(ii) यदा यदा द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां योजनं भवति तदा अस्माभिः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः एव प्राप्यते [यथा, (- 2) + (– 1) = – 3]

(b) यदि पृथक् पृथक् चिह्नम् भवति तर्हि व्यवकलनं कृत्वा बृहत्संख्यायाः चिह्नं स्थापयेम।

(c) यदि द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्क-ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं कर्तव्यं तर्हि वयं तौ सम्पूर्णसंख्ययोः इव व्यवकलनं कुर्मः तथा च प्राप्तसंख्यायां बृहत्संख्यायाः चिह्नं स्थापयेम [यथा (+ 4) + (- 3) = + 1 अपि च (- 4) + (+ 3) = - 1]।

5. वयं दर्शितवन्तः यत् केन प्रकारेण पूर्णाङ्कानां योगम् अपि च व्यवकलनं संख्यारेखायाः उपरि दर्शयितुं शक्यते इति।

भिन्नः

अध्यायः 7

7.1 भूमिका

सुभाषः IV अपि च V कक्ष्ययोः भिन्नस्य विषये पठितवान् आसीत् । परन्तु सः अस्य विषये तथा विश्वस्तः नासीत् इत्यतः यदा कदापि तस्य अवसरः लभ्यते स्म तदा सर्वदा अपि भिन्नानां प्रयोगार्थं प्रयत्नं करोति स्म । एकः अवसरः तदा लब्धः यदा सः गृहात् आगमन¬काले स्वभोजनपेटिकाम् आनेतुं विस्मृतवान् । तस्य सखी फरीदा तं तया सह भोजनं कर्तुम् आहूतवती । तस्याः भोजनपेटिकायां पञ्च पूरिकाः आसन् । अतः फरीदासुभाषौ द्वे द्वे पूरिके गृहीतवन्तौ । अनन्तरं फरीदा पञ्चमपूरिकायाः समानभागद्वयं कृत्वा एकं भागं सुभाषाय दत्तवती अपरं भागं स्वयं स्वीकृतवती । अनेन प्रकारेण फरीदा सुभाषः च द्वे पूर्ण-पूरिके अर्धम् अर्धं च पूरिकां स्वीकृतवन्तौ ।

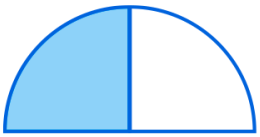
पूरिकाद्वयम् + अर्धं पूरिका - सुभाषः

पूरिकाद्वयम् + अर्धं पूरिका - फरीदा

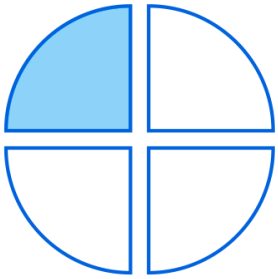
भवद्भिः भवतां जीवने कासु स्थितीषु भिन्नानाम् उदाहरणानि लब्धानि ?

सुभाषः जानाति स्म यत् अर्धं $\frac{1}{2}$ इति लिख्यते इति । पूरिकाभक्षणसमये सः स्वस्य अर्धं पूरिकां पुनः समानभागद्वये विभाजनं कृतवान् फरीदां पृष्ठवान्

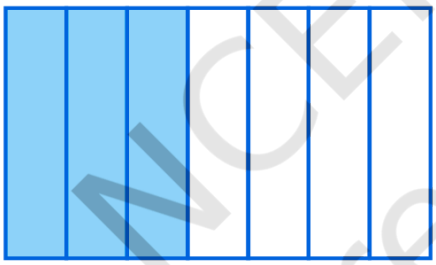
यत् एषः भागः पूर्णपूरिकायाः कतमः भागः अथवा भिन्नः अस्ति । (आकृतिः 7.1) किमपि उत्तरम् अदत्वा फरीदा अपि स्वस्याः अर्धपूरिकां समानभागद्वयेन विभाज्य सुभाषस्य पूरिकार्धेन सह स्थापितवती । अवदत् यत् एतैः चतुर्भिः समानभागैः एका पूर्णा रोटिका भवति इति । (आकृतिः 7.2) अतः प्रत्येकं समानभागः एकस्याः पूरिकायाः चतुर्थांशः अस्ति चतुरः अपि एतान् भागान् मेलयित्वा $\frac{4}{4}$ अथवा 1 पूर्णपूरिका भवति । खादनसमये सः तां चर्चां कृतवान् यत् ते भिन्नानां विषये पूर्वं किं पठितवन्तः आसन् ? 4 समानभागेषु 3 भागाः $\frac{3}{4}$ भागं दर्शयन्ति । अनेन प्रकारेण यदा वयम् एकं पूर्णं 7 समानभागेषु विभज्य 3 भागान् गृह्णीमः तर्हि 3/7 प्राप्यते (आकृतिः 7.3) । $\frac{1}{8}$ इत्येतदर्थं वयम् एकं पूर्णं 8 समानभागेषु विभाजयामः, एवम् एतेषु एकं भागं स्वीकुर्मः (आकृतिः 7.4)।



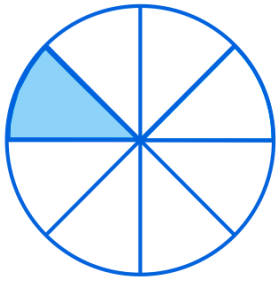
आकृति 7.1



आकृति 7.2



आकृति 7.3



आकृति 7.4

फरीदा उक्तवती यत् वयं पठितवन्तः यत् **भिन्नः इति सा संख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य भागस्य निरूपणं करोति । यत् पूर्णैकाकि वस्तु भवति अथवा कश्चन वस्तूनां समूहः अपि भवितुं शक्नोति ।** सुभाषः दृष्टवान् यत् **सर्वे भागाः समानाः भवेयुः ।**

7.2 कश्चन भिन्नः

आयान्तु पुनः अस्मिन् विषये चर्चां कुर्मः ।

एकस्य भिन्नस्य अर्थः अस्ति एकस्य समूहस्य अथवा एकस्य क्षेत्रस्य कश्चन भागः ।

$\frac{5}{12}$ एकः भिन्नः अस्ति । वयम् अमुं पञ्च-द्वादशांशः इति पठामः ।

"12" किं दर्शयति ? एषः समानभागानां सा संख्या अस्ति यस्याम् एकस्य पूर्णस्य विभागाः कृताः सन्ति ।

"5" किं दर्शयति ? एषा समानभागानां सा संख्या अस्ति या सर्वेषु 12 भागेषु स्वीकृता अस्ति ।

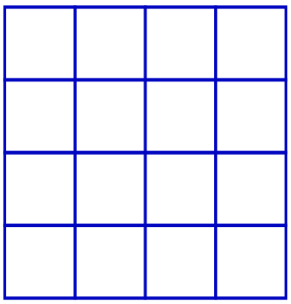
अत्र 5 अंशः 12 हरः च कथ्यते।

भिन्नस्य $\frac{3}{7}$ इत्यस्य अंशं वदन्तु। $\frac{4}{15}$ इत्यस्य भाजकः कः ?

इमां क्रीडां क्रीडन्तु।

भवन्तः भवतां मित्रैः सह इमां क्रीडां क्रीडितुं शक्नुवन्ति।

अत्र दर्शितस्य जालकस्य कानिचन प्रतिरूपाणि स्वीकुर्वन्तु।



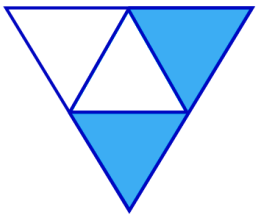
कञ्चित् भिन्नं साधयामः, कल्पनां कुर्वन्तु, $\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

भवत्सु प्रत्येकं छात्रः कोष्ठकस्य $\frac{1}{2}$ इति भागं छायया अङ्कितं कुर्यात्।

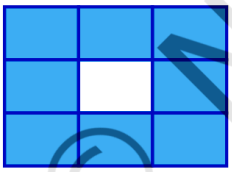
प्रतिबन्धः अयम् अस्ति यत् भवत्सु कस्यापि छायाङ्कितः भागः समानः न भवेत्।

अभ्यासः 7.1

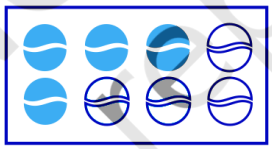
1. छायाङ्कितभागं निरूप्यमानं भिन्नं लिखन्तु।



(i)

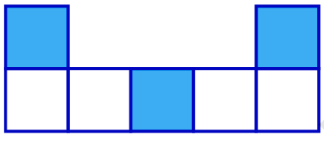


(ii)

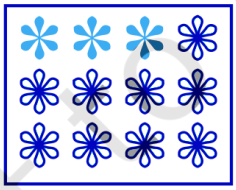


(iii)

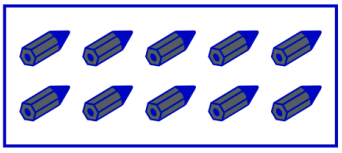
(iv)



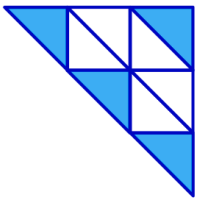
(v)



(vi)

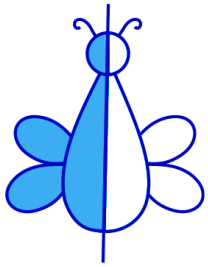


(vii)



(viii)

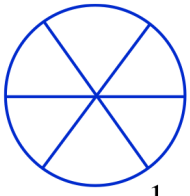
(ix)



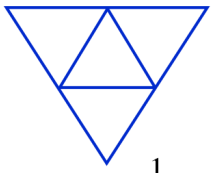
(x)

© NCERT not to be republished

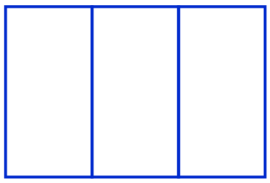
2. दत्तभिन्नानुसारं भागान् छायाङ्कितान् कुर्वन्तु।



(i) $\frac{1}{6}$

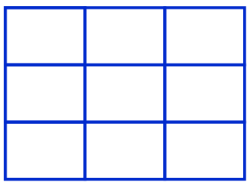


(ii) $\frac{1}{4}$



(iii) $\frac{1}{3}$

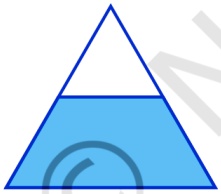
(iv) $\frac{3}{4}$



(v) $\frac{4}{9}$

3. अधोलिखितेषु यदि दोषाः सन्ति तर्हि अभिजानन्तु।

एतत् $\frac{1}{2}$ अस्ति



एतत् $\frac{1}{4}$ अस्ति

एतत् $\frac{3}{4}$ अस्ति

4. 8 घण्टाः एकस्य दिनस्य कतमः भिन्नः अस्ति ?

5. 40 निमेषाः एकस्याः घण्टायाः कतमः भिन्नः अस्ति ?

6. आर्या, अभिमन्युः विवेकः च परस्परं भोजनं विभाज्य भक्षयन्ति। आर्या सैण्ड्-विच्-द्वयम् आनयति तस्य प्रथमः सैण्डविच् इति शाकसमन्वितं भवति अपरं च ज्याम्(jam)-समन्वितं भवति। अन्यौ द्वौ बालकौ विस्मृतिवशात् भोजन न आनीतवन्तौ। । आर्या स्वस्याः सैण्ड्-विच्-खाद्यं ताभ्यां द्वाभ्यां सह विभज्य खादितुं सिद्धा भवति यथा प्रत्येकं प्रति प्रत्येकं सैण्ड्-विच् मध्ये समानभागः लभ्येत।

   (a) आर्या स्वस्याः सैण्ड्-विच्-खाद्यं केन प्रकारेण विभाजयति चेत् प्रत्येकं कृते समानभागः लभ्यते ?

   (b) प्रत्येकं छात्रस्य कृते सैण्ड्-विच्-खाद्यस्य कतमः भागः लभ्यते ?

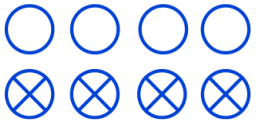
7. काचित् वस्त्रस्य वर्णविन्यासं करोति। तया 30 वस्त्राणां वर्णविन्यासः करणीयः आसीत्। सा एतावत्पर्यन्तं 20 वस्त्राणां वर्णविन्यासं कृतवती। सा वस्त्राणां कियतः भिन्नवर्णान् स्वीकृतवती ?

8. 2 इत्यतः 12 पर्यन्तं प्राकृतसंख्याः लिखन्तु। अभाज्य संख्याः एतासां कतमं भिन्नम् अस्ति ?

9. 102 इत्यतः 113 पर्यन्तं प्राकृतसंख्याः लिखन्तु। अभाज्य संख्याः एतासां कतमं भिन्नम् अस्ति ?

© NCERT not to be republished

10. दत्तानां कतमे भिन्ने X अस्ति ?

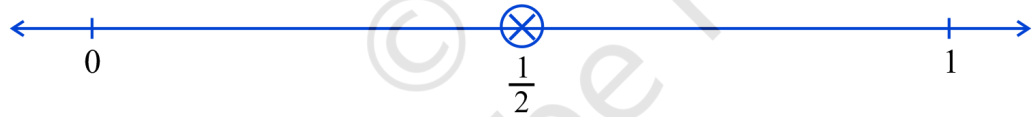


11. क्रिस्तिना स्वजन्मदिने एकां सान्द्रदर्शनीं स्वीकरोति । सा तदारभ्य सान्द्रमुद्रिकाः एकत्रितां कर्तुं प्रारब्धवती । सा 3 सान्द्रमुद्रिकाः क्रीणाति तथा 5 सान्द्रमुद्रिकाः उपायनरूपेण प्राप्नोति । तया क्रीणीतसान्द्रमुद्रिकायाः संख्या आहत्य संख्यायाः कतमं भिन्नम् अस्ति ?

7.3 संख्यारेखायां भिन्नः

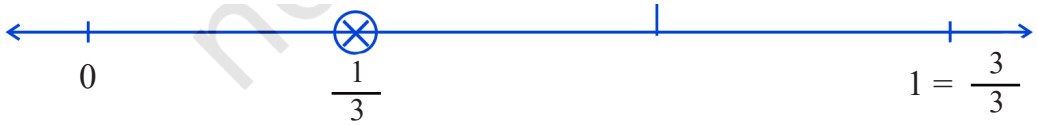
भवन्तः एकस्यां संख्यारेखायां पूर्णसंख्याः 0, 1, 2... दर्शयितुं शिक्षितवन्तः । किं भवन्तः भिन्नान् संख्यारेखायां दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? आयान्तु एकां संख्यारेखाम् आलिखन्तु । किं वयं अस्याः उपरि अर्धं $\frac{1}{2}$ दर्शयितुं शक्नुमः ? वयं जानीमः यत् $\frac{1}{2}$ संख्या 0 इत्यतः अधिकम् अस्ति तथैव 1 इत्यतः न्यूनम् अस्ति इति । अतः एतया 0 1 एतयोः मध्ये स्थातव्यम् भवति ।

यतः अस्माभिः $\frac{1}{2}$ दर्शनीयम् अस्ति अतः वयं 0 1 इत्येतयोः मध्ये विद्यमानं दूरं समानभागद्वये विभाजयामः । एकं भागं $\frac{1}{2}$ इत्यनेन दर्शयामः । यथा हि आकृतौ 7.5 इत्यत्र दर्शितम् अस्ति ।



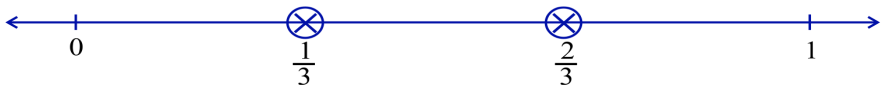
आकृतिः 7.5

संख्यारेखायां $\frac{1}{3}$ इति दर्शयितुं 0 1 एतयोः मध्यस्तं दूरं कतिषु समानभागेषु विभजनं कर्तव्यं भवति ? वयं 0 1 इत्येतयोः मध्यस्थं दूरं 3 समानभागेषु विभाजनं कुर्मः । तथैव एकं भागं $\frac{1}{3}$ इत्यनेन दर्शयामः (यथा 7.5 आकृतौ दर्शितम् अस्ति)।



आकृतिः 7.6

किं वयम् अस्यां संख्यारेखायां $\frac{2}{3}$ इत्येतां दर्शयितुं शक्नुमः ? $\frac{2}{3}$ इत्यस्य अर्थः 3 समानभागेषु 2 भागः, यथा 7.7 आकृतौ दर्शितम् अस्ति ।



आकृति 7.7

अनेन प्रकारेण भवन्तः $\frac{0}{3}$ $\frac{3}{3}$ संख्यारेखायां कथं दर्शयन्ति ?

$\frac{0}{3}$ बिन्दुः शून्यम् अस्ति। $\frac{3}{3}$ एकं पूर्णम् अस्ति। अतः इमां संख्यां संख्यारेखायाः उपरि बिन्दुना 1 इत्यनेन दर्शयामः (यथा 7.7 आकृतौ दर्शितम् अस्ति)।

अधुना यदि अस्माभिः $\frac{3}{7}$ इति दर्शनीयम् अस्ति तर्हि 0 1 एतयोः मध्यस्थं दूरत्वं कतिषु समानभागेषु विभाजयिष्यामः ? यदि P भिन्नः $\frac{3}{7}$ अमुं दर्शनीयम् अस्ति तर्हि 0 P अनयोः मध्ये आहत्य कति समानाः भागाः सन्ति ? $\frac{0}{7}$ $\frac{7}{7}$ कुत्र तिष्ठतः ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. संख्यारेखायां $\frac{3}{5}$ दर्शयन्तु।
2. संख्यारेखायां $\frac{1}{10}$, $\frac{0}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{10}$ दर्शयन्तु।
3. किं भवन्तः 0 1 अनयोः मध्ये कमपि अन्यं भिन्नं दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? एतादृशपञ्च-स्थितीः लिखन्तु याः भवन्तः दर्शयितुं शक्नुवन्ति। ताः संख्यारेखायाः उपरि दर्शयन्तु।
4. 0 1 अनयोः मध्ये कति भिन्नाः स्थिताः सन्ति ? चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु स्व-उत्तरं लिखन्तु।

7.4 उचितः भिन्नः

अधुना भवन्तः शिक्षितवन्तः यत् भिन्नान् संख्यारेखायां केन प्रकारेण दर्शयन्ति इति।

पृथक् पृथक् संख्यारेखायां भिन्नानां $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{5}{8}$ एतेषां स्थितिं दर्शयन्तु।

किम् एतेषु कोऽपि भिन्नः 1 इत्यतः दक्षिणतः अस्ति ? एते सर्वेऽपि भिन्नाः 1 इत्यतः वामभागे स्थिताः सन्ति, यतः 1 इत्यतः लघुसंख्याः सन्ति।

यथार्थतः तु एतावत् पर्यन्तं अस्माभिः पठितः भिन्नः 1 इत्यतः लघुः अस्ति। एषः तु उचितः भिन्नः अस्ति। यथा फरीदा उक्तवती (अनुच्छेदसंख्या 7.1), उचितः भिन्नः सा संख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य भागं निरूपितं करोति। अत्र तु भाजकः इदं वदति यत् पूर्णः कियद्भिः समानभागैः विभागः कृतः वर्तते इति, अंशः तु समानभागैः कियन्तः भागाः चिताः इति। अतः एकस्मिन् उचिते भिन्ने अंशः सदैव भाजकात् लघुः भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एकम् उचितं भिन्नं लिखतु ।
   यस्य अंशः 5 भाजकः 7 अस्ति ।
   यस्य अंशः 9 भाजकः 5 अस्ति ।
   यस्य अंशभाजकयोः योगः 10 अस्ति । भवन्तः इत्थं कियद्भिन्नान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?
   यस्य भाजकः तस्य अंशात् 4 अधिकः अस्ति ।
   (काञ्चन पञ्च भिन्नान् निर्मान्तु । भवन्तः इतोऽपि कति भिन्नान् निर्मातुं शक्नुवन्ति ?)
2. एकः भिन्नः दत्तः अस्ति । अमुं द्रष्ट्वा भवन्तः कथं वक्तुं प्रभवन्ति यत् एषः भिन्नः
   (a) 1 तः लघुः अस्ति ? (b) 1 इत्यनेन समानः अस्ति ?
3. सङ्केतानाम् '>', '<' अथवा '=' एतेषां प्रयोगपुरस्सरं रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

   (a) $\frac{1}{2}$ ☐ 1 (b) $\frac{3}{5}$ ☐ 1 (c) 1 ☐ $\frac{7}{8}$

   (d) $\frac{4}{4}$ ☐ 1 (e) $\frac{0}{6}$ ☐ 1 (f) $\frac{2005}{2005}$ ☐ 1

7.5 विषमः भिन्नः तथा मिश्रितः भिन्नः

अनघा, रविः, रेश्मा जानः इत्येते चत्वारः स्वभोजनं विभाज्य खादितवन्तः । ते तैः सह पञ्चसेवफलमपि आनीतवन्तः आसन् । भोजनान्ते सर्वे सुहृदः सेवफलं खादितुम् इच्छन्ति स्म । ते चत्वारः अपि तान् पञ्चसेवफलान् केन प्रकारेण विभाजयितुं शक्नुवन्ति ?

अनघा उक्तवती यत् आयान्तु वयं सर्वेऽपि एकं पूर्णं सेवफलं पञ्चमस्य चतुर्थांशं स्वीकुर्मः ।

अनघा रविः रेश्मा जानः

रेश्मा उक्तवती यत् इदं सम्यक् अस्ति, किन्तु वयं प्रत्येकं सेवफलं चतुर्भिः समानभागैः विभाजनं कर्तुं शक्नुमः प्रत्येकं सेवफलस्य चतुर्थांशं स्वीकुर्मः इति ।

अनघा रविः रेश्मा जानः

रविः उक्तवान्, विभाजनस्य प्रत्येकं विधिना प्रत्येकं जनाय समानभागः लभ्यते तथा च सः अस्ति 5 चतुर्थांशः। यतः 4 चतुर्थांशेन एकः पूर्णः भवति। अतः वयं वक्तुं प्रभवामः यत् अस्मासु प्रत्येकं जनाय एकः पूर्णः एवम् एकः चतुर्थांशः लभ्यते। प्रत्येकं भागः 5 विभाजकः 4 अस्ति। किम् इदं 5÷4 इति लिखामः ? जानः उक्तवान्, " आम्, इदं $\frac{5}{4}$ इति अपि लेखितुं शक्यते" इति । अनघा उक्तवती $\frac{5}{4}$ इत्यत्र अंशः भाजकात् बृहदस्ति। ते भिन्नाः येषु अंशः भाजकात् बृहत्तराः भवन्ति ते विषमभिन्नाः इति उच्यन्ते।

इत्थं $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{18}{5}$ प्रत्येकं एकः विषमः भिन्नः अस्ति।

1. भाजकः 7 सहितं पञ्च विषमभिन्नान् लिखन्तु।
2. अंशः 11 सहितं पञ्चविषमभिन्नान् लिखन्तु।

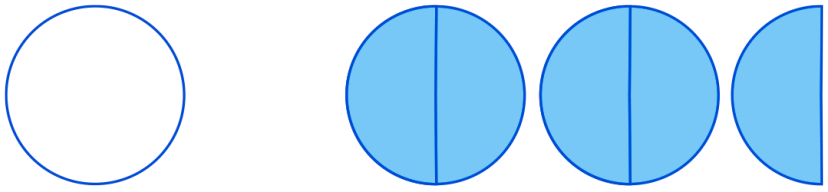
रविः जानं पृष्ठवान् "अमुं भागं लेखितुं अन्ये विधयः के सन्ति ? किं एषः 5 सेवफलानि अनघया विभजितविधिना प्राप्तः भवति ?

एतत् 1 अस्ति एतेषु प्रत्येकं $\frac{1}{4}$ अस्ति

आकृतिः 7.8

जानः उक्तवान्, "आम्, वस्तुतः एषः अनघायाः विधिना प्राप्तः भवति। तस्याः विधौ प्रत्येकं भागः एकेन पूर्णेन एवम् एकेन चतुर्थांशेन मिलित्वा निर्मितः अस्ति। एषः $1 + \frac{1}{4}$ अस्ति यः $1\frac{1}{4}$ इत्यपि लिख्यते। स्मरणे स्थापयन्तु $1\ \frac{1}{4}\ \frac{5}{4}$ एतत् द्वयमपि समानम्। (आकृतिः 7.8)

स्मरन्तु यत् फरीदा कति पूरिकाः खादितवती आसीत्। सा $2\frac{1}{2}$ पूरिकाः खादितवती आसीत्। (आकृतिः 7.9)



एतत् 1 अस्ति $2\frac{1}{2}$

आकृतिः 7.9

$2\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् कति अर्धभागाः छायाङ्किताः सन्ति ? अत्र तु 5 भागाः छायाङ्किताः सन्ति।

अतः एषः भिन्नः $\frac{5}{2}$ अस्ति। स्पष्टमस्ति यत्

एषः $\frac{5}{4}$ नास्ति इति।

$1\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2}$ एतादृशभिन्नाः, **मिश्रितभिन्नाः** इति कथ्यन्ते।

एकस्मिन् मिश्रितभिन्ने एकः भागः पूर्णः भवति तथा एकः भागः भिन्नः भवति।

भवतां कृते मिश्रितसंख्याः कुत्र कुत्र लभ्यन्ते ? कानिचन उदाहरणानि ददतु।

उदाहरणम् 1 : अधोलिखितान् मिश्रितसंख्यानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

समाधानम् : (a) $\frac{17}{4}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4\overline{)17} \\ -\ 16 \\ \hline 1 \end{array}$$

अर्थात्, 4 पूर्णः $\frac{1}{4}$ अधिकः अथवा $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3\overline{)11} \\ -\ 9 \\ \hline 2 \end{array}$$

अर्थात्, 3 पूर्णः $\frac{2}{3}$ अधिकः अथवा $3\ \frac{2}{3}$

[विकल्पेन तु , $\frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$]

(c) (d) एतौ उपरि उक्तयोः द्वयोः अपि विध्योः कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

इत्थं वयं एकं विषमभिन्नम् एकेन मिश्रितसंख्यारूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः। एतदर्थं वयम् अंशं भाजकेन भागं कृत्वा भागफलं तथा शेषफलं प्राप्नुमः। अनन्तरं मिश्रितसंख्यां भागफलम् $\frac{\text{शेषफलम्}}{\text{भाजकः}}$ इति रूपेण लिखामः।

उदाहरणम् 2 : अधोलिखितमिश्रितभिन्नान् विषमभिन्नानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $2\frac{3}{4}$ (b) $7\frac{1}{9}$ (c) $5\frac{3}{7}$

समाधानम् : (a) $2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9} = \frac{(7 \times 9) + 1}{9} = \frac{64}{9}$

(c) $5\frac{3}{7} = \frac{(5 \times 7) + 3}{7} = \frac{38}{7}$

अनेन प्रकारेण वयम् एकं मिश्रितभिन्नं विषमभिन्नरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः। एतदर्थं वयं पूर्णं भाजकेन गुणनं कृत्वा गुणनफले अंशं योजयामः। अतः विषमभिन्नः

$= \frac{\text{पूर्णः} \times \text{भाजकः} + \text{अंशः}}{\text{भाजकः}}$ इति भवति।

अभ्यासः 7.2

1. संख्यारेखाः आलिखन्तु। तासाम् उपरि अधोलिखितान् भिन्नान् बिन्दुरूपेण दर्शयन्तु।

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ (c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. अधोलिखितान् मिश्रितभिन्नरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$

(d) $\frac{28}{5}$ (e) $\frac{19}{6}$ (f) $\frac{35}{9}$

3. अधोलिखितान् विषमभिन्नानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$

(d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$ (f) $8\frac{4}{9}$

7.6 तुल्यभिन्नः

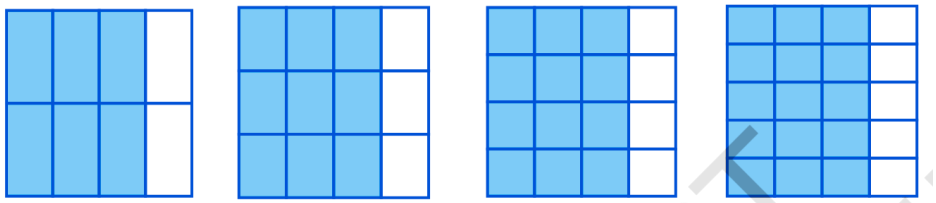
भिन्नानाम् अधोलिखितान् निरूपणान् पश्यन्तु (आकृतिः 7.10)।

आकृतिः 7.10

एते भिन्नाः $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ सन्ति । ये आहत्य भागेषु स्वीकृतभागान् दर्शयति । यदि वयम् एतेषां भिन्नान्नां चित्रीयनिरूपणान् एकं द्वितीयस्य उपरि स्थापयामः चेदपि समानाः भवन्ति । किं भवन्तः अनेन सम्मताः सन्ति ? एतादृशभिन्नाः **तुल्यभिन्नाः** इत्युच्यन्ते । एतादृशान् इतोऽपि त्रीन् भिन्नान् वदन्तु ये उपरि उक्ततुल्याः सन्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{6}{27}$ एते तुल्यभिन्नाः सन्ति ? कारणं ददतु ।
2. चतुरः तुल्यभिन्नानाम् एकम् अन्यम् उदाहरणं लिखन्तु
3. प्रत्येकं भिन्नं परिचिनोतु । किं एते भिन्नतुल्याः सन्ति ?



तुल्यभिन्नानाम् अवगमनम् ।

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$,... $\frac{36}{72}$ एतेषु सर्वेऽपि तुल्यभिन्नाः सन्ति । एते एकस्य पूर्णस्य समानभागान् निरूपितान् कुर्वन्ति ।

चिन्तयन्तु , चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु ।

तुल्यभिन्नाः एकस्य पूर्णस्य समानभागान् किमर्थं निरूपितान् कुर्वन्ति ? वयम् एतेषु एकं भिन्नम् अन्यभिन्नेन कथं प्राप्तुं शक्नुमः ?

वयं पश्यामः यत् $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$ अस्ति ।

इत्थमेव, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ तथा

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$ अस्ति ।

एकस्य आसत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं ज्ञातुं भवन्तः अंशम् भाजकम् एकया समानशून्येतर सङ्ख्यया गुणनं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

रजनी वदति यत् $\frac{1}{3}$ इत्यस्य समतुल्यभिन्नः अस्ति –

$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$, $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ इत्यादयः ।

किं भवन्तः रजन्याः वाक्ये सम्मताः सन्ति ? करणेन सह स्पष्टीकुर्वन्तु ।

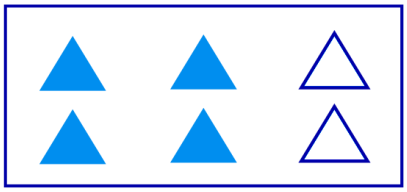
प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अधोलिखितेषु प्रत्येकं भिन्नस्य पञ्च तुल्यभिन्नान् जानन्तु।

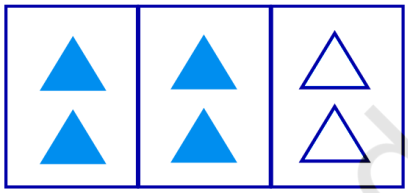
(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{9}$

अन्ये विधयः

किं तुल्यं भिन्नं ज्ञातुं केऽपि अन्ये विधयः सन्ति ?(आकृतिः 7.11)



अत्र $\frac{4}{6}$ छायाङ्कितः अस्ति।



अत्र $\frac{2}{3}$ छायाङ्कितः अस्ति।

आकृतिः 7.11

अत्र तु छायाङ्कितवस्तूनां संख्या समाना वर्तते , अर्थात् $\frac{4}{6}$ एवं च $\frac{2}{3}$ तुल्यभिन्नौ स्तः।

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2}$$

एकस्य दत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं ज्ञातुं वयं तस्य भिन्नस्य अंशम् भाजकम् एकया समानशून्येतरसंख्यया भागं कर्तुं शक्नुमः।

$\frac{12}{15}$ इत्यस्य एकः तुल्यभिन्नः $\frac{12}{15} \frac{3}{3} = \frac{4}{5}$

किं भवन्तः $\frac{9}{15}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं ज्ञातुं शक्नुमः यस्य भाजकः 5 अस्ति।

उदाहरणम् 3 : $\frac{2}{5}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य अंशः 6 अस्ति।

समाधानम् : वयं जानीमः यत् $2 \times 3 = 6$ अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति तुल्यभिन्नं प्राप्तुम् अस्माभिः दत्तभिन्नस्य अंशं भाजकं 3 इत्यनेन गुणनं कर्तव्यं भवति। इत्थम् ,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$ अस्ति।

अतः वाञ्छितः तुल्यभिन्नः $\frac{6}{15}$ अस्ति।

किं भवन्तः इदं चित्रीयरूपेण दर्शयितुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 4 : $\frac{15}{35}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य अंशः 7 अस्ति।

समाधानम् : अस्माभिः प्राप्तः अस्ति : $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$

वयं भाजकान् पश्यामः। यतः $35 \div 5 = 7$ अस्ति , अतः वयं $\frac{15}{35}$ इत्यस्य अंशम् भाजकं द्वयम् अपि 5 इत्यतः भागं कुर्मः।

अस्माभिः प्राप्स्यते यत् $\frac{15}{35} = \frac{15 \quad 5}{35 \quad 5} = \frac{3}{7}$

अमुं $\square$3 इत्यनेन प्रतिष्ठाप्य वयं $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ प्राप्नुमः।

एकं रुचिकरं तथ्यम् :

तुल्यभिन्नानां विषये एकं तथ्यं रुचिकरम् अस्ति। दत्तसारिणीं पूर्णं कुर्वन्तु प्रथमपङ्क्तिद्वयं पूर्णं कृतमस्ति।

तुल्यभिन्नः	**प्रथमस्य अंशः द्वितीयस्य भाजकः एतयोः गुणनफलम्**	**द्वितीयस्य अंशः प्रथमस्य भाजकः एतयोः गुणनफलम्**	**किं गुणनफलम् समानम् अस्ति।**
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	1 x 9 =9	3 x 3= 9	अस्ति
$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$	4 x 35 = 140	5 x 28 = 140	अस्ति
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$			

उपरि उक्तसारिण्या वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ? एतेषु सर्वेषु प्रथमस्य अंशस्य द्वितीयस्य भाजकस्य गुणनफलं द्वितीयस्य अंशस्य प्रथमस्य भाजकस्य गुणनफलेन समानम् अस्ति। एते द्वे अपि गुणनफले सदिशगुणनफले इत्युच्येते। तुल्यभिन्नानाम् अन्ययुग्मानां प्रति अपि सदिशगुणनफलं जानन्तु। किं भवन्तः तुल्यभिन्नानां तादृशयुग्मान् प्राप्तुं शक्नुवन्ति, येषु सदिशगुणनफलं समानं नास्ति ? अनेन नियमेन यदा कदापि तुल्यभिन्नानाम् अवगमनाय साहाय्यं लभ्यते।

उदाहरणम् 5 : $\frac{2}{9}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य भाजकः 63 अस्ति।

समाधानम् : वयं प्राप्नुमः। $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$

एतदर्थं , 9 x $\square$ = 2 x 63 भवेत् ।

पतन्तु 63 = 7 x 9 अस्ति । अतः 9 x $\square$ = 2 x 7 x 9

= 14 x 9 = 9 x 14

अथवा 9 x $\square$ = 9 x 14 अभवत् ।

अतः, $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$ अस्ति ।

7.7 भिन्नस्य सरलतमरूपम्

एकः भिन्नः $\frac{36}{54}$ दत्तः अस्ति । आयान्तु अस्य तादृशम् एकं तुल्यभिन्नं प्राप्तुं प्रयत्नं कुर्मः यस्य अंशे भाजके 1 इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः न स्यात् ।

अतः, $\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}$

वयं कथं कर्तुं शक्नुमः ? वयं जानीमः यत् 36 54 , 2 संख्यया विभाज्यौ स्तः ।

परन्तु 18 27 एतयोः अपि 1 इति संख्याम् अतिरिच्य उभयनिष्ठः गुणनखण्डः अस्ति । ते 1, 3, 9 सन्ति ।

अतः, $\frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$

यतः 2 3 एतयोः 1 इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः नास्ति । अतः

वाञ्छितभिन्नः $\frac{2}{3}$ अस्ति । **एतादृशः भिन्नः सरलतमरूपभिन्नः इत्युच्यते ।**

इत्थम्, एकः भिन्नः सरलतमरूपेण अथवा लघुतमरूपेण तदा उच्यते यदा तस्य अंशे हरे 1 इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः न स्यात् ।

लघुतमः मार्गः :

सरलतमरूपेण तुल्यभिन्नान् ज्ञातुं सर्वस्मात् लघुमार्गः एषः अस्ति यत् दत्तभिन्नस्य अंशस्य भाजकस्य म.सा.अ. ज्ञात्वा अंशं भाजकं च ज्ञात-म.सा.अ. इत्यतः भागः कर्तव्यः । इत्थं सरलतमरूपेण तुल्यभिन्नस्य प्राप्तिः भवति ।

एका क्रीडा

अत्र दत्तसमतुल्यभिन्नः बहुरुचिकरम् अस्ति । प्रत्येकं सङ्क्रियायां 1 तः 9 पर्यन्तं सर्वे अङ्काः एकवारं प्रयुक्ताः सन्ति ।

$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$

किं भवन्तः एतादृशौ इतोऽपि द्वौ समतुल्यभिन्नौ ज्ञातुं शक्नुमः ।

भिन्नं $\frac{36}{24}$ स्वीकुर्वन्तु।

36 24 एतयोः म.सा.अ. 12 अस्ति।

अतः ,$\frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$

इत्थं, म.सा.अ. इत्यस्य अवधारणा एकं भिन्नं लघुतमरूपेण परिवर्तयितुम् अस्माकं साहाय्यं करोति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

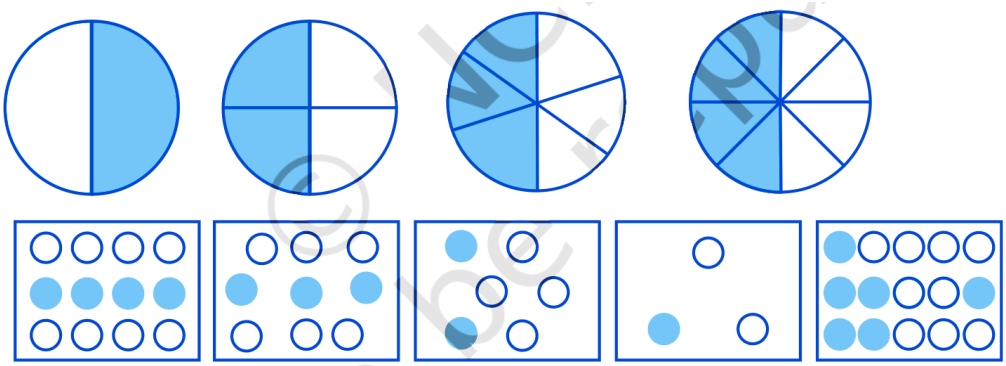
1. अधोलिखितान् सरलतमरूपेण लिखन्तु।

(i) $\frac{15}{75}$ (ii) $\frac{16}{72}$ (iii) $\frac{17}{51}$ (iv) $\frac{42}{28}$ (v) $\frac{80}{24}$

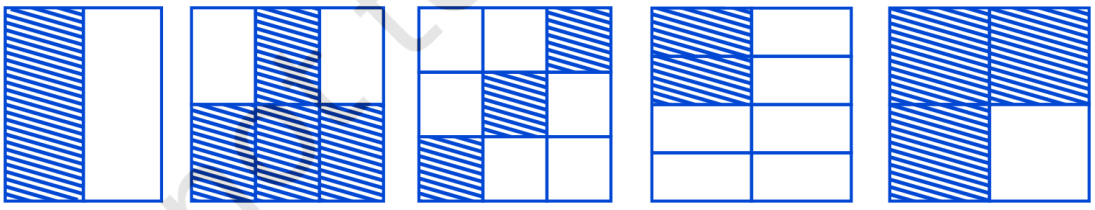
2 किं 49/64 स्व-सरलतमरूपेण अस्ति ?

अभ्यासः 7.3

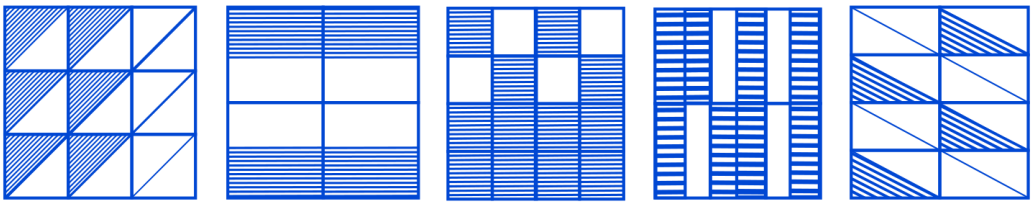
1. प्रत्येकं चित्रे छाताङ्कितभागानां कृते भिन्नान् लिखन्तु। किम् एते सर्वे भिन्नाः समानाः सन्ति ?



2. छायाङ्कितानां भागानां कृते भिन्नान् लिखन्तु प्रत्येकं पङ्क्तौ तुल्यभिन्नान् परिचिन्वन्तु।



(a) (b) (c) (d) (e)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

3. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a) $\frac{2}{7} = \frac{8}{\square}$ (b) $\frac{5}{8} = \frac{10}{\square}$ (c) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$

(d) $\frac{45}{60} = \frac{15}{\square}$ (e) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{4}$

4. $\frac{3}{5}$ इत्यस्य तं भिन्नं जानन्तु यस्य –

(a) भाजकः 20 अस्ति। (b) अंशः 9 अस्ति।

(c) भाजकः 30 अस्ति। (d) अंशः 27 अस्ति।

5. $\frac{36}{48}$ इत्यस्य तादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य

(a) अंशः 9 अस्ति। (b) भाजकः 4 अस्ति ।

6. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् अधोलिखिताः भिन्नाः सन्ति अथवा न इति।

(a) $\frac{5}{9}$, $\frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}$, $\frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}$, $\frac{5}{11}$

7. अधोलिखितभिन्नान् तेषां सरलतमरूपेण परिवर्तयन्तु।

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{84}{98}$

(d) $\frac{12}{52}$ (e) $\frac{7}{28}$

8. रमेशस्य समीपे 20 अङ्कन्यः आसन्। शीलोः समीपे 50 अङ्कन्यः जमालस्य समीपे 80 अङ्कन्यः आसन्। 4 मासानन्तरं रमेशः 10 अङ्कनीः शीलूः 25 अङ्कनीः प्रयोगं कृतवन्तौ जमालः 40 अङ्कनीः प्रयोगं कृतवान्। प्रत्येकं जनाः स्व-अङ्कनीनां कतमस्य भिन्नस्य प्रयोगं कृतवन्तः ? परीक्षणं कुर्वन्तु यत् प्रत्येकं जनः स्व-अङ्कनीनां समानभिन्नस्य प्रयोगं कृतवान्।

9. तुल्यभिन्नानां मेलनं कुर्वन्तु तथा प्रत्येकं कृते इतोऽपि भिन्नद्वयं लिखन्तु।

(i) $\frac{250}{400}$ (a) $\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{180}{200}$ (b) $\frac{2}{5}$

(iii) $\frac{660}{990}$ (c) $\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{180}{360}$ (d) $\frac{5}{8}$

(v) $\frac{220}{550}$ (e) $\frac{9}{10}$

7.8 समानः भिन्नः

समानभाजकयुक्तः भिन्नः समानभिन्नः इत्युच्यते ।

इत्थं , $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{8}{15}$ सर्वे समानभिन्नाः सन्ति ।

किं $\frac{7}{27}$, $\frac{7}{28}$ द्वौ समानभिन्नौ स्तः ? अस्य भाजकः भिन्नः अस्ति । अतः एतौ समानभिन्नौ न स्तः । एतयोः **नामास्ति असमानभिन्नः** इति ।

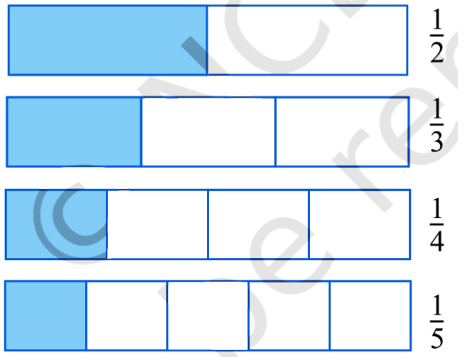
समानभिन्नानां पञ्चयुग्मान् एवम् असमानभिन्नानां पञ्चयुग्मान् लिखन्तु ।

7.9 भिन्नानां तुलना

सोहन्याः स्थालिकायां $3\frac{1}{2}$ रोटिकाः सन्ति रीतायाः स्थालिकायां $2\frac{2}{4}$ रोटिकाः सन्ति ।

कस्याः स्थालिकायाम् अधिकाः रोटिकाः सन्ति ? स्पष्टम् अस्ति यत् सोहन्याः समीपे 3 इत्यतः अधिकाः रोटिकाः सन्ति ।

अधुना 7.12 आकृतौ दर्शितभिन्नयोः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ एतयोः उपरि विचरं कुर्वन्तु । पूर्णस्य $\frac{1}{2}$ अस्य सहभागः तस्यैव पूर्णस्य $\frac{1}{3}$ अस्य सहभागेन स्पष्टतया बृहत्तरः अस्ति । अतः, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ इत्यतः बृहद् अस्ति ।



आकृति 7.12

किन्तु प्रायः भिन्नेषु इदं वक्तुं एत्तावत् सारल्यं न भवति यत् एतेषु कतमः भिन्नः बृहद् अस्ति इति। उदाहरणार्थं, $\frac{1}{4}$ बृहदस्ति ?अथवा $\frac{1}{5}$ बृहदस्ति ? एतदर्थं वयं भिन्नान् आकृतिभिः दर्शयितुं चिन्तयामः (यथा आकृतिः 7.12) । परं तु आकृतीनां निर्माणं तावत् सरलं न । विशेषेण यदा भाजकः 13 सदृशं स्यात् । अतः अस्माभिः भिन्नानां तोलनं कर्तुं कोऽपि क्रमबद्धः विधिः ज्ञातव्यः अस्ति । विशेषेण समानभिन्नानां तोलनं सरलम् अस्ति । एतदर्थं वयं प्रथमं समानभिन्नानाम् एव तुलनां कुर्मः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. भवन्तः फलरसस्य कूप्याः $\frac{1}{5}$ युक्तभागं प्राप्नुवन्तु तथैव भवतां भगिन्याः कृते तस्याः कूप्याः $\frac{1}{3}$ युक्तभागः लभ्यते । केन अधिकः फलरसः प्राप्यते ?

7.9.1 समानभिन्नानां तोलनम्

समानभाजकयुक्तः भिन्नः समानभिन्नः भवति। एतेषु कतमः भिन्नः समानभिन्नः अस्ति ?

$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$

आयान्तु, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ एतयोः द्वयोः समानभिन्नयोः तोलनं कुर्मः।

$\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$

द्वयोः भिन्नयोः अपि पूर्णं 8 समानभागेषु विभाजनं कृतवन्तः। एतेषु 8 समानभागेषु वयं $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ एतयोः कृते 3 5 भागान् स्वीकुर्मः। स्पष्टमस्ति यत् 5 भागानां सहभागः 3 भागानां सहभागादपि अधिकः अस्ति। अतः $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ अस्ति। अवधानं ददतु यत् स्वीकृतभागः अंशेन प्राप्तः अस्ति। अतः एतत् तु स्पष्टमस्ति यत् समानभाजकयुक्तयोः द्वयोः भिन्नयोः कृते बृहत्-अंशयुक्तः भिन्नः बृहत्-भवति। $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ एतयोः मध्ये $\frac{4}{5}$ बृहत्-भिन्नः अस्ति। $\frac{11}{20}$ $\frac{13}{20}$ एतयोः मध्ये $\frac{13}{20}$ बृहदस्ति इत्यादयः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कतमः भिन्नः बृहत्तरः ?

   (i) $\frac{7}{10}$ अथवा $\frac{8}{10}$ (ii) $\frac{11}{24}$ अथवा $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{102}$ अथवा $\frac{12}{102}$

   एतादृशभिन्नानां परस्परं तुलना किमर्थं सरला अस्ति ?

2. अधोलिखितान् आरोहणक्रमे लिखन्तु।

   (a) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$

   (b) $\frac{1}{5}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$

   (c) $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{7}{7}$

7.9.2 असमानभिन्नानां तोलनम्

द्वौ भिन्नौ असमानौ भवतः , यदि तयोः भाजकौ अपि भिन्नौ स्तः। उदाहरणार्थं $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ असमानभिन्नौ स्तः। $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ एतौ अपि असमानभिन्नौ स्तः।

समानांशसहितः असमानभिन्नः

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$

असमानभिन्नयोः $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ एतयोः एकं युग्मं स्वीकृत्य विचारं कुर्वन्तु, ययोः अंशः समानः अस्ति।

$\frac{1}{3}$ बृहत्तरः अस्ति ? अथवा $\frac{1}{5}$ बृहत्तरः अस्ति ।

$\frac{1}{3}$ इत्यस्य कृते वयम् एकं पूर्णं 3 समानभागैः विभाजयामः तेषु एकं भागं स्वीकुर्मः। अवधानं यच्छन्तु यत् $\frac{1}{3}$ इत्यत्र पूर्णं $\frac{1}{5}$ इत्यस्य तुलनापेक्षया न्यूनभागेषु विभाजनं कृतम् अस्ति। अतः $\frac{1}{3}$ इत्यत्र प्राप्तः समानभागः $\frac{1}{5}$ इत्यत्र प्राप्तात् समानभागात् अपि बृहत्तरः अस्ति। यतो हि द्वयोः अपि स्थित्योः वयम् एकमेव भागं स्वीकुर्वन्तः स्मः इत्यतः पूर्णस्य $\frac{1}{3}$ बोधकः भागः तस्य $\frac{1}{5}$ भागं दर्श्यमानभागात् अपि अधिकतरः अस्ति। अतः $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ अस्ति।

इत्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ अस्ति। अस्मिन् सन्दर्भे स्थितिः यथापूर्वम् अस्ति, केवलम् इदमेव अन्तरम् अस्ति यत् अंशः 1 नास्ति 2 अस्ति। पूर्णस्य $\frac{2}{5}$ कृते $\frac{2}{3}$ तुलनायाम् अधिकसमानभागेषु समानतया विभाजनं कृतम् अस्ति। अतः $\frac{2}{3}$ इत्यस्य स्थितियुक्तः प्रत्येकं समानभागः $\frac{2}{5}$ इत्यस्य स्थितियुक्तात् समानभागादपि बृहदस्ति। अधुना वयं तु समानभागानां समानसंख्यां स्वीकुर्वन्तः स्मः (यतो हि अंशः समानः अस्ति)। अतः पूर्णस्य $\frac{2}{3}$ दर्शमानः भागः तस्य $\frac{2}{5}$ दर्श्यमानभागात् बृहत्तरः अस्ति। अतः $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ अस्ति।

उपरि उक्त-उदाहरणैः वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् यदि द्वयोः भिन्नयोः अंशः समानः अस्ति तर्हि द्वयोः भिन्नयोः मध्ये लघु-भाजकयुक्तः भिन्नः बृहत्तरः भवति।

इत्थम्.. $\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$, $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$, $\frac{4}{9} > \frac{4}{11}$ इत्यादयः।

आयान्तु $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$ इत्येतान् आरोहणक्रमे लिखामः। सर्वे भिन्नाः असमानाः सन्ति किन्तु एतेषाम् अंशाः समानाः सन्ति। अतः भाजकः यावान् बृहद्भवति भिन्नः अपि

तावान् लघु-भवति। लघुतमः भिन्नः $\frac{2}{13}$ अस्ति यतो हि अस्य भाजकः बृहत्तमः अस्ति । बृहत्तमः भिन्नः $\frac{2}{1}$ अस्ति (अस्य लघुतमः भाजकः अस्ति।)। अवरोहणक्रमे भिन्नाः लिख्यन्ते $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{1}$ ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अधोलिखितान् भिन्नान् आरोहणक्रम-अवरोहणक्रमयोः व्यवस्थितान् कुर्वन्तु।

   (a) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{17}$

   (b) $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{17}$

   (c) उपरि उक्तप्रकारेण इतोऽपि त्रीणि उदाहरणानि लिखन्तु तथा तानि आरोहणक्रम-अवरोहणक्रमयोः व्यवस्थितानि कुर्वन्तु।

भावयन्तु, वयं द्वयोः असमानभिन्नयोः $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ एतयोः तोलनं कर्तुम् इच्छामः। इदं तु तदा एव संभवः भवति, यदा वयं द्वयोः अपि भिन्नयोः भाजकानां भागं केनापि प्रकारेण समानं कुर्मः, अर्थात् तयोः भाजकौ समानौ कुर्मः। एकवारं यदि कुर्मः तर्हि समानभिन्नः प्राप्तः भवति। तस्य अंशानां समानभागानां तुलनां कृत्वा भिन्नानां तुलनां सरलतया कर्तुं शक्नुमः।

आयान्तु, पुनः $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ स्वीकुर्मः तथा च अनयोः तुल्यभिन्नान् जानीमः।

अधुना, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} =$ .....

इत्थम् , $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} =$ .....

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ इत्यत्र समानभाजकः 12 इत्यनेन सहितः तुल्यभिन्नः क्रमशः $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$ अस्ति।

अर्थात् $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ अस्ति तथा $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ अस्ति।

यतो हि $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ अस्ति अतः, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ अस्ति।

उदाहरणम् 6 : $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ अनयोः तुलनां कुर्वन्तु।

समाधानम् : एतौ असमानभिन्नौ स्तः। अनयोः अंशौ अपि भिन्नौ स्तः। आयान्तु, अनयोः तुल्यभिन्नान् लिखामः।

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \frac{28}{35} =$L

$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36}$ =L

$\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$

अतः $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$ अस्ति यतो हि $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ अस्ति । ध्यानं ददतु यत् तुल्यभिन्नानां समानभाजकः 30 अस्ति यः 5 x 6 इत्यनेन समानः अस्ति । एषः 5 6 अनयोः सामान्यगुणजः अस्ति ।

अतः द्वयोः असमानभिन्नयोः तोलनसमये वयं प्रथमं तेषां भिन्नानां तादृशतुल्यभिन्नान् जानीमः येषु तेषां भाजकानां सामान्यगुणजः स्यात् ।

उदाहरणम् 7 : $\frac{5}{6}$ $\frac{13}{15}$ अनयोः तोलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : एतौ असमानभिन्नौ स्तः । प्रथमं वयं 6 15 अनयोः सामान्यगुणजेन सहितौ तुन्यभिन्नौ जानीमः ।

अधुना, $\frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$, $\frac{13 \times 2}{15 \times 2} = \frac{26}{30}$ अस्ति ।

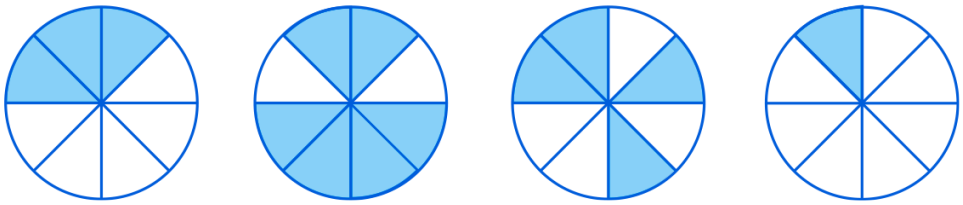
अतः $\frac{26}{30} > \frac{25}{30}$ अस्ति ,यतो हि $\frac{13}{15} > \frac{5}{6}$ अस्ति ।

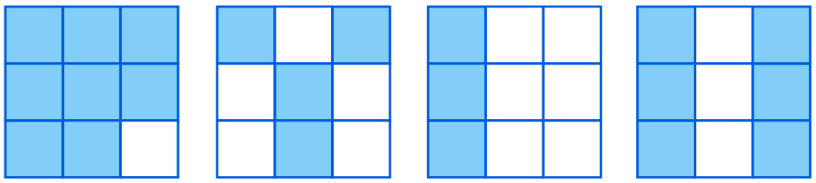
ल.सा.अ. किमर्थम् ?

6 15 अनयोः गुणनफलं 90 अस्ति । स्पष्टतः 90, 6 15 अनयोः एकः समानगुणजः अस्ति । वयं 30 इत्यस्य स्थाने 90 अपि प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः । अत्र कोऽपि दोषः नास्ति । परन्तु वयं जानीमः यत् लघुसंख्याभिः कार्यं बहुसरलं तथा च साहाय्यकरं भवति । अतः वयं सामान्यगुणजं लघुतमम् एव स्वीकर्तुं इच्छामः । अतः समानभाजकं कर्तुं भाजकानां ल.सा.अ. इत्यस्य कृते प्राथमिकता दीयते ।

अभ्यासः 7.4

1. प्रत्येकं चित्रस्य कृते भिन्नान् लिखन्तु । भिन्नानां मध्ये समुचितचिह्नस्य '<' , '=' , '>' प्रयोगं कुर्वन्तः तान् आरोहण-अवरोहणक्रमेषु लिखन्तु ।

(a) 

(b) 

(c) $\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}, \frac{6}{6}$ एतान् संख्यारेखायां दर्शयन्तु।

दत्तभिन्नयोः मध्ये उचितं चिह्नं "<" ">" स्थापयन्तु।

$\frac{5}{6} \square \frac{2}{6}$, $\frac{3}{6} \square 0$, $\frac{1}{6} \square \frac{6}{6}$, $\frac{8}{6} \square \frac{5}{6}$

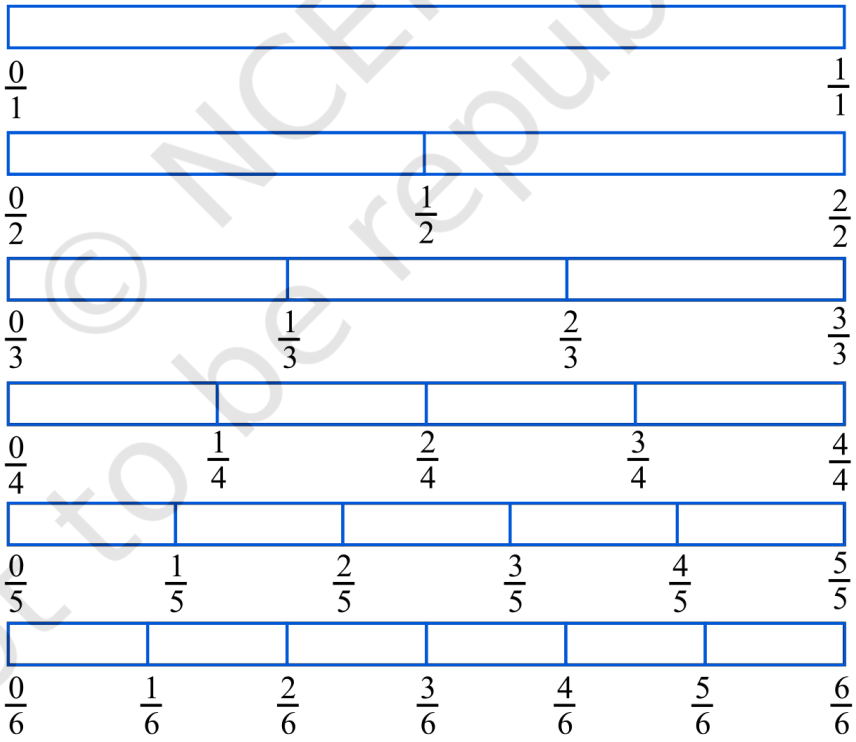
2. भिन्नानां तुलनां कुर्वन्तु समुचितं चिह्नं स्थापयन्तु।

(a) $\frac{3}{6} \square \frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7} \square \frac{1}{4}$

(c) $\frac{4}{5} \square \frac{5}{5}$ (d) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{7}$

3. एवमेव इतोऽपि पञ्चयुग्मान् स्वीकृत्य चिह्नं स्थापयन्तु।

4. अधोलिखिताः आकृतीः पश्यन्तु भिन्नानां मध्ये समुचितं चिह्नं '>', '=', '<' स्थापयन्तु।



(a) $\frac{1}{6} \square \frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{4} \square \frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3} \square \frac{2}{4}$

(d) $\frac{6}{6} \square \frac{3}{3}$ (e) $\frac{5}{6} \square \frac{5}{5}$

एवमेव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु तथा च स्व-मित्रैः सह तेषां समाधानं कुर्वन्तु।

© NCERT not to be republished

5. पश्यामः कियता वेगेन भवन्तः कुर्वन्ति ? समुचितं चिह्नं पूरयन्तु : (<, = , >)

(a) $\frac{1}{2} \square \frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4} \square \frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5} \square \frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{4} \square \frac{2}{8}$ (e) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9} \square \frac{3}{9}$

(g) $\frac{1}{4} \square \frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10} \square \frac{4}{5}$ (i) $\frac{3}{4} \square \frac{7}{8}$

(j) $\frac{6}{10} \square \frac{4}{5}$ (k) $\frac{5}{7} \square \frac{15}{21}$

6. अधोलिखितभिन्नाः तिस्रः प्रत्येकं संख्याः निरूपयन्ति । एतान् सरलतमरूपेण परिवर्त्य तेषां त्रयाणां तुल्यभिन्नानां समूहरूपेण लिखन्तु ।

(a) $\frac{2}{12}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{8}{50}$

(d) $\frac{16}{100}$ (e) $\frac{10}{60}$ (f) $\frac{15}{75}$

(g) $\frac{12}{60}$ (h) $\frac{16}{96}$ (i) $\frac{12}{75}$

(j) $\frac{12}{72}$ (k) $\frac{3}{18}$ (l) $\frac{4}{25}$

7. अधोलिखितानां कृते उत्तरं ददतु । लिखन्तु दर्शयन्तु यत् भवन्तः कथम् एतेषां समाधानं कृतवन्तः इति ?

(a) किं $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ? (b) किं $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ?

(c) किं $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{20}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ? (d) किं $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{30}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ?

8. इला 100 पृष्ठयुक्तस्य एकस्य पुस्तकस्य 25 पृष्ठं पठति । ललिता अस्य एव पुस्तकस्य 1/2 भागं पठति । तर्हि का न्यूनं पठितवती ?

9. रफीफः एकस्याः होरायाः $\frac{3}{6}$ भागपर्यन्तं व्यायामं कृतवान् तथा रोहितः एकस्याः होरायाः $\frac{3}{4}$ भागपर्यन्तं व्यायामं कृतवान् । कः अधिकसमयं व्यायामं कृतवान् ।

10. 25 छात्राणाम् एकस्यां A कक्ष्यायां 20 छात्राः प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णाः अभवन् 30 छात्राणाम् एकस्यां B कक्ष्यायां 24 छात्राः प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णाः अभवन् । कस्यां कक्ष्यायां छात्राणाम् अधिकभागः प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णतां लब्धवान् ?

7.10 भिन्नानां योगः व्यवकलनम्

अधुनापर्यन्तं वयं प्राकृतसंख्यानां पूर्णसंख्यानां तथा च पूर्णाङ्कानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः। अस्मिन् अध्याये वयं नूतनप्रकारकसंख्यानाम् अध्ययनं कुर्वन्तः स्मः यान् भिन्नाः इति वदामः।

यदा कदापि अस्माभिः नूतनसंख्याः प्राप्ताः भवन्ति तदा वयं तदुपरि संक्रियाः कर्तुं चिन्तनं कुर्मः। किं वयम् एतेषां योजनं कर्तुं शक्नुमः ? यदि शक्नुमः तर्हि कथम् ? किं वयम् एकस्यां संख्यायां अन्यसंख्यां निष्कासितुं शक्नुमः ? अर्थात् किं वयम् एकस्याः संख्यायाः अन्यसंख्यां व्यवकलयितुं शक्नुमः ? इत्यादयः। संख्यानां विषये पूर्वं पठितगुणाः किं एताः नूतनसंख्याः अपि प्रभावयन्ति ? एतासां संख्यानां नूतनगुणाः के ? वयं एतदपि पश्यामः यत् एताः संख्याः अस्माकं दैनिकजीवने केन प्रकारेण उपयोगिन्यः सन्ति इति।

एतत् उदाहरणं पश्यन्तु। एका चायापणी स्वापणे प्रातः $2\frac{1}{2}$ लीटर् दुग्धस्य तथा सायं $1\frac{1}{2}$ लीटर् दुग्धस्य उपयोगं करोति। स्वापणे सा एकस्मिन् दिने आहत्य कियतः दुग्धस्य प्रयोगं करोति ?

अथवा शेखरः मध्याह्नभोजने 2 रोटिकां खादितवान् रात्रिभोजने $1\frac{1}{2}$ रोटिकां खादितवान्। सः आहत्य कति रोटिकाः खादितवान् ?

स्पष्टमस्ति यत् द्वयोः अपि स्थित्योः भिन्नानां योजनम् आवश्यकम् अस्ति। एतेषु कियन्तः योगाः मौखिकरूपेण सरलतया कर्तुं शक्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. मम माता एकं सेवफलं चतिर्भिः समानभागैः विभाजनं कृतवती। सा मह्यं 2 भागम् मम भ्रात्रे 1 भागं दत्तवती। तर्हि सा आवाभ्यां आहत्य सेवफलस्य कियन्तं भागं दत्तवती ?
2. माता नीलूम् तस्याः भ्रातरं गोधूमे विद्यमानान् उपलान् निष्कासयितुम् उक्तवती। नीलूः पूर्ण-उपलस्य $\frac{1}{4}$ भागं निष्कासितवती। तस्याः भ्राता अपि $\frac{1}{4}$ भागं निष्कासितवान्। तर्हि द्वावपि मिलित्वा उपलस्य आहत्य कियन्तं भागं निष्कासितवन्तौ ?
3. सोहनः स्व-अभ्यासपुस्तकस्य उपरि आच्छादन-कर्गदं स्थापयन् आसीत्। सः सोमवासरे $\frac{1}{4}$ भागम् आच्छादनकर्गदं स्थापितवान्। मङ्गलवासरे सः अन्यं $\frac{1}{4}$ भागम् आच्छादनकर्गदं स्थापितवान् तथा बुधवासरे सम्पूर्णं कृतवान्। तर्हि बुधवासरे सः आच्छादनकर्गदस्य कियन्तं भागं स्थापितवान् ?

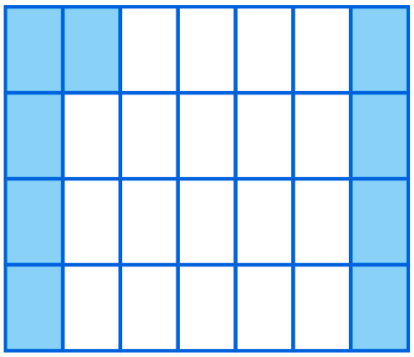
एतत् कुर्वन्तु

स्व-मित्रैः सह एवमेव दश-उगाहरणानि निर्मान्तु तेषां च समाधानं कुर्वन्तु।

7.10.1 समानभिन्नानां योगः तथा व्यवकलनम्

सर्वान् भिन्नान् मोखिकरूपेण योजयितुं न शक्यते। अस्माभिः एतत् ज्ञातव्यं वर्तते यत् विभिन्नस्थितिषु एतान् कथं योजयामः प्रक्रियायाः पठनस्य आवश्यकता अपि वर्तते इति। वयं समानभिन्नानां योगेन प्रारम्भं कुर्मः।

एकं 7 x 4 ग्रिड्-कर्गदं स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 7.13)। अस्य कर्गदस्य प्रत्येकं पङ्क्तौ 7 कोशाः सन्ति एवां प्रत्येकं स्तम्भे 4 कोशाः सन्ति।

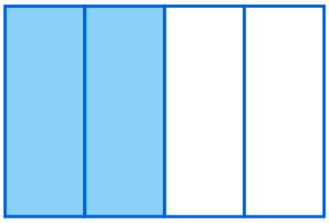


आकृति 7.13

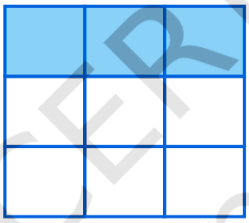
तर्हि अत्र कति कोशाः सन्ति ? एतेषु 5 कोशेषु हरितवर्णं पूरयन्तु । हरितक्षेत्रम् एकस्य पूर्णस्य कतमः भिन्नः अस्ति ? अधुना कर्गदस्य चतुर्षु कोशेषु पीतवर्णं पूरयन्तु । पीतवर्णयुक्तं क्षेत्रम् एकस्य पूर्णस्य कतमः भिन्नः अस्ति ? एकस्य पूर्णस्य आहत्य कतमः भिन्नः वर्णेन पूरितः अस्ति ? किं एतेन स्पष्टं भवति यत् $\frac{5}{28} + \frac{4}{28} = \frac{9}{28}$ अस्ति इति ?

इतोऽपि उदाहरणानि पश्यन्तु।

अकृतौ 7.14 (i) इत्यत्र आकृतेः द्वितीय चतुर्थांशभागः छायाङ्कितः अस्ति। अस्यार्थः अयमस्ति यत् 4 इत्यस्मिन् 2 भागः अर्थात् आकृतेः $\frac{1}{2}$ भागः छायाङ्कितः अस्ति।



आकृति 7.14 (i)



आकृति 7.14 (ii)

अर्थात् $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ अस्ति।

आकृतिं 7.14 (ii) पश्यन्तु।

आकृतिः 7.14 (ii) $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1+1+1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ इति प्रदर्शयति।

भवन्तः एतेभ्यः उदाहरणेभ्यः किं शिक्षितवन्तः ? वयं प्राप्तवन्तः यत् द्वयोः अथवा अधिकसमानभिन्नानां योगः एवमेव प्रकारेण प्राप्तुं शक्नुमः -

सोपानम् 1 अंशानां योजनं कुर्वन्तु।

सोपानम् 2 समानभाजकान् तत्रैव स्थापयन्तु।

सोपानम् 3 परिणामान् अस्मिन् रूपे लिखन्तु : $\frac{\text{प्रथमचरणस्य परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणस्य परिणामः}}$

आयान्तु अनेन विधिना $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ एतत् द्वयं योजयामः। वयं प्राप्नुमःयत् $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$

अधुना वदन्तु $\frac{7}{12}, \frac{3}{12}$ अनयोः योगफलं किम्?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. आकृतीनां साहाय्येन योजयन्तु।

   (i) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

2. $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ अनयोः योजनेन वयं किं प्राप्नुमः।

   भवन्तः चित्ररूपेण कथं दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? कर्गज-पुटीकरण-क्रियया कथं दर्शयितुं शक्यते ?

3. यथा प्रश्नः 1 2 अस्ति तथैव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु।

   स्वमित्रैः सह तेषां समाधानं कुर्वन्तु।

शेषस्य अवगमनम्

शर्मिलायाः समीपे एकस्य केक् इति मधुरखाद्यस्य $\frac{5}{6}$ भागः आसीत्। सा केक् इत्यस्य $\frac{2}{6}$ भागं स्व-अनुजाय दत्तवती। तर्हि तस्याः पार्श्वे कियत् केक्-खाद्यं अवशिष्टम् ?

एकया आकृत्या इमां स्थितिं सरलतया स्पष्टीकर्तुं शक्नुमः। ध्यानं ददतु यत् अत्र समानभिन्नाः सन्ति (आकृतिः 7.15)।

आकृति 7.15

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ अर्थात् $\frac{1}{2}$।

(किम् एषः समानभिन्नानां योजनरूपविधिः नास्ति ?)

इत्थम्, वयं द्वयोः समानभिन्नयोः अन्तरं अधोलिखितप्रकारेण ज्ञातुं शक्नुमः।

सोपानम् 1 बृहदंशे लघु-अंशस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

सोपानम् 2 भाजकं तत्रैव स्थापयन्तु।

सोपानम् 3 भिन्नम् इत्थं लिखन्तु $\frac{\text{प्रथमचरणस्य परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणस्य परिणामः}}$

किम् अधुना वयं $\frac{3}{10}$ इत्यस्मिन् $\frac{8}{10}$ व्यवकलयितुं शक्नुमः ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$ अनयोः अन्तरं जानन्तु।

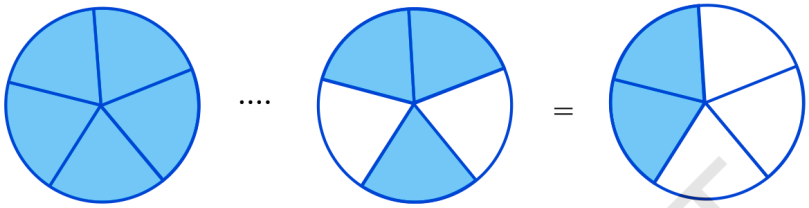
2. माता एकां गुडस्य पट्टिकां गोलाकारेण निर्मितवती। सा ताम् 5 समानभागैः विभाजितवती। सीमा तेषु एकं भागं खादितवती। यदि अहम् अन्यम् एकं भागं स्वीकरोमि तर्हि गुडपट्टिकायाःकतमः भागः अवशिष्टः भवति।

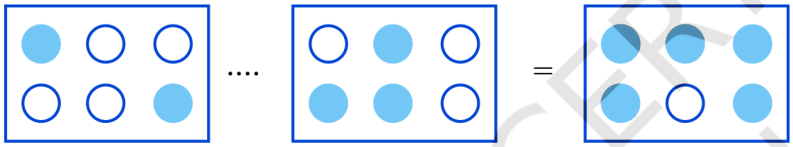
3. मम अग्रजा एकं कलिङ्गफलं 16 समानभागैः विभजनं कृतवती । मया फलस्य 7 भागाः खादिताः । मम मित्रेण 4 भागाः खादिताः । अवां मिलित्वा कियत्कलिङ्गभागं खादितवन्तौ ? मया मममित्रादपि कियान् अधिकः कलिङ्गभागः खादितः ? कियान् भागः अवशिष्टः ?
4. इत्थम् एव इतोऽपि पञ्च-प्रश्नान् निर्मान्तु तथा मित्रैः सह समाधानं कुर्वन्तु ।

अभ्यासः 7.5

1. अधोलिखितभिन्नान् योगस्य व्यवकलनस्य च उचितरूपेण लिखन्तु ।

(a)

(b) 

(c) 

2. समाधानं कुर्वन्तु ।

(a) $\frac{1}{18} + \frac{1}{18}$ (b) $\frac{8}{15} + \frac{3}{15}$ (c) $\frac{7}{7} - \frac{5}{7}$

(d) $\frac{1}{22} + \frac{21}{22}$ (e) $\frac{12}{15} - \frac{7}{15}$ (f) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

(g) $1 - \frac{2}{3} \left(1 = \frac{3}{3}\right)$ (h) $\frac{1}{4} + \frac{0}{4}$ (i) $3 - \frac{12}{5}$

3. शुभमा स्व-प्रकोष्ठस्य भित्तेः $\frac{2}{3}$ भागं वर्णीकृतवान् । तस्याः भगिनी माधवी तस्याः कृते साहाय्यं कृतवती तथा तस्याः भित्तेः $\frac{1}{3}$ भागं वर्णीकृतवती । तयोः द्वयोः मिलित्वा आहत्य कियान् भागः वर्णात्मकः जातः ?

4. रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

(a) $\frac{7}{10} - \square = \frac{3}{10}$ (b) $\square - \frac{3}{21} = \frac{5}{21}$

(c) $\square - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$ (d) $\square + \frac{5}{27} = \frac{12}{27}$

5. जावेदन नारङ्गफलस्य पेटिकायाः $\frac{5}{27}$ भागः प्राप्तः । पेटिकायां नारङ्गफलस्य कतमः भागः अवशिष्टः ?

7.10.2 भिन्नानां योजनम् व्यवकलनम्

वयं समानभिन्नानां योगस्य तथा व्यवकलनस्य अध्ययनं कृतवन्तः । येषां भिन्नानां भाजकः समानः नास्ति तेषां योजनं तथा व्यवकलनम् अपि कठिनं नास्ति। यदा भिन्नानां योजनं तथा व्यवकलनं करणीयं भवति तर्हि अस्माभिः प्रथमं दत्तभिन्नाः समानभाजकभिन्नेषु परिवर्तनीयाः सन्ति अग्रे चलन्तु।

$\frac{1}{5}$ इत्यत्र किं योजनेन $\frac{1}{2}$ इत्यस्य प्राप्तिः भवति ? अस्य अयमर्थः यत् इच्छितसंख्यां प्राप्तुं $\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् $\frac{1}{5}$ इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

यतो हि $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ असमानभिन्नौ स्तः अतः व्यवकलयितुं प्रथमं वयं समानभाजकयुक्तभिन्नेषु परिवर्तयामः। $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ अनयोः समानभाजकयुक्तः तुल्यभिन्नः क्रमशः $\frac{5}{10}$ $\frac{2}{10}$ अस्ति।

एतदर्थम् अस्ति यत् $\frac{1}{2} = \frac{1 \text{ X } 5}{2 \text{ X } 5} = \frac{5}{10}$ च $\frac{1}{5} = \frac{1 \text{ X } 2}{5 \text{ X } 2} = \frac{2}{10}$ अस्ति।

अतः $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}$

उदहरणम् 8 : 5/6 इत्यस्मिन् 3/4 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : अस्माभिः समानभाजकयुक्तस्य $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ अनयोः तुल्यभिन्नस्य निर्माणं कर्तव्यम् अस्ति।

एषः भाजकयोः 4 6 इत्यनयोः ल.सा.अ. 12 अस्ति।

अतः, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5 \text{ X } 2}{6 \text{ X } 2} - \frac{3 \text{ X } 3}{4 \text{ X } 3} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$

उदाहरणम् 9 : $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ अनयोः योजनं कुर्वन्तु।

समाधानम् : 5 3 अनयोः ल.सा.अ 15 अस्ति।

अतः $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \text{ X } 3}{5 \text{ X } 3} + \frac{1 \text{ X } 5}{3 \text{ X } 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

उदाहरणम् 10 : सरलं कुर्वन्तु : 3/5 -7/20

समाधानम् : 5 20 अनयोः ल.सा.अ. 20 अस्ति।

अतः, $\frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{3 \text{ X } 4}{5 \text{ X } 4} - \frac{7}{20} = \frac{12}{20} - \frac{7}{20}$

$= \frac{12-7}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ अनयोः योजनं कुर्वन्तु।

2. $\frac{5}{7}$ इत्यस्मिन् $\frac{2}{5}$ इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

वयं केन प्रकारेण मिश्रितभिन्नानां योजनं कुर्मः व्यवकलनं कुर्मः ?

मिश्रितभिन्नाः एकेन पूर्णभागरूपेण अथवा एकेन उचितभिन्नस्य योगरूपेण लिख्यन्ते अथवा पूर्णरूपेण एकानुचितभिन्न(विषमभिन्न) रूपेण। मिश्रितभिन्नानां योगस्य (व्यवकलनस्य) एकः विधिः एषः अस्ति यत् पूर्णभागानां तथा भिन्नीयभागनाम् उपरि संक्रियाः पृथक् पृथक् करणीयाः भवन्ति तथा अन्यः विधिः एषः अस्ति यत् तान् प्रथमं विषमभिन्नेषु परिवर्त्य अनन्तरं साक्षात् तेषां योजनम्।

उदाहरणम् 11 : $2\frac{4}{5}$ $3\frac{5}{6}$ अनयोः योगं कुर्वन्तु।

समाधानम् : $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 2 + \frac{4}{5} + 3 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

अधुना, $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{4 \text{ X } 6}{5 \text{ X } 6} + \frac{5 \text{ X } 5}{6 \text{ X } 5}$ (यतो हि 5 6 अनयोः ल.सा. अ. 30)|

$= \frac{24}{30} + \frac{25}{30} = \frac{49}{30} = \frac{30 + 19}{30}$

$= 1 + \frac{19}{30}$

इत्थम्, $5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{19}{30}$

$= 6 + \frac{19}{30} = 6\ \frac{19}{30}$

अतः, $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 6\frac{19}{30}$

चिन्तयन्तु चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु।

किं भवन्तः अस्य प्रश्नस्य समाधानं कर्तुं अन्यां प्रक्रियां ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 12 : $4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5}$ जानन्तु।

समाधानम् : पूर्णसंख्ये 4 2 तथा भिन्नत्मकसंख्ये $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ एते पृथक्तया व्यवकलयितुं शक्यते।

अवधानं ददतु यत् $4 > 2$ अस्ति $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ अस्ति।

अतः $4\frac{2}{5} - 2\frac{2}{5} = (4-2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$

उदाहरणम् 13 : सरलीकुर्वन्तु : $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

समाधानम् : अत्र $8 > 2$ अस्ति $\frac{1}{4} < \frac{5}{6}$ अस्ति। अधोलिखितप्रकारेण अस्य प्रश्नस्य समाधानं कर्तुं शक्नुमः।

$8\frac{1}{4} = \frac{(8 \times 4) + 1}{4} = \frac{33}{4}$ तथा $2\frac{5}{6} = \frac{2x6 + 5}{6} = \frac{17}{6}$

अधुना, $\frac{33}{4} - \frac{17}{6} = \frac{33 \times 3}{12} - \frac{17 \times 2}{12}$

(यतो हि 4 एवम् 6 अनयोः ल.सा.अ. 12 अस्ति)

$= \frac{99 - 34}{12} = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$

अभ्यासः 7.6

1. समाधानं कुर्वन्तु।

(a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ (b) $\frac{3}{10} + \frac{7}{15}$ (c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{7}$ (d) $\frac{5}{7} + \frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ (f) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ (h) $\frac{5}{6} + \frac{1}{3}$

(i) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ (j) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (k) $1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}$

(l) $4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$ (m) $\frac{16}{5} + \frac{7}{5}$ (n) $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$

2. सरिता $\frac{2}{5}$ मी. केशबन्धकं (रिबन्) क्रीणितवती ललिता $\frac{3}{4}$ मी.। तर्हि द्वे अपि मिलित्वा आहत्य कियन्तं केशबन्धकं क्रीणितवत्यौ ?

3. नयनया केक्-खाद्यस्य $1\frac{1}{2}$ भागः प्राप्तः नजमया $1\frac{1}{3}$ भागः। द्वाभ्यां मिलित्वा कियतः केक्-खाद्यस्य भागः प्राप्तः ?

4. रिक्तस्थानं पूरयत : (a) $\square - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ (b) $\square - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{2} - \square = \frac{1}{6}$

5. योग-व्यवकलनमञ्जूषां पूरयन्तु।

(a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6. $\frac{7}{8}$ मीटर्. तन्त्री भागद्वयेन विभजिता। एकः भागः $\frac{1}{4}$ मीटर् अस्ति तर्हि द्वितीयभागः कति मीटर् अस्ति ?

7. नन्दिन्याः गृहं तस्याः विद्यालयात् $\frac{9}{10}$ किमी दूरे अस्ति। सा स्वल्पं दूरं पद्भ्यां क्रमति पुनः $\frac{1}{2}$ किमी दूरं लोकयाने चलति। सा कियद्दूरं पद्भ्यां चलति ?

8. आशा सेम्युलः इत्यनयोः द्वयोः पार्श्वे पुस्तकस्थापनार्थं द्वे सदृशकपाटिके स्तः। आशायाः कपाटिकायाः $\frac{5}{6}$ भागः पुस्तकैः पूरितः अस्ति सेम्युलस्य कपाटिकायाः $\frac{2}{5}$ भागः भरितः अस्ति। तर्हि कस्य कपाटिका अधिकतया भरिता अस्ति ? कियान् अधिकः ?

9. जयदेवः स्व-शालायाः क्रीडाक्षेत्रस्य $2\frac{1}{5}$ निमेषैः भ्रमणं करोति। राहुलः एतदर्थं $\frac{7}{4}$ निमेषान् स्वीकरोति। एतयोः कः न्यूनसमयं स्वीकरोति ? कियत् न्यूनं स्वीकरोति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. (a) एकः भिन्नः एतादृश-संख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य एकं भागं निरूपितं करोति अथवा संख्यारेखायाः उपरि संक्रियाणां निरूपणं करोति। पूर्णः एकम् अनन्यवस्तु अपि भवितुं शक्नोति वस्तूनां समूहः अपि।

(b) कस्यामपि स्थितौ कृतगणनभागान् भिन्नेषु व्यक्तीकर्तुम् एतत् आवश्यकं भवति यत् तेषां सर्वे भागाः समानाः स्युः ।

2. भिन्नः $\frac{5}{7}$ इत्यस्मिन् 5 अंशः तथा 7 भाजकः इति कथ्यते ।

3. भिन्नान् संख्यारेखायाः उपरि अपि दर्शयितुं शक्यते । प्रत्येकं भिन्नस्य कृते संख्यारेखायां निश्चितबिन्दुः भवति।

4. एकस्मिन् उचिते भिन्ने अंशः भाजकात् लघुः भवति । विषमे भिन्ने भाजकः सर्वदा महान् भवति । विषमभिन्नं पूर्णसहितभागरूपेण अपि लेखितुं शक्यते । अस्यां स्थितौ एषः भिन्नः मिश्रितभिन्नः इत्युच्यते ।

5. द्वौ भिन्नौ तुल्यभिन्नौ इत्युच्येते यदि तौ समानमानं निरूपितं कुरुतः । प्रत्येकं समभिन्नस्य अथवा विषमभिन्नस्य अनेकतुल्यभिन्नाः भवन्ति । एकस्य दत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं निष्कासयितुं वयं भिन्नस्य अंशं तथा भाजकं समानशून्येतरसंख्यया गुणनम् अथवा भागं कर्तुं शक्नुमः ।

6. एकः भिन्नः स्व-सरलतम(न्यूनतम)रूपेण तदा एव भवति यदि तस्य अंशे तथा भाजके 1 संख्यां विना अन्यः कोऽपि उभयनिष्ठः अथवा सामान्यगुणनखण्डः न स्यात् ।

दशमांशः

अध्यायः 8

8.1 भूमिका

सविता अपि च शमा गृहोपयोगिवस्तु आनयनार्थं विपणीं गच्छन्त्यौ आस्ताम्। सविता उक्तवती, " मम समीपे 5 रूप्यकाणि 75 पणकानि सन्ति "। शमा उक्तवती, " मम समीपे 7 रूप्यकाणि 50 पणकानि सन्ति"। ते द्वे रूप्यकाणि अपि च पणकम् एतत् द्वयमपि दशमांशरूपेण लेखितुं जानीतः स्म।

अतः सविता उक्तवती, मम समीपे 5.75 रूप्यकाणि सन्ति अपि च शमा उक्तवती, मम समीपे 7.50 रूप्यकाणि सन्ति।

किं ते द्वे अपि सम्यक् उक्तवत्यौ ?वयं जानीमः यत् बिन्दुः एकं दशमांशं दर्शयति इति । अस्मिन् अध्याये वयं दशमांशस्य विषये इतोऽपि अधिकतया पठामः।

8.2 दशांशः

रविः अपि च राजूः स्व-अङ्कन्याः लम्बं मापितवन्तौ। रवेः अङ्कनी 7 सेमी 5 मिमी लम्बमाना अपि च राज्वोः 8 से.मी. 3 मिमी आसीत्। किं भवन्तः एतान् लम्बान् सेमी इत्यनेन सह दशमलवरूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति ?

वयं जानीमः यत् 10 मि.मी. = 1 से.मी.

अतः 1 मि.मी. = $\frac{1}{10}$ से.मी.

अधुना रवेः अङ्कन्याः लम्बः = 7 सेमी 5 मिमी

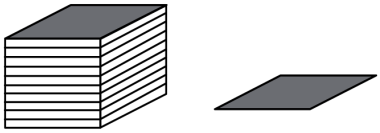
= $7\frac{5}{10}$ सेमी

अर्थात् 7 से.मी. अपि च 1 से.मी. अनयोः पञ्च-दशांशभागः

राज्वोः अङ्कन्याः लम्बः = 8 सेमी 3 मि.मी.

= $8\frac{3}{10}$ से.मी.

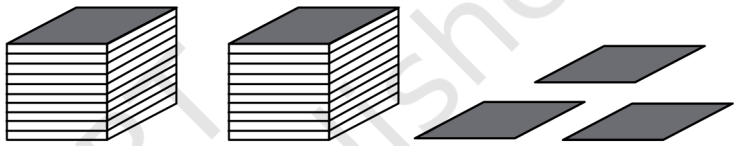
अर्थात् 8 से.मी. अपि च 1 से.मी. इत्यस्य त्रयः दशांशभागाः आयान्तु, पूर्वम् अधीतविषयान् पुनः स्मरन्तु ।

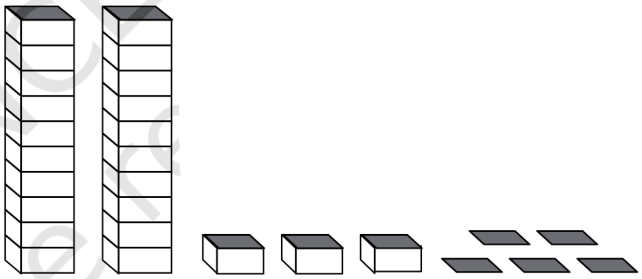


यदि वयम् एककानि खण्डद्वारा दर्शयिष्यामः तर्हि एकम् एककम् एकः खण्डः द्वौ एककौ द्वौ खण्डौ एवमेव अग्रेऽपि ।

एकं खण्डं यदि दशसमानभागेषु विभजितं कुर्मः तर्हि प्रत्येकं भागम् एकस्य एककस्य $\frac{1}{10}$ (एकः दशांशः) अस्ति, द्वौ भागौ द्वौ दशांशभागौ दर्शयतः अपि च पञ्चभागाः पञ्चदशांशभागान् एवमेव द्वयोः खण्डयोः तथा त्रयाणां भागानां मिलितरूपम् अनेन प्रकारेण लेखितुं शक्यते ।

एककम्	दशांशः
(1)	($\frac{3}{10}$)
2	3





वयं अमुं 2.3 इत्यपि लेखितुं शक्नुमः अपि च द्वे बिन्दु-त्रीणी इति पठामः ।

वयम् अन्यम् उदाहरणं पश्यामः यत्र एकस्मात् अधिक-एकाकानि सन्ति । प्रत्येकं स्तूपः 10 एककानि दर्शयति । अतः अत्र दर्शितसंख्याः इत्थं सन्ति ।

दशकः	एककः	दशांशः
(10)	(1)	($\frac{1}{10}$)
2	3	5

अतः $20 + 3 + \frac{5}{10} = 23.5$

इदं वयं २३.५ इति पठामः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं भवन्तः अधोलिखितान् दशमांशरूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति ?

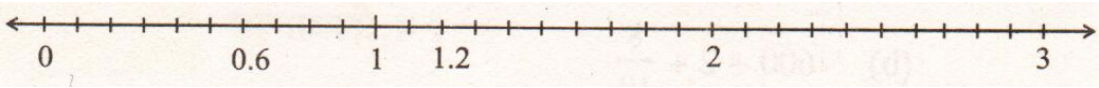
शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशांशः $(\frac{1}{10})$
5	3	8	1
2	7	3	4
3	5	4	6

2. रवेः तथा राज्वोः अङ्कन्याः लम्बं दशमांशस्य प्रयोगेण सह सेमी माने लिखन्तु।
3. प्रथमप्रश्नेन समम् अन्यानि त्रीणि उदाहरणानि लिखन्तु अपि च समाधानमपि कुर्वन्तु।

संख्यारेखायाः उपरि निरूपणम्

वयं भिन्नान् संख्यारेखायाः उपरि निरूपितवन्तः। आयान्तु, अधुना दशमांशानामपि संख्यारेखायाः उपरि निरूपणं कर्तुं शिक्षयामः। आयान्तु संख्यारेखायाः उपरि 0.6 इत्यस्य निरूपणं कुर्मः।

वयं जानीमः यत् 0.6 शून्यतः अपि बृहदस्ति किन्तु एकतः न्यूनम् इति।



0 अपि च 1 अनयोः मध्ये पञ्चसंख्याः लिखन्तु अपि च ताः संख्यारेखायाः उपरि दर्शयन्तु।

किं भवन्तः अधुना संख्यारेखायाः उपरि 2.3 इत्यस्य निरूपणं कर्तुं शक्नुवन्ति ? परीक्षणं कुर्वन्तु यत् 2.3 इत्यस्य एककनि अपि च दशांशाः कियन्तः भवन्ति इति। संख्यारेखायाः उपरि एषः कुत्र तिष्ठेत् ?

संख्यारेखायाः उपरि 1.4 इत्येतद् दर्शयन्तु।

उदाहरणम् 1 : अधोलिखितसंख्याः स्थानीयमानसारिण्यां लिखन्तु।

(a) 20.5 (b) 4.2

समाधानम् : स्थानीयमानसरिणीं निर्मीय संख्यायाः प्रत्येकम् अङ्कस्य कृते उचितस्थानीयमानं दत्त्वा तान् अधोलिखित-प्रकारेण लिखन्तु।

	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशांशः $(\frac{1}{10})$
20.5	2	0	5
4.2	0	4	2

उदाहरणम् 2 : अधोलिखितान् सर्वान् दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) 2 एककम् अपि च 5 दशांशाः

(b) 30 अपि च 1 दशांशः

समाधानम् : (a) 2 एककम् अपि च 5 दशांशाः

$= 2 + \frac{5}{10} = 2.5$

(b) 30 अपि च 1 दशांशः

$= 30 + \frac{1}{10} = 30.1$

उदाहरणम् 3 : प्रत्येकं दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$ (b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

समाधानम् : (a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$

जानन्तु यत् अस्यां संख्यायां कति दशकानि कति एककानि अपि च कति दशांशाः सन्ति इति।

अत्र 3 दशकानि, 6 एककानि, 2 दशांशाः सन्ति। अतः दशमांशरूपं 36.2 भवति।

(b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

अवधानपूर्वकं दर्शनेन ज्ञायते यत् अस्यां संख्यायां 6 शतकानि, दशकस्थाने कोऽपि अङ्कः नास्ति, 2 एककम् अपि च 8 दशांशाः सन्ति। अतः दशमांशरूपं 602.8 भवति।

दशमांशरूपेण भिन्नः

वयं दृष्टवन्तः यत् एकः भिन्नः यस्य भाजकः 10 अस्ति तं कथं दशमांशरूपेण लेखितुं शक्नुमः इति।

आयान्तु, अधोलिखितान् दशमांशरूपेण लिखितुं प्रयासं कुर्मः। (a) $\frac{22}{10}$ (b) $\frac{1}{2}$

(a) वयं जानीमः, $\frac{11}{5} = \frac{22}{10} = \frac{20+2}{10}$

$= \frac{20}{10} + \frac{2}{10} = 2 + \frac{2}{10} = 2.2$

अतः, $\frac{11}{5} = 2.2$ (दशमांशरूपेण)

(b) $\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् भाजकः 2 अस्ति । दशमांशरूपेण लेखितुं भाजकः 10 एव भवेत् । तुल्यभिन्ने परिवर्तनं कथं करणीयम् इति वयम् पूर्वमेव अधीतवन्तः । अतः, $\frac{1}{2} = \frac{1 \text{ X } 5}{2 \text{ X } 5} = \frac{5}{10} = 0.5$

इत्थम्, $\frac{1}{2}$ इत्यस्य दशमांशरूपम् 0.5 अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

$\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ एतान् दशमांशरूपेण लिखन्तु ।

भिन्नरूपेण दशमांशः

अधुना यावत् वयं अधीतवन्तः यत् केन प्रकारेण भिन्नः यस्य भाजकः 10, 2 अथवा 5 भवति इत्येतत् कथं दशमांशरूपेण लेखितुं शक्यते इति ।

किं वयं 1.2 इति संख्यां भिन्नसंख्यायाः रुपेण लेखितुं शक्नुमः ?

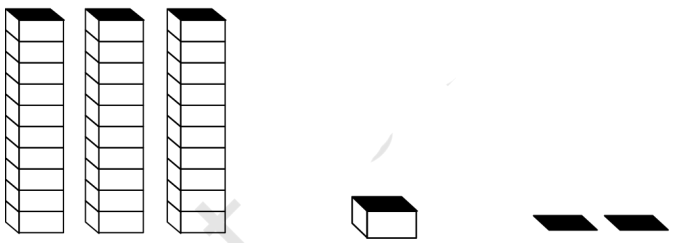
आयान्तु पश्यामः :

$1.2 = \quad 1 + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$

अभ्यासः 8.1

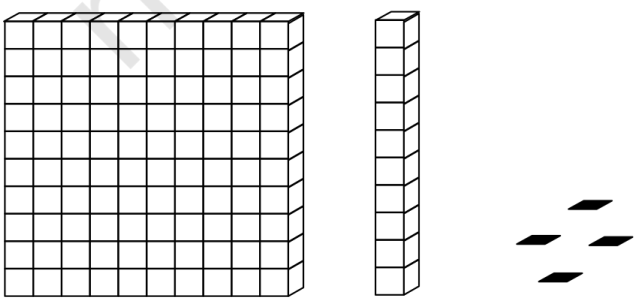
1. प्रदर्शितचित्रानुगुणं सारिण्यां संख्याः लिखन्तु ।

(a)



दशकः एककः दशांशः

(b)



शतकः दशकः दशांशः

शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)

2. अधोलिखिताः दशमांशसंख्याः स्थानीयमानसारिण्यां लिखन्तु।

(a) 19.4 (b) 0.3 (c) 10.6 (d) 205.9

3. अधोलिखितान् दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) 7 दशांशाः

(b) 2 दशकम्, 9 दशांशाः

(c) चतुर्दश दशमांशः षट्

(d) एकं शतकम् अपि च 2 एककम्

(e) षट्शतं दशमांशः अष्टौ

4. अधोलिखितान् दशमांशरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $\frac{5}{10}$ (b) $3+\frac{7}{10}$ (c) $200+60+5+\frac{1}{10}$

(d) $70+\frac{8}{10}$ (e) $\frac{88}{10}$ (f) $4\frac{2}{10}$ (g) $\frac{3}{2}$

(h) $\frac{2}{5}$ (i) $\frac{12}{5}$ (j) $3\frac{3}{5}$ (k) $4\frac{1}{2}$

5. अधोलिखितदशमांशसंख्याःभिन्नरूपेण लिखित्वा न्यूनतमरूपे परिवर्तयन्तु।

(a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8

(e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4

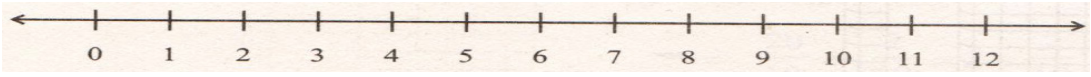
6. सेमी इत्यस्य प्रयोगपुरस्सरम् अधोलिखितान् दशमांशरूपेण परिवर्तयन्तु।

(a) 2 मिमी (b) 30 मिमी (c) 116 मिमी (d) 4 सेमी 2 मिमी

(e) 11 सेमी 52 मिमी (f) 83 मिमी

7. संख्यारेखायां कयोः द्वयोः पूर्णसंख्ययोः मध्ये अधोलिखितसंख्याः स्थिताः सन्ति ? एतासु का पूर्णसंख्या दत्त-दशमांश-संख्यानाम् अधिकतमसमीपे वर्तते ?

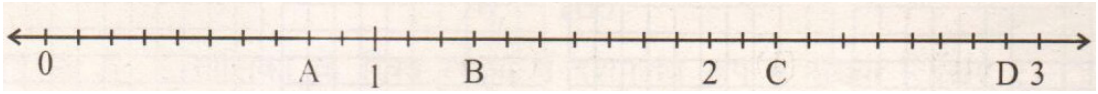
(a) 0.8 (b) 5.1 (c) 2.6 (d) 6.4 (e) 9.0 (f) 4.9



8. अधोलिखितान् संख्यारेखायाः उपरि दर्शयन्तु।

(a) 0.2 (b) 1.9 (c) 1.1 (d) 2.5

9. दत्तसंख्यारेखायाः उपरि स्थित-A , B, C, D बिन्दूनां कृते दशमांशसंख्यां लिखन्तु।



10. (a) रमेशस्य पुस्तकस्य लम्बः 9 सेमी 5 मिमी अस्ति। सेमी इत्यस्मिन् अस्य लम्बः कियान् भवति ?

(b) चणकस्य एकस्य लघुसस्यस्य लम्बः 65 मिमी अस्ति। अस्य लम्बं से.मी. मध्ये व्यक्तीकुर्वन्तु।

8.3 शतांशः

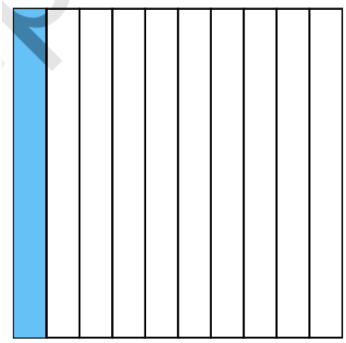
डेविडः स्व-प्रकोष्ठस्य लम्बमानस्य मापनं कुर्वन् आसीत्। सः दृष्टवान् यत् तस्य प्रकोष्ठस्य लम्बमानं 4 मी अपि च 25 सेमी अस्ति।

सः इदं लम्बमानं मीटर् इति माने लेखितुं इच्छति स्म। किं भवन्तः तस्मै साहाय्यं प्रदास्यन्ति ? एकं से.मी. एकस्य मीटर् इत्यस्य कतमः भागः अस्ति ?

1 सेमी = $(\frac{1}{100})$ मी अथवा एकस्य मीटर् इत्यस्य शतांशभागः।

एवमेव प्रकारेण 25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी $(\frac{1}{100})$ इत्यस्य अर्थः अस्ति एकस्य पूर्णस्य 100 भागान् कृत्वा तेषां मध्ये एकः भागः।

यथा वयं $\frac{1}{10}$ इत्यस्य कृते कृतवन्तः अथवा आयान्तु चित्रद्वारा इदमपि दर्शयामः।

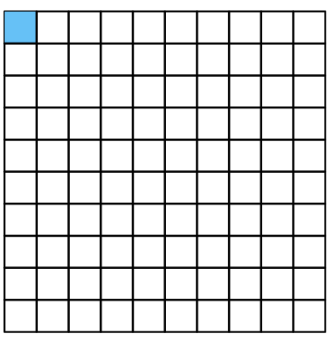


एकं वर्गं एकस्मिन् समानभागे विभजनं कुर्वन्तु। छायाङ्कितः आयतः अस्य वर्गस्य कतमः भागः अस्ति ?

एषः $\frac{1}{10}$ अथवा एकः दशांशः अथवा 0.1 (आकृतिः (i) पश्यन्तु)

अधुना एतेषु प्रत्येकम् आयतं दश-समानभागेषु विभजनं कुर्वन्तु।

इत्थम् अस्माभिः 100 लघु-लघु-वर्गाः प्राप्ताः भवन्ति (आकृतिः (ii) पश्यन्तु)। अत्र प्रत्येकं लघु-वर्गः बृहद्वर्गस्य कतमः भागः अस्ति ?

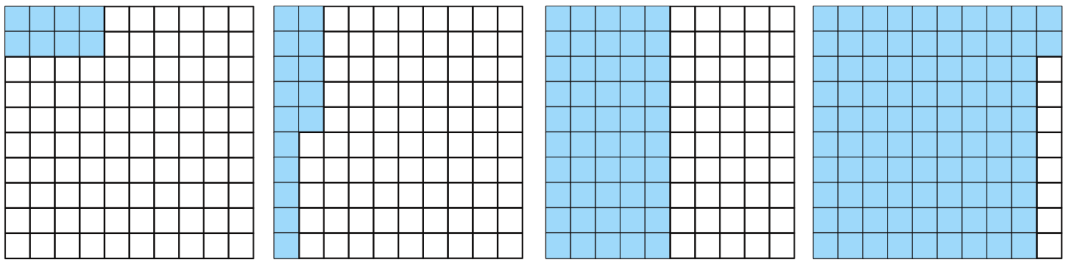


प्रत्येकं लघु-वर्गः बृहद्वर्गस्य $(\frac{1}{100})$ अथवा शतांशः भागः अस्ति ।

दशमांशरूपेण वयं $(\frac{1}{100})$ = 0.01 इति लिखामः अथवा एतं शून्यं दशमांशः शून्यम् एकम् (0.01) इति पठामः।

यदि वयं बृहद्वर्गस्य 8 वर्गान् छायाङ्कितान् कुर्मः, 15 वर्गान् छायाङ्कितान् कुर्मः, 50 वर्गान् छायाङ्कितान् कुर्मः, 92 वर्गान् छायाङ्कितान् कुर्मः तर्हि ते पूर्णवर्गस्य कतमः भागः भविष्यति ?

उपरि उक्तान् समाधातुं अधोलिखितचित्राणां साहाय्यं स्वीकुर्वन्तु ।



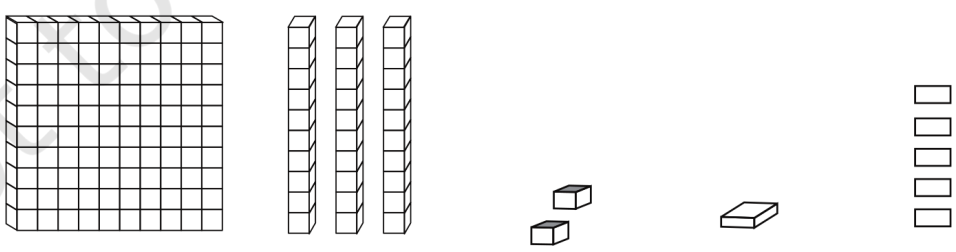
छायाङ्कितः भागः	साधारणः भिन्नः	दशमांशसंख्या
8 वर्गाः	$\frac{8}{100}$	0.08
15 वर्गाः	$\frac{15}{100}$	0.15
50 वर्गाः	_____	_____
92 वर्गाः	_____	_____

आयान्तु, कतिचन अन्याः स्थानीयमानसारिणीः पश्यामः ।

एककः (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)	शतांशः ($\frac{1}{100}$)
2	4	3

उपरि उक्तसारिण्यां दर्शितसंख्याः $2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ सन्ति । दशमांशरूपेण इदं 2.43 इति लिखामः यत् वयं द्वे बिन्दुः चत्वारि त्रीणि इति लिखामः ।

उदाहरणम् 4 : खण्डेषु दत्तसूचनानाम् आधारेण सरिण्यां दत्तरिक्तस्थानेषु दशमांशरूपेण संख्याः लिखन्तु ।

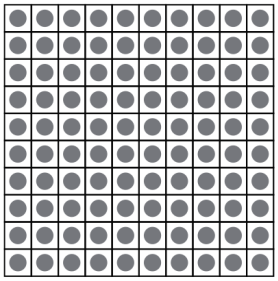


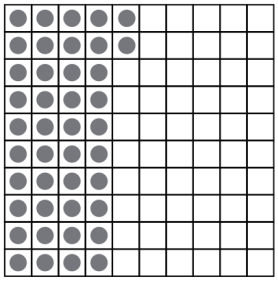
समाधानम् :

शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशमांशः ($\frac{1}{10}$)	शतांशः ($\frac{1}{10^{`}0}$)
1	3	2	1	5

अतः संख्या भवति $100 + 30 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = 132.15$

उदाहरणम् 5 : सारिण्याः रिक्तस्थानेषु दशमांशरूपेण संख्याः लिखन्तु।





एककः (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)	शतांशः ($\frac{1}{100}$)

समाधानम् :

एककः (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)	शतांशः ($\frac{1}{100}$)
1	4	2

अतः संख्या 1.42 अस्ति।

उदाहरणम् 6 : दत्त-स्थानीयमानसारिण्याः संख्याः दशमांशरूपेण लिखन्तु।

शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशमांशः ($\frac{1}{10}$)	शतांशः ($\frac{1}{100}$)
2	4	3	2	5

समाधानम् : संख्या भवति $2 \text{ X } 100 + 4 \text{ X } 10 + 3 + 2 \text{ X } \frac{1}{10} + 5 \text{ X } \frac{1}{100}$

$= 200 + 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 243.25$

वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् यथा यथा वयं दक्षिणतः वामभागे चलामः, प्रति-सोपाने गुणनखण्डः, पूर्वतन-गुणकस्य $\frac{1}{10}$ भवति।

प्रथामाङ्कं 2 इत्याख्यं 100 इत्यनेन गुणनं कृतम्, अग्रिमाङ्कं 4 इत्याख्यं 10 इत्यनेन, अग्रिमं 3 इत्याख्यं 1 इत्यनेन गुणनं कृतम्। तदनन्तरं अग्रिमगुणनखण्डः $\frac{1}{10}$ अस्ति तथा $\frac{1}{100}$ अस्ति। एकस्यां दशमांशसंख्यायां दशमांशबिन्दुः सर्वदा एककदशकस्थानयोः मध्ये स्थाप्यते।

अतः अधुना स्वाभाविकरूपेण वयं स्थानीयमानसारिणीं शतांशेन सहस्रांशपर्यन्तं वर्धयितुं शक्नुमः।

आयान्तु, केषाञ्चन उदाहरणानां समाधानं कुर्मः ।

उदाहरणम् 7 : दशमांशरूपेण लिखन्तु ।

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{7}{1000}$

समाधानम् : (a) अस्माभिः $\frac{4}{5}$ इत्यस्य तादृश-तुल्यभिन्नः स्वीकर्तव्यः अस्ति यस्य भाजकः 10 स्यात् ।

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \text{ X } 2}{5 \text{ X } 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

(b) अत्र अस्माभिः 3/4 इत्यस्य तादृश-तुल्यभिन्नः स्वीकर्तव्यः अस्ति यत् यस्य भाजल्कः 10 अथवा 100 स्यात् । परन्तु तादृशः कोऽपि पूर्णसंख्या नास्ति यां 4 संख्यया गुणनेन 10 इत्यस्य प्राप्तिः भवेत् । अतः अस्माभिः भाजकं 100 इत्यस्यां संख्यायां एव परिवर्तनीयम् अस्ति ।

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \text{ X } 25}{4 \text{ X } 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

(c) $\frac{7}{1000}$, अत्र दशांश-शतंशस्थाने शून्ये स्तः ।

अतः वयं $\frac{7}{1000} = 0.007$ इति लिखामः ।

उदाहरणम् 8 : भिन्नान् लघुतमरूपेषु लिखन्तु ।

(a) 0.04 (b) 2.34 (c) 0.342

समाधानम् : (a) $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

(b) $2.34 = 2 + \frac{34}{100} = 2 + \frac{34 \div 2}{100 \div 2} = 2 + \frac{17}{50} = 2\frac{17}{50}$

(c) $0.342 = \frac{342}{1000} = \frac{342 \div 2}{1000 \div 2} = \frac{171}{500}$

उदाहरणम् 9 : प्रत्येकं दशमांशरूपेण लिखन्तु ।

(a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

समाधानम् : (a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

$$= 235 + 2 \text{ X } \frac{1}{10} + 9 \text{ X } \frac{1}{100}$$

$$= 235.29$$

(b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

$= 50 + 1 \text{ X } \frac{1}{10} + 6 \text{ X } \frac{1}{100}$

$= 50.16$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

$= 16 + 3 \text{ X } \frac{1}{10} + 0 \text{ X } \frac{1}{100} + 5 \text{ X } \frac{1}{1000}$

$= 16.305$

उदाहरणम् 10 : अधोलिखितेषु प्रत्येकं दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) 306 अपि च 7 शतांशः

(b) 11 बिन्दुः 235

(c) 9 अपि च $\frac{25}{1000}$

समाधानम् : (a) 306 अपि च 7 शतांशः

$= 306 + \frac{7}{100}$

$= 306 + 0 \text{ X } \frac{1}{10} + 7 \text{ X } \frac{1}{100} = 306.07$

(b) 11 बिन्दुः 235

$= 11.235$

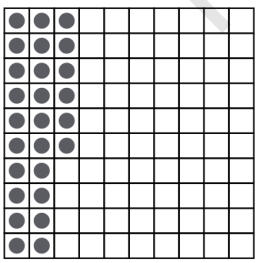
(c) 9 अपि च $\frac{25}{1000}$

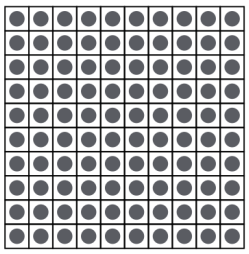
$= \frac{25}{1000} = \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$

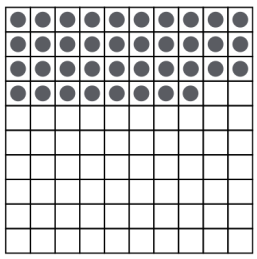
अतः संख्या $= 9 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 9.025$

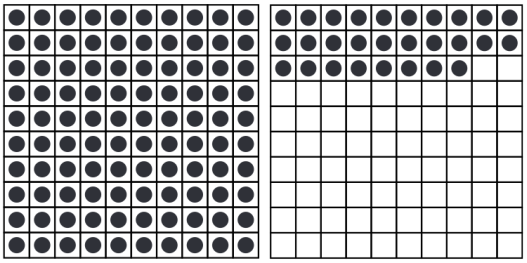
अभ्यासः 8.2

1. एतेषां कोष्ठकानां साहाय्येन सारिणीं पूरयित्वा दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) 

(b) 



(c) 

	एककम्	दशकम्	शतांशः	अङ्कः
(a)				
(b)				
(c)				

2. स्थानीयमानसारिणीं द्रष्ट्वा दशमांशरूपेण लिखन्तु।

	शतकम् 100	दशकम् 10	एककम् 1	दशांशः $\frac{1}{10}$	शतांशः $\frac{1}{100}$	सहस्रांशः $\frac{1}{1000}$
(i)	0	0	3	2	5	0
(ii)	1	0	2	6	3	0
(iii)	0	3	0	0	2	5
(iv)	2	1	1	9	0	2
(v)	0	1	2	2	4	1

3. अधोलिखितान् दशमांशान् स्थानीयमानसारिणीं निर्मीय लिखन्तु।

(a) 0.29 (b) 2.08 (c) 19.60 (d) 148.32 (e) 200.812

4. अधोलिखितान् दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(a) $20 + 9 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$ (b) $137 + \frac{5}{100}$

(c) $\frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$ (d) $23 + \frac{2}{10} + \frac{6}{1000}$

(e) $700 + 20 + 5 + \frac{9}{1000}$

5. अधोलिखितान् दशमांशान् शब्देषु लिखन्तु।

(a) 0.03 (b) 1.20 (c) 108.56 (d) 10.07

(e) 0.032 (f) 5.008

6. संख्यारेखायाः कयोः द्वयोः बिन्द्वोः मध्ये अधोलिखिताः संख्याः स्थिताः सन्ति।

(a) 0.06 (b) 0.45 (c) 0.19 (d) 0.66 (e) 0.92 (f) 0.57

7. न्यूनतमरूपेण भिन्नान् निर्मीय लिखन्तु।

(a) 0.60 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.18 (e) 0.25

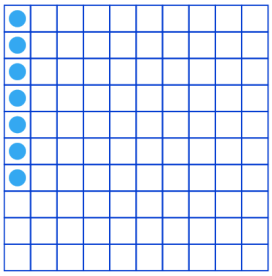
(f) 0.125 (g) 0.066

8.4 दशमांशानां तोलनम्

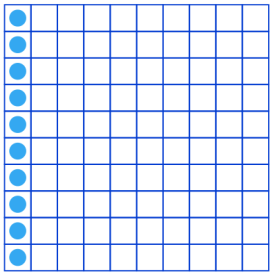
किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् का संख्या बृहती अस्ति, 0.07 अथवा 0.1 ?

समानाकारयुक्तं वर्गाकार-कर्गदद्वयं स्वीकुर्वन्तु । तान् 100 समानभागेषु विभजनं कुर्वन्तु । 0.07 = $\frac{7}{100}$ दर्शयितुं अस्माभिः 100 भागेषु 7 भागाः छायाङ्किताः करणीयाः सन्ति ।

अधुना 0.1 = $\frac{1}{10}$ = $\frac{10}{100}$, अतः 0.1 इति दर्शयितुं 100 इत्यस्मिन् 10 भागाः अस्माभिः छायाङ्किताः विधेयाः।



$0.07 = \frac{7}{100}$



$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$

इत्थम्, 0.1 > 0.07

आयान्तु, अधुना 32.55 अपि च 32.5 अनयोः तोलनं कुर्मः । अस्यां स्थितौ वयं प्रथमं पूर्णभागस्य तोलनं कुर्मः । वयम् इदं पश्यामः यत् द्वयोः संख्ययोः अपि पूर्णभागः 32 अस्ति अर्थात् समानः अस्ति । यद्यपि वयं जानीमः यत् एते द्वे संख्ये अपि समाने न स्तः । अतः अधुना वयं अनयोः दशांशभागयोः तोलनं कुर्मः । वयं प्राप्नुमः यत् 32.55 अपि च 32.5 अनयोः दशांशभागः अपि समानः अस्ति । अधुना वयं अनयोः शतांशभागस्य तोलनं कुर्मः, वयं प्राप्नुमः यत् ,

$32.55 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$ अपि च $32.5 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100}$

अतः 32.55 > 32.5, यतोहि 32.55 इत्यस्य शतांशस्थानस्य अङ्कः 32.5 इत्यस्य शतांशस्थानस्य अङ्कात् बृहदस्ति ।

उदाहरणम् 11 : कतरा संख्या बृहती अस्ति ?

(a) 1 अथवा 0.99 (b) 1.09 अथवा 1.093

समाधानम् : (a) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$, $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

संख्यायाः 1 इत्यस्याः पूर्णभागः 1, 0.99 इत्यस्य पूर्णभागात् 0 इत्यस्मात् बृहदस्ति ।

अतः 1 > 0.99

(b) $1.09 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$1.093 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

द्वयोः संख्ययोः शतांशस्थानपर्यन्तं सर्वे अङ्काः समानाः सन्ति किन्तु 1.093 इत्यस्य सहस्रस्य स्थानस्य अङ्कः 1.09 इत्यस्य अङ्कात् बृहसस्ति ।

अतः 1.093 > 1.09

अभ्यासः 8.3

1. कतमा संख्या बृहती अस्ति ? कारणम् अपि लिखन्तु।

(a) 0.3 अथवा 0.4 (b) 0.07 अथवा 0.02 (c) 3 अथवा 0.8

(d) 0.5 अथवा 0.05 (e) 1.23 अथवा 1.2 (f) 0.099 अथवा 0.19

(g) 1.5 अथवा 1.50 (h) 1.431 अथवा 1.490 (i) 3.3 अथवा 3.300

(j) 5.64 अथवा 5.603

(k) पञ्च-एतादृशानि एव उदाहरणानि लिखित्वा तेषां मध्ये बृहत्संख्यां चिन्वन्तु।

8.5 दशमांशानां प्रयोग

8.5.1 धनम्

वयं जानीमः यत् 100 पणकम् = 1 रूप्यकाणि इति।

अतः, 1 पणकम् $= \frac{1}{100}$ रूप्यकाणि = 0.01 रूप्यकाणि

इत्थम्, 65 पणकम् $= \frac{65}{100}$ रूप्यकाणि = 0.65 रूप्यकाणि

अपि च 5 पणकम् $= \frac{5}{100}$ रूप्यकाणि = 0.05 रूप्यकाणि

105 पणकम् इत्युक्ते कियद्भवेत् ?

एषः 1 रूप्यकाणि 5 पणकं भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

(i) 2 रूप्यकाणि 5 पणकम् अपि च 2 रूप्यकाणि 50 पणकम् इत्येतौ दशमांशरूपेण लिखन्तु।

(ii) 20 रूप्यकाणि 7 पणकम् अपि च 21 रूप्यकाणि 75 पणकम् इत्येतौ दशमांशरूपेण लिखन्तु।

8.5.2 लम्बः

महेशः स्व-उत्पीठिकायाः उपरितनं भागं मीटर् मापनेन मापयितुं इच्छति। तस्य पार्श्वे 50 सेमी-युक्तमापिका अस्ति। सः प्राप्तवान् यत् उत्पीठिकायाः उपरितनभागस्य लम्बः 156 सेमी आसीत्। तर्हि अस्य लम्बः मीटर् मध्ये कियद्भवति ?

1 सेमी = $\frac{1}{100}$ मी अथवा 0.01 मी

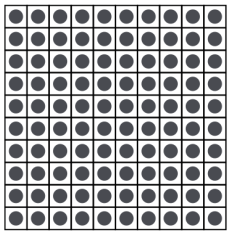
अतः 56 सेमी = $\frac{56}{100}$ मी=0.56 मी

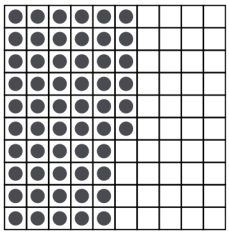
इत्थम् उत्पीठिकायाः उपरितनभागस्य लम्बः

156 सेमी = 100 सेमी + 56 सेमी

= 1 + $\frac{56}{100}$ मी=1.56 मी

महेशः अमुं लम्बं चित्रद्वारा दर्शयितुं इच्छति। सः समान-आकारयुक्तं वर्गाकार-कर्गदं 100 समानभागेषु विभजनं कृतवान् अपि च प्रत्येकं लघुवर्गं एकं सेमी इति स्वीकृतवान्।





प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं 4 मिमी इत्येतद् दशमांशस्य प्रयोगं कृत्वा सेमी मध्ये लेखितुं शक्यते ?
2. 7 सेमी 5 मिमी इत्येतद् दशमांशस्य प्रयोगं कृत्वा सेमी मध्ये कथं लिखामः ?
3. किम् अधुना भवन्तः 52 मीटर् इत्येतद् दशमांशस्य प्रयोगं कृत्वा किमी इत्यस्मिन् लेखितुं शक्नुवन्ति ? दशमांशस्य प्रयोगं कृत्वा 340 मी इत्येतत् कथं किमी इत्यस्मिन् लिखामः ? 2008 मी इत्येतत् की.मी. इत्यस्मिन् कथं लिखामः

8.5.3 भारः

नन्दूः 500 ग्राम् आलुकं , 250 ग्रां शिमला-मरीचिकां, 700 ग्रां पलाण्डुं, 500 ग्रां रक्ताङ्गं, 100 ग्रां आर्द्रकं, अपि च 300 ग्रां मूलकं क्रीतवान्। शाकस्य आहस्त भारं किम् अस्ति ? आयान्तु, सर्वेषां शाकानां भारं योजयामः।

500 ग्रां + 250 ग्रां + 700 ग्रां + 500 ग्रां + 100 ग्रां + 300 ग्रां = 2350 ग्राम्

वयं जानीमः यत् 1000 ग्रां = 1 किग्राम् इति।

अतः 1 ग्रां = $\frac{1}{1000}$ किग्रां = 0.001 किग्राम्

इत्थं, 2350 ग्रां = 2000 ग्रां + 350 ग्रां = $\frac{2000}{1000}$ किग्रां + $\frac{350}{1000}$ किग्राम्

= 2 किग्रां + 0.350 किग्रां (यतो हि $\frac{1}{1000}$ किग्रां = 0.001 किग्रां)

= 2.350 किग्राम्

अर्थात् 2350 ग्रां = 2 किग्रां 350 ग्रां = 2.350 ग्राम्

अतः स्यूते आहस्य 2.350 किग्रां शाकमासीत्।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं भवन्तः 456 ग्राम् इत्येतत् दशमांशस्य प्रयोगद्वारा किग्राम् इत्यस्मिन् लेखितुं शक्नुवन्ति ?
2. 2 किग्रां 9 ग्राम् इत्येतत् दशमांशस्य प्रयोगद्वारा कथं लेखितुं शक्नुमः ?

अभ्यासः 8.4

1. दशमांशस्य प्रयोगपुरस्सरं रूप्यकमध्ये परिवर्तयन्तु।

(a) 5 पणकम् (b) 75 पणकम् (c) 20 पणकम्

(d) 50 रूप्यकाणि 90 पणकम् (e) 725 पणकम्

2. दशमांशस्य प्रयोगपुरस्सरं मीटर् मध्ये व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) 15 सेमी (b) 6 सेमी (c) 2 मी 45 सेमी

(d) 9 मी 7 सेमी (e) 419 सेमी

3. दशमांशस्य प्रयोगपुरस्सरं सेमी मध्ये परिवर्तनं कुर्वन्तु।

(a) 5 मिमी (b) 60 मिमी (c) 164 मिमी

(d) 9 सेमी 8 मिमी (e) 93 मिमी

4. दशमांशस्य प्रयोगपुरस्सरं किमी मध्ये लिखन्तु।

(a) 8 मी (b) 88 मी (c) 8888 मी

(d) 70 किमी 5 मी

5. दशमांशस्य प्रयोगपुरस्सरं किमी मध्ये लिखन्तु।

(a) 2 ग्राम् (b) 100 ग्राम् (c) 3750 ग्राम्

(d) 5 किग्राम् 8 ग्राम् (e) 26 किग्राम् 50 ग्राम्

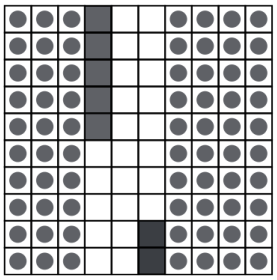
8.6 दशमांशसंख्यानां योगः

एतत् कुर्वन्तु

0.35 अपि च 0.42 एतयोः योगं कुर्वन्तु।

एकं वर्गं स्वीकृत्य तं 100 समानभागेषु विभजनं कुर्वन्तु ।

अस्मिन् वर्गे 0.35 इति प्रदर्शयितुं 3 दशांशं छायाङ्कितं कुर्वन्तु अपि च 5 शतांशे वर्णं पूरयन्तु।



अस्मिन् वर्गे 0.42 इति दर्शयितुं 4 दशांशं छायाङ्कितं कुर्वन्तु अपि च 2 शतांशे वर्णं पूरयन्तु।

अधुना वर्गेण आहत्य दशकस्य अपि च शतकस्य संख्यां पृथक् कुर्वन्तु।

+	एककम्	दशांशः	शतांशः
	0	3	5
	0	4	2
	0	7	7

अतः 0.35 + 0.42

= 0.77

इत्थं, यथा वयं पूर्णसंख्याः योजयामः तथा एव दशमांशसंख्याः अपि योजयामः।

किं भवन्तः अधुना 0.68 अपि च 0.54 एतयोः योगं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

+	एककम्	दशांशः	शतांशः
	0	6	8
	0	5	4
	1	2	2

अतः 0.68 + 0.54 = 1.22

प्रयत्नं कुर्वन्तु

जानन्तु

(i) 0.29 + 0.39 (ii) 0.7 + 0.08

(iii) 1.54 + 1.80 (iv) 2.66 + 1.85

उदाहरणम् 12 : लता 9.50 रूप्यकस्य एकां लेखनीं क्रीतवती अपि च 2.50 रूप्यकाणां एकाम् अङ्कनीं क्रीतवती। सा आहस्य कतीनां रूप्यकाणां व्ययं कृतवती ?

समाधानम् :

लिखन्याः कृते व्ययीकृतधनम् = 9.50 रूप्यकाणि

अङ्कन्याः कृते व्ययीकृतधनम् = 2.50 रूप्यकाणि

आहत्य व्ययः = 9.50 रूप्यकाणि

\+ 2.50 रूप्यकाणि

= 12.00 रूप्यकाणि

उदाहरणम् 13 : स्यामसन्-इत्याख्यः 5 किमी 52 मी दूरं लोकयानेन, 2 किमी 265 मी दूरं कार्-यानेन अपि च शिष्टं 1 किमी 30 मी पादाभ्यां गतवान्। सः आहत्य कियद्दूरं गतवान् ?

समाधानम् :

लोकयानेन आकलितं दूरं = 5 किमी 52 मी = 5.052 किमी

कार्-यानेन आकलितं दूरं = 2 किमी 265 मी = 2.265 किमी

पादभ्याम् आकलितं दूरं = 1 किमी 30 मी = 1.030 किमी

इत्थम्, आहत्य आकलितं दूरम्

5.052 किमी

2.265 किमी

\+ 1.030 किमी

8.347 किमी

अतः आकलितं सम्पूर्णदूरं = 8.347 किमी

उदाहरणम् 14 : राहुलः 4 किग्रा 9 ग्रा सेवफलं, 2 किग्रा 60 ग्रा द्राक्षाफलं, 5 किग्रा 300 ग्रा आम्रफलं क्रीतवान्। सर्वेषां क्रीतफलानाम् आहत्य भारः कियान् आसीत् ?

समाधानम् :

सेवफलानां भारः = 4 किग्रा 90 ग्रा = 4.090 किग्रा

द्राक्षाफलानां भारः = 2 किग्रा 60 ग्रा = 2.060 किग्रा

आम्रफलानां भारः = 5 किग्रा 300 ग्रा = 5.300 किग्रा

अतः क्रीतफलानां सम्पूर्णभारः

4.090 किग्रा

2.060 किग्रा

\+ 5.300 किग्रा

11.450 किग्रा

क्रीतफलानां सम्पूर्णभारः = 11.450 किग्रा

अभ्यासः 8.5

1. अधोलिखितेषु प्रत्येकं योगं जानन्तु।

   (i) 0.007 + 8.5 + 30.08 (ii) 15 + 0.632 + 13.8

   (iii) 27.076 + 0.55 + 0.004 (iv) 25.65 + 9.005 + 3.7

   (v) 0.75 + 10.425 + 2 (vi) 280.69 + 25.2 + 38

2. रशीदः 35.75 रूप्यकेषु गणितस्य अपि च 32.60 रूप्यकेषु विज्ञानस्य पुस्तकं क्रीतवान्। रशीदेन व्ययीकृतं आहत्य धनं जानन्तु।

3. राधिकायाः माता तस्यै 10.50 रूप्यकाणि दत्तवती अपि च पिता 15.80 रूप्यकाणि दत्तवान्। तस्याः पितरौ तस्यै आहत्य कियद्धनं दत्तवन्तौ ?

4. नस्रीन्-इत्याख्या युतकस्य कृते 3 मी 20 सेमी वस्त्रं तथा उरुकस्य कृते 2 मी 5 सेमी वस्त्रं क्रीतवती। सा आहस्य कति मीटर् वस्त्रं क्रीतवती ?

5. नरेशः प्रातः काले 2 किमी 35 मी परिचलनं कृतवान् तथा सायं काले 1 किमी 7 मी परिचलनं कृतवान्। सः आहत्य कियद्दूरं परिचलनं कृतवान् ?

6. सुनीता तस्याः विद्यालयं सम्प्राप्तुं, 15 किमी 268 मी दूरं लोकयानेन, 7 किमी 7 मी दूरं कार्-यानेन अपि च 500 मी दूरं पादाभ्यां चलति। तर्हि तस्याः विद्यालयः शालातः कियद्दूरे अस्ति ?

7. रविः 5 किग्रा 400 ग्रा तण्डुलं, 2 किग्रा 20 ग्रा शर्करां, 100 किग्रा 850 ग्रा पिष्टकं क्रीतवान्। तेन क्रीतस्य वस्तुनः आहस्य भारः कियान् आसीत् ?

8.7 दशमांशसंख्यानां व्यवकलनम्

2.58 इत्यस्मिन् 1.32 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

एतत् वयं एकस्मिन् कोष्ठके लेखितुं शक्नुमः।

	एककम्	दशांशः	शतांशः
	2	5	8
−	1	3	2
	1	2	6

अतः 2.58 – 1.32 = 1.26

इत्थं दशांशसंख्यानां व्यवकलनं कर्तुं शक्यते। यदि शतांशेन शतांशस्थानाङ्कः दशांशेन दशांशस्थानाङ्कः एकेन एककस्थानाङ्कः एवमेव अग्रेऽपि व्यवकलयितुं शक्यते यथा वयं योगं कृतवन्तः।

यदा कदापि दशमांशानां व्यवकलनं कर्तुम् अस्माभिः संख्यानाम् अङ्कानां समूहः पुनः निर्मातव्यः भवति यथा योगे कृतवन्तः।

आयान्तु, 3.5 तः 1.74 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

	एककम्	दशांशः	शतांशः
–	3	5	0
	1	7	4

संख्यायां शतकस्थानाङ्कयोः व्यवकलनम् अत्र सम्भवः नास्ति। अतः पुनः समूहकरणेन अस्माभिः प्राप्यते।

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 14 & 10 \\ & \cancel{3} & . \ \cancel{5} & 0 \\ - & 1 & . \ 7 & 4 \\ \hline & 1 & . \ 7 & 6 \end{array}$$

अतः $3.5 - 1.74 = 1.76$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

5.46 इत्यस्मिन् 1.85 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु ; 8.28 इत्यस्मिन् 5.25 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु;

2.29 इत्यस्मिन् 0.95 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु ; 5.68 इत्यस्मिन् 2.25 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु ;

उदाहरणम् 15 : अभिषेकस्य पार्श्वे 7.45 रूप्यकाणि सन्ति। सः 5.30 रूप्यकाणां चकलेहं क्रीणाति। तर्हि तस्य समीपे कति रूप्यकाणि शिष्टानि भवन्ति ?

समाधानम् :

आहत्य धनम् = 7.45 रूप्यकाणि

चाकलेहस्योपरि व्ययीकृतधनम् = 5.30 रूप्यकाणि

शिष्टधनम् = 7.45 रूप्यकाणि - 5.30 रूप्यकाणि

= 2.15 रूप्यकाणि

उदाहरणम् 16 : उर्मिलायाः गृहं तस्याः विद्यालयात् 5 किमी 350 मी दूरे अस्ति। सा 1 किमी 70 मी पादाभ्यां चलति अपि च शिष्टदूरं लोकयानेन परिचलनं करोति। लोकयानेन परिक्रमितदूरं जानन्तु।

समाधानम् :

विद्यालयात् गृहपर्यन्तम् आहस्यदूरम् = 5.350 किमी

पादाभ्यां परिचलितं दूरम् = 1.070 किमी

अतः लोकयानेन क्रमितं दूरम् = 5.350 किमी – 1.070 किमी

= 4.280 किमी

इत्थम् लोकयानेन परिक्रमित दूरम् = 4.280 किमी

= 4 किमी 280 मी

उदाहरणम् 17 : यः कोऽपि 5 किग्रा 200 ग्रा भरयुक्तं कलिङ्गफलं क्रीणाति। अस्मिन् सः 2 किग्रा 750 ग्रा तस्य प्रतिवेशिने ददाति। तर्हि तस्य समीपे कति किग्रा कलिङ्गम् अवशिष्टम् ?

समाधानम् :

कलिङ्गफलस्य आहत्य भारः = 5.200 किग्रा

प्रतिवेशिने दत्तफलभागस्य भारः = 2.750 किग्रा

अतः अवशिष्टभागस्य भारः = 5.200 किग्रा – 2.750 किग्रा

= 2.450 किग्रा

अभ्यासः 8.6

1. अधोलिखितानां व्यवकलनं कुर्वन्तु।
   (a) 20.75 रूप्यकेषु 18.25 रूप्यकाणि
   (b) 250 मी इत्यस्मिन् 202.54 मी
   (c) 8.4 रूप्यकेषु 5.40 रूप्यकाणि
   (d) 5.206 किमी इत्यस्मिन् 2.051 किमी
   (e) 2.107 किग्रा इत्यस्मिन् 0.314 किग्रा
2. अभिजानन्तु।
   (a) 9.756 – 6.28
   (b) 21.05 – 15.27
   (c) 18.5 – 6.79
   (d) 11.6 – 9.847
3. राजूः 35.65 रूप्यकाणाम् एकं पुस्तकं क्रीणाति। सः आपणस्वामिने 50 रूप्यकाणि दत्तवान्। आपणस्वामी तस्मै कियद्धनं प्रत्यर्पितवान् ?
4. राणी इत्यस्याः समीपे 18.50 रूप्यकाणि सन्ति। सा 11.75 रूप्यकाणां हिमफेनकं क्रीणाति। इदानीं तस्याः समीपे कति रूप्यकाणि अवशिष्टानि सन्ति ?
5. टीनायाः पार्श्वे 20 मी 5 से.मी. लम्बमानं वस्त्रम् अस्ति। तस्मिन् सा एकां जवनिकां निर्मातुं 4 मी 50 से.मी. वस्त्रं कर्तितवती। टीनायाः पार्श्वे अधुना कति मीटर् वस्त्रम् अवशिष्टम् ?

6. नमिता प्रतिदिनं 20 किमी 50 मी दूरं क्रमति। अस्मिन् 10 किमी 200 मी दूरं लोकयानेन, अवशिष्टं दूरं त्रिचक्रिकायानेन क्रमति। तर्हि सा त्रिचक्रिकायानेन कियद्दूरं क्रमति ?

7. आकाशः 10 किग्रा शाकं क्रीणाति यस्मिन् 3 किग्रा 500 ग्रा पलाण्डुः, 2 कि.ग्रा. 75 ग्रा रक्ताङ्गम् अपि च अवशिष्टम् आलुकं अस्ति। आलुकस्य भारः कियान् अस्ति ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चितवन्तः ?

1. एकं पूर्ण-एककस्य भागान् ज्ञातुं वयम् एकम् एककं खण्डद्वारा दर्शयामः । एकं खण्डं 10 समानभागेषु विभजितेषु सत्सु प्रत्येकं भागः तस्य एककस्य $\frac{1}{10}$ भवति । इदं वयं 0.1 इति रूपे लेखितुं शक्नुमः यतः दशमांशः निरूपितः भवति । तं बिन्दुं वयं दशमांशः इति वदामः यतोहि अमुं बिन्दुम् एककदशांशस्थानयोः मध्ये स्थापयामः ।
2. प्रत्येकं भिन्नः यस्य भाजकः 10 स्यात्, तं भिन्नं दशमांशरूपेण लेखितुं शक्नुमः अपि च प्रत्येकं दशमांशरूपम् अपि भिन्नरूपेण लेखितुं शक्नुमः ।
3. एकं खण्डं 100 समानभागेषु विभजनात् प्रत्येकं भागः तस्य $\frac{1}{100}$ भागः भवति। दशमांशरूपेण वयम् अमुं 0.01 इति लेखितुं शक्नुमः ।
4. यस्य भाजकः 100 स्यात् तं प्रत्येकं भिन्नं वयं दशमांशरूपेण लेखितुं शक्नुमः तथैव तान् भिन्नरूपेण अपि लेखितुं शक्नुमः ।
5. स्थानीय-मान-सारिण्यां वयं यथा यथा वामतः दक्षिणाभिमुखं चलामः गुणनखण्डः पूर्वगुणकस्य $\frac{1}{10}$ भवति । स्थानीयमानसारिणीं वयम् अग्रेऽपि वर्धयितुं शक्नुमः । शतांशस्थानेन सहस्रस्य $\frac{1}{1000}$ स्थानपर्यन्तं यान् वयं दशमांशरूपेण 0.001 इत्यपि लेखितुं शक्नुमः ।
6. संख्यारेखायाः उपरि अपि दशमांशसंख्याः दर्शयितुं शक्यन्ते ।
7. प्रत्येकं दशमांशं भिन्नरूपेण लेखितुं शक्यते ।
8. द्वयोः दशमांशसंख्ययोः मध्ये परस्परं तोलनं कर्तुं शक्यते । तोलनं संख्यायाः पूर्णभागेन आरभ्यते । यदि पूर्णभागौ समानौ स्तः तर्हि दशांशस्थानस्य अङ्कयोः तुलना क्रियते, यदि एतौ अपि समानौ तर्हि अग्रिमाङ्कौ द्रश्येते । अपि च अग्रेऽपि इमां प्रक्रियां वर्धयितुं शक्यते ।
9. धनस्य, लम्बस्य, भारस्य च एककस्थानान् दर्शयितुं दशमांशानां प्रयोग क्रियते ।

दत्तांशानां प्रबन्धनम्

अध्यायः 9

9.1 भूमिका

भवन्तः स्व-कक्षायाम् उपस्थिति-पञ्जिकायां विद्यार्थिनाम् उपस्थितेः अङ्कनं कुर्वन्तम् अथवा प्रत्येकं परीक्षायाः अनन्तरं भवतां प्राप्ताङ्कानाम् अङ्कनं कुर्वन्तं स्व-शिक्षकं दृष्टवन्तः स्युः । एवमेव भवन्तः क्रिकेट्-क्रीडायाः धावनाङ्कफलकम् अपि दृष्टवन्तः स्युः । एतादृशफलकद्वयम् अत्राधः दर्शितमस्ति ।

कन्दुकक्षेपकस्य नाम	ओवर् (over)	मेडन् ओवर् इति (maiden over)	दत्त-धावनङ्कः	स्वीकृत-विकेट् इति
A	10	2	40	3
B	10	1	30	2
C	10	2	20	1
D	10	1	50	4

ताडनीधारकः	धावनाङ्कः	क्रीडित-कन्दुकस्य संख्या	समयः (निमिषेषु)
E	45	62	75
F	55	70	81
G	37	53	67
H	22	41	55

भवन्तः जानन्ति यत् क्रीडायां कः विजयी अस्ति अथवा कः पराजयी इति सूचनामात्रमेव अङ्कितं न भवति । धावनाङ्कफलके भवन्तः क्रीडायाः विषये काश्चन उपयोगिन्यः सूचनाः अपि प्राप्नुवन्ति याः तावत्यः एव महत्त्वपूर्णाः भवन्ति । उदाहरणार्थं भवन्तः इदं ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् सर्वाधिकधावनाङ्क-अर्जकः कियन्तं समयं स्वीकृतवान् तथा च कति कन्दुकानि साक्षात् कृतवान् ।

इत्थं भवन्तः स्व-दैनिकजीवने स्व-संख्याः, आकृतयः, नामानि इत्यादिभिः सम्बद्धाः अनेकप्रकारकाणां सारणीः दृष्टवन्तः स्युः। एताः सारिण्यः अस्माभ्यं दत्तांशम् उपलब्धयन्ति। दत्तांशाः संख्यानां ते सङ्ग्रहाः सन्ति ये कासाञ्चन सूचनानां प्रदानाय एकत्रीक्रियन्ते।

9.2 दत्तांशानाम् अभिलेखनम्

आयान्तु, एकम् उदाहरणम् स्वीकुर्वन्तु यस्मिन् कस्याश्चित् कक्ष्यायाः विद्यार्थिनः शालाविहारार्थं गन्तुं सिद्धतां कुर्वन्तः सन्ति। अध्यापकः विद्यार्थिनः प्रति कदली-सेव-नारङ्ग-दृढबीजफलेषु अन्यतमस्य फलस्य चयनार्थम् अवदत्। अस्य सूचिकां निर्मातुम् उमा निर्दिष्टा। सा सर्वेषां छात्राणाम् एकां सूचीं निर्मितवती अपि च प्रत्येकं नाम्नः पुरतः छात्रैः चितानां फलानां नामानि लिखितवती। एषा सूची छात्राणाम् इच्छानुसारं तेभ्यः फलं दातुं शिक्षकाय साहाय्यं करोति।

राघवः	-	कदली	भावना	-	सेवम्
प्रीतिः	-	सेवम्	मनोजः	-	कदली
अमरः	-	दृढबीजम्	डोनाल्डः	-	सेवम्
फातिमा	-	नारङ्गम्	मारिया	-	कदली
अमिता	-	सेवम्	उमा	-	नारङ्गम्
रमणः	-	कदली	अख्तरः	-	दृढबीजम्
राधा	-	नारङ्गम्	रीतूः	-	सेवफलम्
फरीदा	-	दृढबीजम्	सलमा	-	कदली
अनुराधा	-	कदली	कविता	-	दृढबीजम्
रतिः	-	कदली	जावेदः	-	कदली

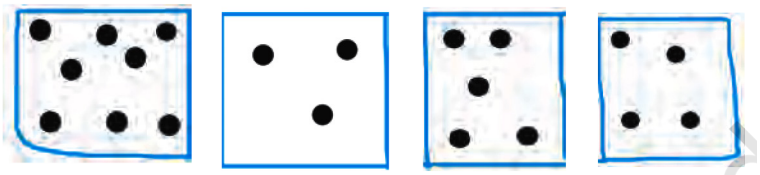
यदि शिक्षकः इदं ज्ञातुम् इच्छति यत् कक्ष्यायाः कृते कतीनां कदलीफलानाम् आवश्यकता भवेत् इति, तर्हि तेन सूच्यां दत्तनामानि एकैकशः पठित्वा कदलीफलानां गणनं कर्तव्यं भवति अपि च एतस्मात् ज्ञातुं शक्यते यत् कतीनां कदलीफलानाम् आवश्यकता वर्तते इति। सेव-दृढबीज-नारङ्गानां पृथक्-पृथक् संख्याः ज्ञातुम् अपि शिक्षकेण इयमेव प्रक्रिया अनुसरणीया भवति। एषा प्रक्रिया तु बहुजटिला अस्ति अपि च बहुसमयं स्वीकरोति। एषा प्रक्रिया इतोऽपि जटिला भवितुं शक्यते यदि सूच्यां विद्यार्थिनां संख्या 50 भवेत्।

अतः उमा एकैकशः केवलं तेषां फलानां नाम लिखति यथा -

कदली,सेवम्, दृढबीजम्, नारङम्, सेवम्, कदली, नारङ्गम्, दृढबीजम्, कदली, कदली, सेवम्, कदली, नारङ्गम्, दृढबीजम्, सेवम्, कदली, दृढबीजम्, कदली।

किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् अनेन शिक्षकस्य कार्यं सरलं भविष्यति ? अधुना अपि शिक्षकेण पूर्ववत् फलानां गणनं कर्तव्यमेव भवति ।

सलमायाः मस्तिष्के एकः नूतनः विचारः आगच्छति । सा कुट्टिमस्य उपरि चतुरः वर्गान् निर्माति । प्रत्येकं वर्गं केवलम् कस्यचित् फलस्य कृते एव स्थापयति । सा छात्रान् वदति यत् ते स्व-रुच्यनुसारं फलवर्गे एकं शिलाखण्डं स्थापयेयुः । अर्थात् यः कदलीं चिनोति सः विद्यार्थी कदलीफलमिति अङ्किते वर्गे एकं शिलाखण्डं स्थापयति ।



कदलीफलम् नारङ्गम् सेवम् दृढबीजम्

प्रत्येकं वर्गस्य शिलाखण्डं गणयित्वा सलमा इदं झटिति वक्तुं शक्नोति यत् प्रत्येकं प्रकारस्य कतीनां फलानाम् आवश्यकता अस्ति इति । सा अभिलषितां सूचनां विभिन्नवर्गेषु एकेन क्रमबद्धविधिना शिलाखण्डं स्थापयित्वा झटिति प्राप्तुं शक्नोति ।

अमुं क्रियाकलापं 40 छात्राणां कृते कैः अपि चतुर्भिः फलैः सह कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । भवन्तः शिलाखण्डस्य स्थाने कूप्याः आवरणस्य अथवा चीटिकायाः प्रयोगं कर्तुम् अपि शक्नुवन्ति ।

9.3 प्रदत्तानाम् अङ्कानां सङ्घटनम्

सलमा याः सूचनाः प्राप्तवती ताः एव सूचनाः रोनाल्डः एकया लेखन्या कर्गजे अपि लिखित्वा ज्ञातुं शक्नोति । तस्य कृते शिलाखण्डस्य आवश्यकता नास्ति । सः छात्रान् एवमपि न वदति यत् आयान्तु अपि च वर्गे शिलाखण्डं स्थापयन्तु इति । सः अधोलिखितसरिणीं निर्माति ।

कदलीफलम्	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	8
नारङ्गम्	✓	✓	✓						3
सेवम्	✓	✓	✓	✓	✓				5
दृढबीजम्	✓	✓	✓	✓					4

किं भवन्तः रोनाल्डस्य सारिणीम् अवगच्छन्तः सन्ति ?

एकं (✓) चिह्नं किं सूचितं करोति ?

चत्वारः छात्राः दृढबीजं चितवन्तः । दृढबीजस्य सम्मुखे कति (✓) चिह्नानि स्थापितानि वर्तन्ते ? कक्ष्यायाम् आहस्य कति छात्राः सन्ति ? एताः सर्वाः सूचनाः जानन्तु । एतेषां विधीनां विषये चर्चां कुर्वन्तु । कतमः विधिः सर्वोत्तमः अस्ति ? किमर्थम् ?

यदि बहु-अधिकदत्तांशैः सूचनायाः प्राप्तिः करणीया अस्ति तर्हि कतमः विधिः अधिकः लाभप्रदः अस्ति ?

उदाहरणम् 1 : मध्याह्नभोजनस्य योजनार्थम् एकः शिक्षकः प्रत्येकं छात्रस्य भोजनस्य रुचिं ज्ञातुम् इच्छति । शिक्षकः सूचनायाः एकत्रीकरणसम्बद्धं कार्यं मारियायै ददाति । मारिया इदं कार्यम् एकां लेखनीम् अपि च एकं कर्गजं स्वीकृत्य करोति । भोजनस्य रुचिम् एकस्मिन् स्तम्भे लिखित्वा सा प्रत्येकं छात्रस्य रुच्यर्थं तस्याः रुचेः सम्मुखे एकम् ऋजुचिह्नं (|) लिखित्वा अङ्कितं करोति ।

भोजनस्य रुचिः	**छात्राणां संख्या**
केवलं तण्डुलाः	|||||||||||||||||
केवलं रोटिका	||||||||||||
अन्नं तथा रोटिका द्वयमपि	||||||||||||||||||||

उपरि लिखितसारिणीं दृष्ट्वा उमेशः छात्रान् गणयितुम् एकस्य उत्तमविधेः परामर्शं दत्तवान् । सः मारियायाः पार्श्वे चिह्नान् (|) दश-दश-गणेषु अधोलिखितप्रकारेण व्यवस्थापयितुम् उक्तवान् ।

भोजनस्य रुचिः	**छात्राणां संख्या**	
केवलं तण्डुलाः	|||||||||| ||||||	17
केवलं रोटिका	|||||||||| |||	13
अन्नं तथा रोटिका द्वयमपि	|||||||||| ||||||||||	20

राजा अमुम् इतोऽपि सरलं कर्तुं तां उक्तवान् यत् सा दश-दश-गणानां स्थाने पञ्च-पञ्च-गणानां समूहं निर्मीयात् यथा अधः दर्शितमस्ति ।

भोजनस्य रुचिः	**छात्राणां संख्या**	
केवलं तण्डुलाः	||||| ||||| ||||| ||	17
केवलं रोटिका	||||| ||||| |||	13
अन्नं तथा रोटिका द्वयमपि	||||| ||||| ||||| |||||	20

शिक्षकः परामर्शं दत्तवान् यत् पञ्च-पञ्चात्मके प्रत्येकं समूहे पञ्चम-चिह्नम् एकस्य तिर्यक्-चिह्नस्य रूपेण प्रयोगः कर्तव्यः यथा "𝍸" अत्र दर्शितमस्ति । एतान् चिह्नान् मेलनचिह्नम् इति वदामः । एवमेव प्रकारेण 𝍸 || एतत् दर्शयति यत् गणनेन इदं पञ्च + द्वे = सप्त भवति । अपि च 𝍸 𝍸 एतत् दर्शयति यत् इदं पञ्च + पञ्च = दश अस्ति ।

इत्थं सरिणी अधोलिखितप्रकारेण दृश्यते ।

भोजनस्य रुचिः	छात्राणां संख्या	
केवलम् अन्नम्	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
केवलं रोटिका	𝍸 𝍸 |||	13
अन्नं तथा रोटिका द्वयमपि	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20

उदाहरणम् 2 : एकतायाः कृते तस्याः VI कक्ष्यायाः छात्राणां पादरक्षायाः मापनस्य विषये दत्तांशैकत्रीकरणाय सूचितम् । सा अधोदर्शितरीत्या स्व-दत्तांशान् लिखितवती ।

5	4	7	5	6	7	6	5	6	6	5
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4	6
5	7	6	7	5	7	6	4	8	7	

जावेदः अधोलिखितसूचनां ज्ञातुम् इच्छति स्म ।

(i) अधिकतमच्छात्रैः ध्रियमाण-पादरक्षायाः मापनम् (ii) न्यूनतमच्छात्रैः ध्रियमाण-पादरक्षायाः मापनम् किं भवन्तः इमां सूचनां ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

एकता मेलनचिह्नस्य प्रयोगं कृत्वा एकस्याः सारिण्याः सिद्धतां कृतवती ।

पादरक्षाणां मापः	मेलनचिह्नम्	छात्राणां संख्या
4	𝍸	5
5	𝍸 |||	8
6	𝍸 𝍸	10
7	𝍸 ||	7
8	||	2

अधुना प्रथमं पृष्ठस्य प्रश्नस्य उत्तरं सरलतया दातुं शक्यते । भवन्तः एवमेव क्रियाकलापं स्व-कक्ष्यायां मेलनचिह्नपुरस्सरं कुर्वन्तु ।

एतत् कुर्वन्तु

1. स्व-सहपाठिनां परिवारस्य सदस्यानां संख्यया सम्बन्धित-सूचनाः एकत्रीकुर्वन्तु अपि च ताः सारिणीरूपेण निरूपिताः कुर्वन्तु । जानन्तु यत् (a) कतमा संख्या न्यूनतमवारम् आगच्छति । (b) कतमा संख्या अधिकतमवारम् आगच्छति । (c) कियन्त्यः संख्याः समानवारम् आगच्छन्ति ।

परिवारसदस्यानां संख्या	मेलनचिह्नम्	तावतः परिवारस्य सदस्ययुक्तानां छात्राणां संख्या

9.4 चित्रालेखः

एकस्यां कपाटिकायां पञ्च कोष्ठकानि सन्ति। प्रत्येकं कोष्ठके पुस्तकानि पङ्क्तिबद्धरूपेण स्थापिताः सन्ति। विस्तृतं विवरणम् अधोलिखितप्रकारेण सूचितम् अस्ति।

	= 1 पुस्तकम्
पङ्क्तिः 1	
पङ्क्तिः 2	
पङ्क्तिः 3	
पङ्क्तिः 4	
पङ्क्तिः 5	

कस्यां पङ्क्तौ पुस्तकानां संख्या अधिका अस्ति ? कस्यां पङ्कौ पुस्तकानां संख्या न्यूना अस्ति ? किम् एतादृशपङ्क्तिः अस्ति यस्याम् एकमपि पुस्तकं नास्ति ?

भवन्तः उपरि उक्तालेखं दृष्ट्वा एव तेषां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं शक्नुवन्ति। अत्र प्रयुक्तचित्राणि दत्तांशानाम् अवगमने भवतां साहाय्यताम् आचरन्ति। अयम् एकः चित्रालेखः इति कथ्यते।

एकं चित्रालेख-दत्तांशं चित्राणां, वस्तूनां, वस्तूनां भागानां रूपेण निरूपितं कुर्मः। केवलं एतद्दृष्ट्वा एव दत्तांशैः सम्बन्धितप्रश्नानाम् उत्तरं दातुं शक्यते।

एतत् कुर्वन्तु

समाचारपत्राणि एवं पत्रिकाः प्रायः पाठकान् आकृष्टुं चित्रालेखानां प्रयोगं कुर्वन्ति।

अनेन प्रकारेण एकस्य अथवा द्वयोः चित्रालेखयोः एकत्रीकरणं कुर्वन्तु अपि च तौ स्व-कक्ष्यायां प्रदर्शयन्तु। एतदवगन्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु यत् एते चित्रालेखाः किं दर्शयन्ति इति।

एकेन चित्रलेखेन प्रदत्तसूचनाः अवगन्तुं केषाञ्चन अभ्यासानाम् आवश्यकता अस्ति।

9.5 एकस्य चित्रालेखस्य व्याख्या

उदाहरणम् 3 : गतसप्ताहे 30 विद्यार्थिनां एकस्यां विशिष्टकक्ष्यायाम् अनुपस्थितानां विद्यार्थिनां संख्या अधोलिखितचित्रालेखद्वारा विस्तृतरूपेण दर्शिता अस्ति।

	= 1 अनुपस्थित
सोमवासरः	
मङ्गलवासरः	
बुधवासरः	
गुरुवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	

(a) कस्मिन् दिने अधिकाः छात्राः अनुपस्थिताः आसन् ?

(b) कस्मिन् दिने उपस्थितिः पूर्णः आसीत् ?

(c) अस्मिन् सप्ताहे आहत्य कियन्तः अनुपस्थितयः सन्ति ?

समाधानम् : (a) शनिवासरे अत्यधिकच्छात्राः अनुपस्थिताः आसन् (चित्रे शनिवासरस्य पङ्क्तौ 8 चित्रानि सन्ति, अन्यत्र चित्राणां संख्या न्यूना वर्तते)।

(b) गुरुवासरस्य चित्रे एकमपि चित्रं नास्ति। अस्य अयमर्थः यत् अस्मिन् दिने कोऽपि छात्रः अनुपस्थितः न आसीत्। अर्थात् तस्मिन् दिने पूर्ण-उपस्थितिः आसीत्।

(c) आहत्य अत्र 20 चित्राणि सन्ति। अतः अस्मिन् सप्ताहे आहत्य 20 अनुपस्थितयः सन्ति।

उदाहरणम् 4 : कैश्चित् स्थानीयजनैः अभिलषित-शीतकानां वर्णानां सूचना अधः चित्रालेखद्वारा दर्शिता अस्ति।

	= 10 व्यक्तयः
नीलः	
हरितः	
रक्तः	
श्वेतः	

(a) नीलवर्णेच्छुकानां व्यक्तीनां संख्यां जानन्तु।

(b) कियन्त्यः व्यक्तयः रक्तवर्णम् इच्छन्ति ?

समाधानम् : (a) नीलवर्णेच्छुकानां व्यक्तीनां संख्या 50 अस्ति।

[= 10 व्यक्तयः। अतः 5 चित्राणि 5 X 10 व्यक्तयः दर्शयन्ति।]

(b) रक्तवर्णेच्छुकानां व्यक्तीनां संख्यां ज्ञातुं किञ्चित् चिन्तनीयं भवति।

5 पूर्णचित्राणां कृते 5 X 10 = 50 व्यक्तयः प्राप्ताः भवन्ति। अन्तिम-अपूर्णचित्रस्य कृते वयम् अनुमानं कृत्वा 5 इति स्वीकुर्मः।

अतः रक्तवर्णेच्छुकानां व्तक्तीनां संख्या 55 अस्ति।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु

उपरि उक्त-उदाहरणे रक्तवर्णेच्छुकानां व्यक्तीनां संख्या 50 + 5 = 55 स्वीकृता अस्ति। यदि भवतां मित्रम् इमां 50 + 8 = 58 इति स्वीकरोति चेत् भवन्तः अङ्गीकुर्वन्ति ?

उदाहरणम् 5 : कस्मिंश्चित् विद्यालये एकेन सर्वेक्षणेन ज्ञातं यत् प्रतिदिनं विद्यालयम् आगन्तुं छात्राः गमनागमनार्थं कस्य उपयोगं कुर्वन्ति इति। VI कक्ष्यायाः 30 छात्राणां साक्षात्कारः कृतः एवं प्राप्त-दत्तांशम् एकस्मिन् चित्रलेखे अधोलिखितप्रकारेण प्रदर्शितः।

गमनागमनसाधनम्	**छात्राणां संख्या**	= 1 छात्रः
स्व-कार्-यानम्		
लोकयानम्		
शालायानम्		
द्विचक्रिका		
पद्भ्याम्		

अस्मात् चित्रालेखात् भवन्तः किं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

(a) स्व-कार्-यानेन आगन्तॄणां छात्राणां संख्या 4 अस्ति।

(b) अधिकतमच्छात्राः (11) शालायाः बसयानेन आगच्छन्ति। एतत् यातायातस्य सर्वाधिकलोकप्रियं साधनम् अस्ति।

(c) द्विचक्रिकायाः प्रयोगं केवलं त्रयः छात्राः कुर्वन्ति।

(d) अन्यसाधनानां प्रयोगकर्तॄणां संख्यामपि एवमेव ज्ञातुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 6 : कस्मिंश्चित् सप्ताहे एकस्मात् कार्यागारेण निर्मित-हस्तघटीनां संख्या अधः चित्रालेखे दर्शिता अस्ति।

दिनम्	= 100 हस्तघटयः
सोमवासरः	
मङ्गलवासरः	
बुधवासरः	
गुरुवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	

(a) कस्मिन् दिने न्यूनतमाः हस्तघटयः निर्मिताः अभवन् ?

(b) कस्मिन् दिने हस्तघटीनां संख्या अधिकतमा आसीत् ?

(c) अस्मिन् विशेषसप्ताहे निर्मितहस्तघटीनां सन्निकटसंख्यां जानन्तु ?

वयम् एकां सारिणीं निर्माय गणनं कर्तुं शक्नुमः ।

दिनम्	निर्मित-हस्तघटीनां संख्या
सोमवासरः	600
मङ्गलवासरः	700 तः अधिकम् अपि च 800 तः न्यूनम्
बुधवासरः	.....
गुरुवासरः	.....
शुक्रवासरः	.....
शनिवासरः	.....

उपरि उक्त-सारिणीं पूरयन्तु अपि च उत्तरं जानन्तु ।

अभ्यासः 9.1

1. एकस्यां गणितपरीक्षायां 40 छात्राः अधोलिखित-अङ्कान् प्राप्तवन्तः । एतान् अङ्कान् मेलनचिह्नस्य प्रयोगं कृत्वा एकस्यां सारिण्यां सुव्यवस्थितान् कुर्वन्तु ।

8	1	3	7	6	5	5	4	4	2
4	9	5	3	7	1	6	5	2	7
7	3	8	4	2	8	9	5	8	6
7	4	5	6	9	6	4	4	6	6

(a) जानन्तु यत् कति छात्राः 7 अथवा ततोऽपि अधिकाङ्कान् प्राप्तवन्तः ?

(b) कति छात्राः 4 तः न्यूनाङ्कान् प्राप्तवन्तः ?

2. VI कक्ष्यायाः 30 छात्राणां मधुराभिरुचिः एवम् अस्ति :

लड्डुकम्, हैमी, लड्डुकम्, कुण्डली, लड्डुकम्, रसगोलकम्

कुण्डली, लड्डुकम्, हैमी, रसगोलकम्, लड्डुकम्, कुण्डली
कुण्डली, रसगोलकम्, लड्डुकम्, रसगोलकम्, कुण्डली, लड्डुकम्
रसगोलकम्, लड्डुकम्, हैमी, रसगोलकम्, रसगोलकम्
कुण्डली, रसगोलकम्, लड्डुकम्, रसगोलकम्, कुण्डली, लड्डुकम्

(a) मधुरखाद्यानाम् एतानि नामानि मेलनचिह्नस्य प्रयोगं कृत्वा एकस्यां सारिण्यां सुव्यवस्थितानि कुर्वन्तु।

(b) छात्रेभ्यः कतमं मधुरम् अधिकतया रोचते ?

3. केथरिनः एकम् अक्षं स्वीकृतवान् अपि च तं 40 वारं क्षेपणेन प्राप्तसंख्यां लिखितवान्। सः एतत् कार्यं 40 वारं कृतवान् अपि च प्रत्येकं वारं प्राप्तसंख्याम् अधः दर्शितप्रकारेण लिखितवान्।

1	3	5	6	6	3	5	4	1	6
2	5	3	4	6	1	5	5	6	1
1	2	2	3	5	2	4	5	5	6
5	1	6	2	3	5	2	4	1	5

एकां सारिणीं निर्मान्तु अपि च दत्तांशान् मेलनचिह्नपुरस्सरं लिखन्तु। अधुना जानन्तु

(a) न्यूनवारम् आगतसंख्या

(b) अधिकवारम् आगतसंख्या

(c) समानवारम् आगतसंख्या

संख्या	मेलनचिह्नम्	कतिवारम्
1		
2		
3		
4		
5		
6		

4. अधोलिखितचित्रालेखः पञ्च-ग्रामेषु ट्रैक्टर्-यानानां संख्यां दर्शयति।

	= 1 ट्रैक्टर्
ग्रामः A	
ग्रामः B	
ग्रामः C	
ग्रामः D	
ग्रामः E	

चित्रालेखं पश्यन्तु अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं ददतु।

(i) कस्मिन् ग्रामे ट्रैक्टर्-यानानां संख्या न्यूना अस्ति ?

(ii) कस्मिन् ग्रामे ट्रैक्टर्-यानानां संख्या अधिका अस्ति ?

(iii) C ग्रामे B इत्यतः कियन्ति अधिकयानानि सन्ति ?

(iv) पञ्चग्रामेषु मिलित्वा आहत्य कियन्ति यानानि सन्ति ?

5. एकस्मिन् सह-शिक्षायाः माध्यमिक-विद्यालयस्य प्रत्येकं कक्ष्यायां बालिकानां संख्या अधोलिखितचित्रालेखद्वारा प्रदर्शिता अस्ति।

	= 4 बालिकाः
I	
II	
III	
IV	
V	
VI	
VII	
VIII	

अमुं चित्रालेखं पश्यन्तु एवम् अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) कस्यां कक्ष्यायां बालिकानां संख्या न्यूनतमा अस्ति ?

(b) किं VI कक्ष्ययां बालिकानां संख्या V कक्ष्यायां बालिकानामपेक्षया न्यूना अस्ति ?

(c) VII कक्ष्यायां कति बालिकाः सन्ति ?

6. कस्मिंश्चित् विभिन्नदिनेषु विद्युत्-गोलदीपानां विक्रयणम् अधः दर्शितम् अस्ति।

	= 2 गोलदीपः
सोमवासरः	
मङ्गलवासरः	
बुधवासरः	
गुरुवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	
रविवासरः	

चित्रालेखं पश्यन्तु अपि च अधोलिखितानां प्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) शुक्रवासरे कति गोलदीपाः विक्रीताः ?

(b) कस्मिन् दिने अधिक-गोलदीपानां विक्रयणं जातम् ?

(c) यदि एकस्य गोलदीपस्य मूल्यं 10 रूप्यकाणि तर्हि रविवासरे कियतः धनराशेः विक्रयणं जातम् ?

(d) किं भवन्तः सम्पूर्णसप्ताहस्य आहत्य विक्रयणं ज्ञातुं प्रभवन्ति ?

(e) यदि एकस्मिन् बृहत्पेटिकायां 9 गोलदीपाः भवितुं शक्नुवन्ति तर्हि अस्मिन् सप्ताहे कतीनां पेटिकानाम् आवश्यकता अभवत् ?

7. एकस्मिन् विशेष-ऋतौ एकस्मिन् ग्रामे 6 फलविक्रेतृभिः विक्रीतफलपेटिकानां संख्या अधस्थे चित्रलेखे दर्शिता अस्ति।

	= 100 फलानां पेटिका
रहीम	
लखनपाल	
अनवर	
मार्टिन	
रंजीत सिंह	
जोसेफ	

अमुं चित्रलेखं पश्यन्तु अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) कः फलविक्रेता अधिकफलपेटिकाः विक्रीतवान् ?

(b) अन्वरः फलानां कति पेटिकाः विक्रीतवान् ?

(c) ये 600 अथवा ततोऽपि अधिकपेटिकाः विक्रीतवन्तः ते विक्रेतारः अग्रिम-ऋतौ फलसंरक्षणालयं क्रेतुं योजनां कुर्वन्तः सन्ति। किं भवन्तः एतेषां नाम वक्तुं शक्नुवन्ति ?

9.6 चित्रालेखानाम् आलेखनम्

चित्रालेखानाम् आलेखनम् एकं रुचियुक्तं कार्यम् अस्ति। किन्तु यदा कदापि कोऽपि सङ्केतः यथा (यः पूर्वं दत्त-उदाहरणेषु एकस्मिन् उदाहरणे दर्शितः अस्ति) एककस्य गुणजरूपेण अपि प्रयुज्यते तथा च अमुम् आलेखितुं कठिनता अपि भवितुं शक्यते। एतेषां स्थाने वयं सरलसङ्केतानां प्रयोगम् कर्तुं शक्नुमः।

यदि 5 छात्रान् निरूपयति, तर्हि भवन्तः 4 अथवा 3 छात्रान् कथं निरूपयन्ति ? वयम् एतादृश-स्थितिषु अधोलिखितप्रकारेण कल्पनां कृत्वा समाधातुं शक्नुमः।

5 छात्रान् निरूपयति तर्हि 4 छात्रान् निरूपयति,

3 छात्रान् निरूपयति तर्हि 2 छात्रान् निरूपयति,

1 छात्रान् निरूपयति। एतदनन्तरं निरूपणकार्यस्य आरम्भं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 7 : कस्मिंश्चित् सप्ताहे एकस्यां कक्ष्यायां 30 छात्राणाम् उपस्थितिः अधोलिखितरीत्या अस्ति।

इमाम् एकेन चित्रालेखेन निरूपयन्तु।

दिनम्	उपस्थितछात्राणां संख्या
सोमवासरः	24
मङ्गलवसरः	26
बुधवासरः	28
गुरुवासरः	30
शुक्रवासरः	29
शनिवासरः	22

समाधानम् : पूर्वं कृतकल्पनायाः अनुसारेण,

24 इत्येतत् इत्यनेन दर्शयितुं शक्यते।

26 इत्येतत् इत्यनेन दर्शयितुं शक्यते।

इत्यादिः।

अनेन प्रकारेण चित्रालेखः अधोलिखितप्रकारेण भवति ।

दिनम्	**छात्राणां संख्या**
सोमवासरः	
मङ्गलवसरः	
बुधवासरः	
गुरुवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	

अत्र वयम् एकस्मिन् निष्कर्षे आगतवन्तः यत् "5 तः न्यूनं" एकेन चित्रेण कथं निरूपयामः । एतादृशचित्रानां कर्तनं सदैव साध्यं नास्ति । एतादृशस्थितिषु अस्माभिः किं कर्तव्यम् ?

उदाहरणम् 8 : कस्यचित् वर्षस्य प्रथमेषु चतुर्षु मासेषु एकातिथिगृहार्थं क्रीत-विद्युद्दीपानां संख्या अधोलिखिता अस्ति ।

मासः	**विद्युद्दीपानां संख्या**
जनवरी	20
फरवरी	26
मार्च्	30
अप्रैल्	34

उपरि दर्शितं चित्रालेखे निरूपयन्तु ।

समाधानम् :

10 विद्युत्-गोलदीपान् निरूपयति

जनवरी	
फरवरी	
मार्च्	
अप्रैल्	

अत्र जनवरी अपि च मार्च् इत्यनयोः कृते चित्रनिर्माणं कठिनं नास्ति। परन्तु 26 अपि च 34 इत्यनयोः कृते चित्रनिर्माणं सरलं नास्ति। वयं निकटतम 5 पर्यन्तं 26 इत्याख्यं 25 इति अपि च 34 इत्याख्यं 35 इति स्वीकर्तुं शक्यते। पुनः वयं फरवरी-मासार्थं $2\frac{1}{2}$ गोलदीपान् अपि च अप्रैल्-मासार्थं $3\frac{1}{2}$ गोलदीपान् दर्शयितुं शक्यते।

अभ्यासः 9.2

1. पञ्चग्रामेषु पशूनाम् आहत्य संख्या इत्थं वर्तते।

ग्रामः A	:	80
ग्रामः B	:	120
ग्रामः C	:	90
ग्रामः D	:	40
ग्रामः E	:	60

अयं ⊗ सङ्केतः 10 पशून् निरूपयति इति चिन्तयन्तु एवम् अस्य सङ्केतस्य प्रयोगं कृत्वा पशूनां कृते एकं चित्रालेखं निर्मान्तु।

(a) ग्रामः E इत्यस्य पशून् कति सङ्केताः निरूपयन्ति ?

(b) कस्मिन् ग्रामे पशूनां संख्या अधिका अस्ति ?

(c) ग्रामः A अपि च ग्रामः C इत्येतयोः मध्ये कस्मिन् ग्रामे अधिकाः पशवः सन्ति ?

2. विभिन्न-वर्षेषु एकस्य विद्यालस्य छात्राणाम् आहत्य संख्या अधः कोष्ठके प्रदर्शिता अस्ति।

वर्षः	**छात्राणां संख्या**
1996	400
1998	535
2000	472
2002	600
2004	623

A. अयं सङ्केतः 100 छात्रान् निरूपयति, अस्य प्रयोगं कृत्वा एकं चित्रालेखं निर्मान्तु। अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) 2002 तमे वर्षे कति सङ्केताः आहत्य छात्राणां संख्यां निरूपयन्तः सन्ति ?

(b) 1998 तमे वर्षे कति सङ्केताः आहत्य छात्राणां संख्यां निरूपयन्तः सन्ति ?

B. कमपि 50 छात्रान् निरूप्यमाणम् अन्यसङ्केतं स्वीकृत्य अन्यमेकं चित्रालेखं निर्मान्तु। कतमः चित्रालेखः अधिक-सूचनाप्रदः अस्ति ?

9.7 दण्डालेखः

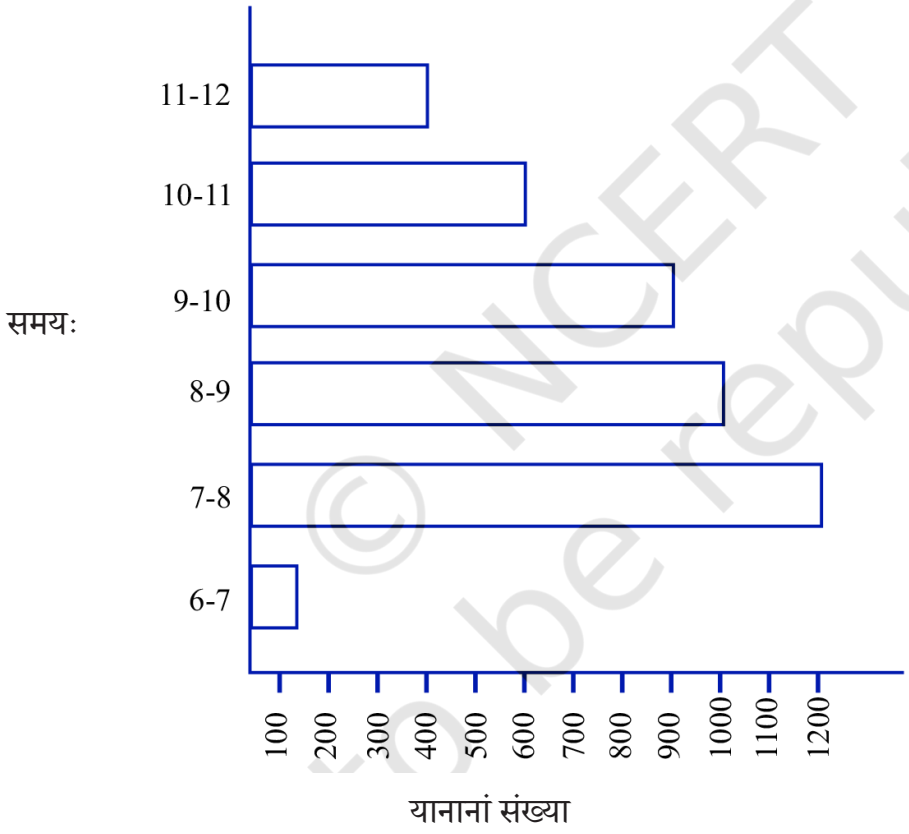
दत्तांशान् चित्रालेखेषु निरूपणं न केवलं अधिकसमयं स्वीकरोति अपि तु यदा-कदापि इदं कठिनमपि भवति। आयान्तु, दत्तांशान् निरूपयितुं कमपि अन्यं चित्रीय-विधिं पश्यामः। वयं समान-वैशाल्यस्य

ऊर्ध्वाधर-दण्डम् आलेखितुं शक्नुमः येषां मध्ये समानदूरं स्थापयामः। अनेन प्रकारेण आलेखितस्य प्रत्येकं दण्डस्य लम्बः दत्तसंख्यां निरूपयति। दत्तांशानां प्रस्तुतीकरणस्य एषः चित्रीयविधिः दण्डारेखः अथवा दण्डालेखः इत्युच्यते।

9.7.1 दण्डालेखस्य व्याख्या

आयन्तु, कस्मिंश्चित् विशेषदिने यातायात-आरक्षकद्वारा देहल्याः एकस्मात् सम्मर्दयुक्त-चतुष्पथः गच्छतां वाहनानां विषये कृताध्ययनस्य उदाहरणस्योपरि विचारं कुर्मः। प्रातः 6 वादनतः मध्याह्नं 12 वादनपर्यन्तं प्रत्येकं होरायां तस्मात् चतुष्पथः गच्छतां वाहनानां संख्या अधः दत्त-दण्डालेखे दर्शिता अस्ति। एकः घटकः साङ्केतिकरूपेण एकेन लघुकोष्ठकेन निरूपितः अस्ति। (एकः घटकः = 1)

मानकम् : 1 घटकः लम्बः = 100 यानानि



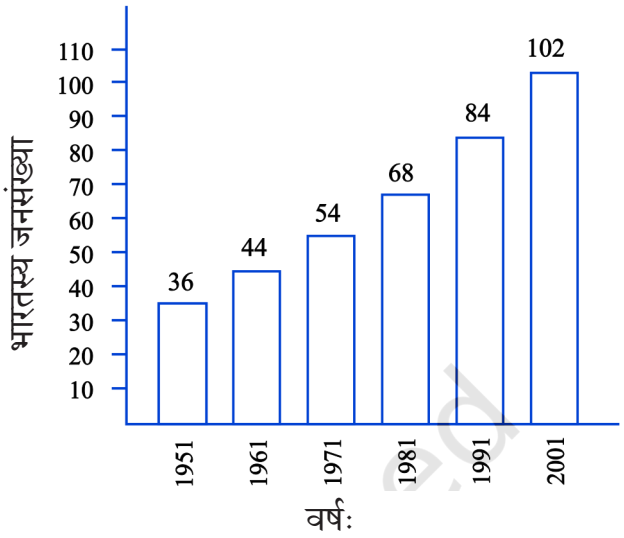
वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् अधिकतम-गमनागमनं सर्वाधिक-लम्बदण्डः अर्थात् 1200 यानानि निरूपयन्ति एवम् एतत् प्रातः 7-8 वादनयोः मध्ये अस्ति। एतस्मात् न्यूनदण्डः 8-9 वादनयोः मध्ये अस्ति।

इत्थं, न्यूनतम-गमनागमनं सर्वस्मात् लघुदण्डः अर्थात् 100 यानानि निरूपयन्ति एवम् एतत् प्रातः 6-7 वादनयोः मध्ये अस्ति। एतस्मात् लघुदण्डात् अग्रिम-दण्डः 11-12 वादनयोः मध्ये अस्ति। द्व

योः अतिसम्मर्द-होरयोः (8.00-10.00 वादनम्) मध्ये आहत्य गतागत-यानानि 1000 + 900 = 1900 यानानि सन्ति यानि द्वाभ्या लम्बदण्डाभ्यां दर्शितानि सन्ति।

© NCERT not to be republished

यदि दत्तांशेषु संख्याः बृहत्यः भवन्ति तर्हि भवतां कृते अन्य-मानकस्य आवश्यकता भवति। उदाहरणार्थं, भारतस्य जनसंख्यायाः वृद्धेः विषयं स्वीकुर्वन्तु। एषा संख्या तु कोटि-मध्ये अस्ति। अतः यदि भवन्तः 1 घटकः = 1 व्यक्तिः इति स्वीकुर्वन्ति तदा दण्डालेखम् आलेखितुं काठिन्यं भवति। अतः एतादृशं मानकं चिन्वन्तु यत् एकः घटकः 10 कोटिपरिमितान् जनान् निरूपयेत्। अस्यां स्थितौ दण्डालेखः अधोलिखिताकृतौ दर्शितः अस्ति।



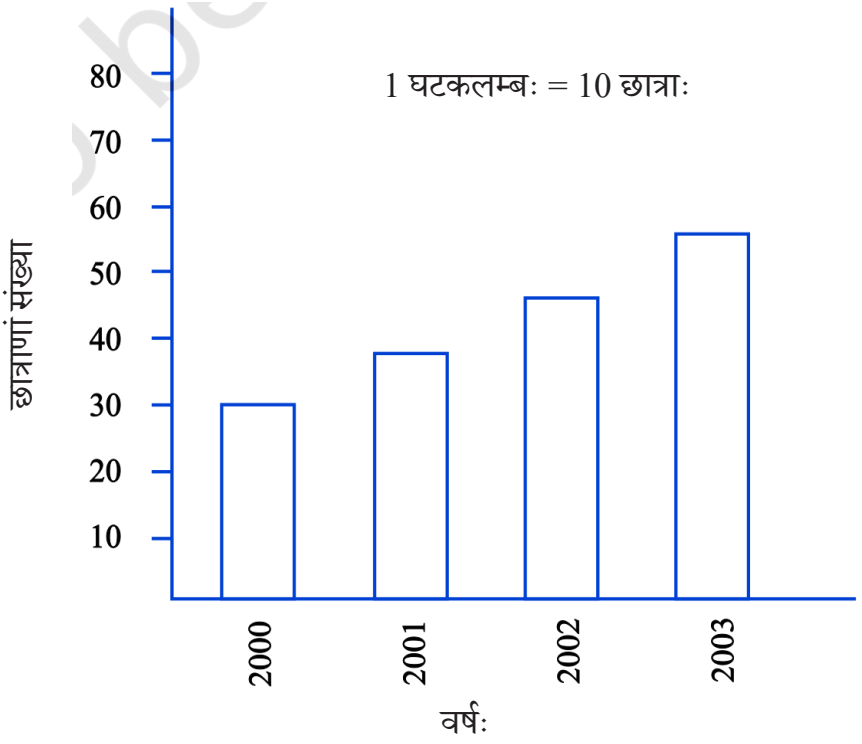
अतः 5 घटक-लम्बः 50 कोटिं निरूपयति अपि च 8 घटकलम्बः 80 कोटिं निरूपयति।

उदाहरणम् 9 : कस्यचित् विद्यालयस्य एकस्याः विशेष-कक्ष्यायाः अधोलिखितं दण्डालेखं पठन्तु अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) अस्य आलेखस्य मानकं किम् ?

(b) प्रत्येकं वर्षे विद्यालये कति नूतनछात्राः प्रवेशं प्राप्नुवन्ति ?

(c) किं 2003 तमे वर्षे छात्राणां संख्या 2000 तमस्य वर्षस्य छात्राणां द्विगुणिता अस्ति ?

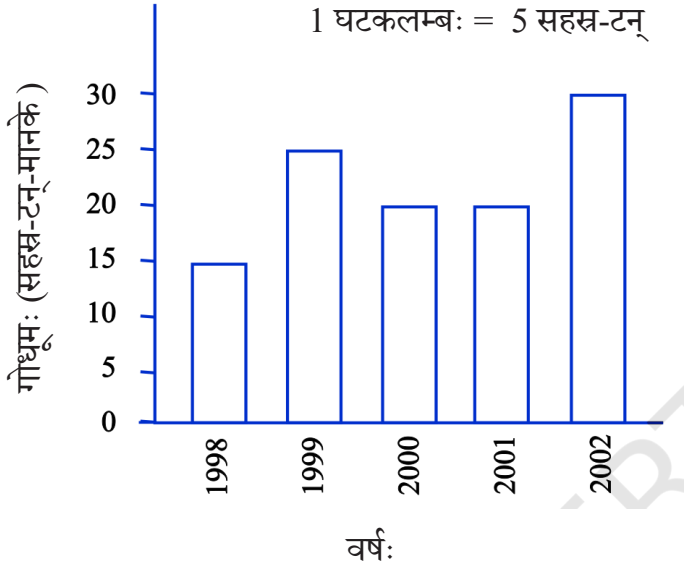


समाधानम् : (a) मानकम् : 1 घटकलम्बः = 10 छात्राः

(b) (c) स्वयं कुर्वन्तु।

अभ्यासः 9.3

1. अधोदत्तः दण्डालेखः 1998 तः 2002 पर्यन्तं सर्वकारेण क्रीत-गोधूमस्य प्रमाणं दर्शयति।

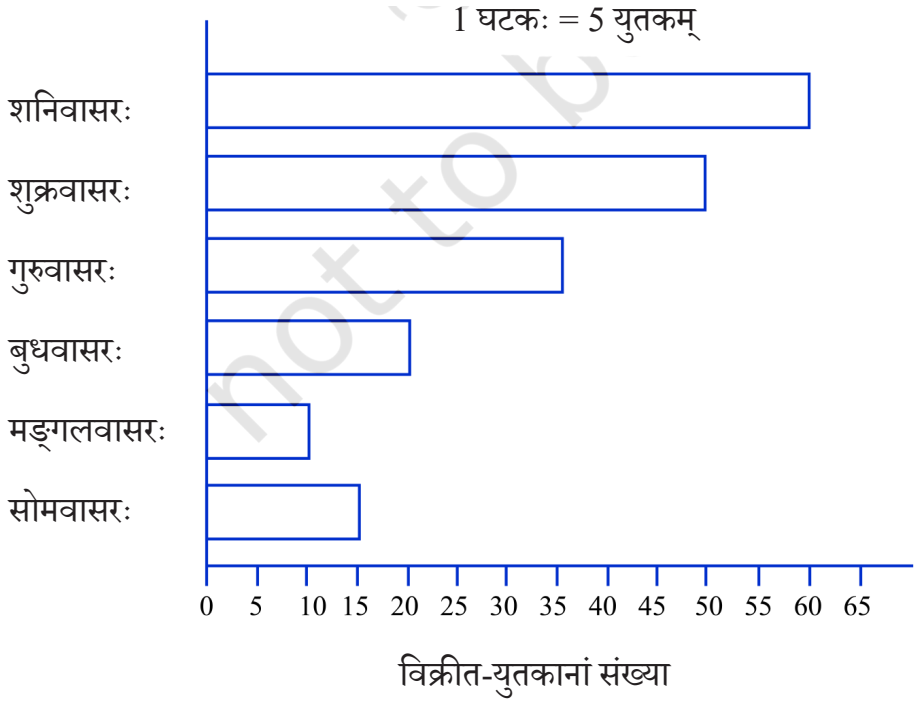


अमुं दण्डालेखं पठन्तु अपि च प्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

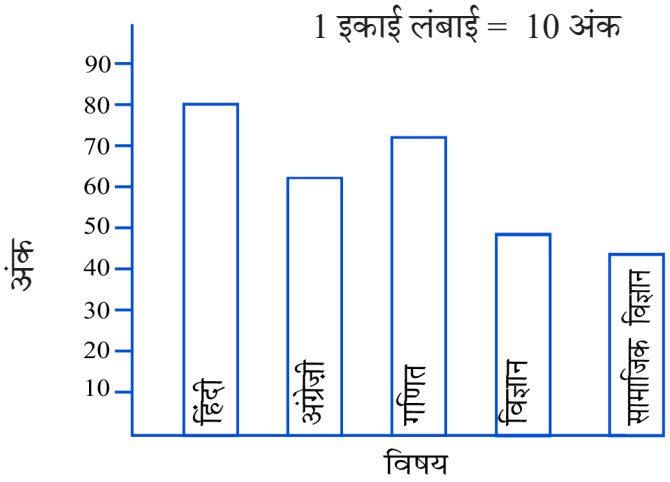
(a) कस्मिन् वर्षे गोधूमस्य अधिकोत्पादनं जातम् ?

(b) कस्मिन् वर्षे गोधूमस्य न्यूनतमोत्पादनं जातम् ?

2. अमुं दण्डालेखं पश्यन्तु यः एकस्मिन् कृतकवस्त्राणां आपणे सोमवारतः शुक्रवारपर्यन्तं युतकानां विक्रयणं दर्शयति।



not to be republished



अधुना अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) उपरि दत्त-दण्डालेखे का सूचना दर्शिता अस्ति ?

(b) युतकस्य संख्यां दर्शयितुं दण्डालेखे किम् मानकं स्वीकृतम् अस्ति ?

(c) कस्मिन् दिने अधिकतमयुतकानां विक्रयणं जातम् ? कियत्संख्यायां विक्रयणं जातम् ?

(d) कस्मिन् दिने न्यूनतमसंख्ययां युतकानां विक्रयणं जातम् ?

(e) गुरुवासरे कतीनां युतकानां विक्रयणं जातम् ?

3. अमुं दण्डालेखं पश्यन्तु यः अजीजेन अर्धवार्षिकपरीक्षायां विभिन्नविषयेभ्यः प्राप्ताङ्कान् दर्शयति।

अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) एषः दण्डालेखः कां सूचनां प्रदर्शयति ?

(b) कस्मिन् विषये अजीजः अधिकतमम् अङ्कं प्राप्तवान् ?

(c) कस्मिन् विषये सः न्यूनतमम् अङ्कं प्राप्तवान् ?

(d) विषयानां नाम लिखन्तु अपि च तेषु प्रत्येकं विषये प्राप्ताङ्कान् अपि लिखन्तु।

9.7.2 दण्डालेखस्य आलेखः

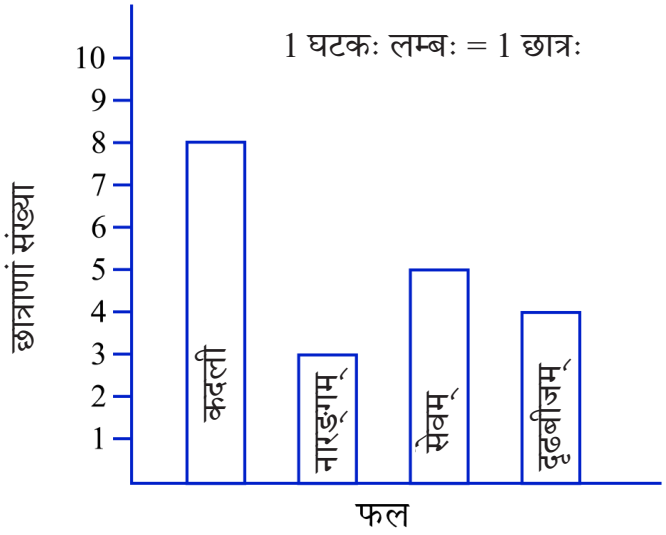
तद् उदाहरणं स्मरन्तु यस्मिन् रोनाल्डः स्व-सहपाठिभिः इष्यमाणानां फलानां कृते कोष्ठकः कृतः आसीत्।

फलस्य नाम	कदली	नारङ्गम्	सेवम्	दृढबीजम्
छात्राणां संख्या	8	3	5	4

प्रथमम् एकं क्षैतिजरेखां एवम् ऊर्ध्वाधररेखाम् आलिखन्तु। क्षैतिजरेखायां फलानां निरूपणं क्रियमाण-दण्डान् आलिखन्तु अपि च ऊर्ध्वाधाररेखायां संख्याङ्कं लिखन्तु याः छात्राणां संख्यां निरूपयान्ति।

आयान्तु, एकं सरलं मानकं चिनुमः। अस्यायमर्थः यत् वयं एतत् चिनुमः यत् 1 घटकलम्बेन कति छात्राः निरूपिताः भवन्ति।

अत्र वयं 1 घटकः लम्बः = 1 छात्रः इति स्वीकुर्मः।



उदाहरणम् 10 : अधोलिखितकोष्ठकम् इमरानस्य परिवारस्य विभिन्नेषु क्षेत्रेषु सम्भूयमानमासिकव्ययं निरूपयति।

क्षेत्रम्	**व्ययः (रू)**
गृहभाटकम्	3000
भोजनम्	3400
शिक्षा	800
विद्युत्	400
परिवहनम्	600
विविधम्	1200

एतान् दत्तांशान् एकस्मिन् दण्डालेखे निरूपयितुं सोपानानि अधोलिखितानि सन्ति।

(a) परस्परं द्वे लम्बरेखे आलिखन्तु, एकः ऊर्ध्वाधरः अपि च एकः क्षैतिजः।

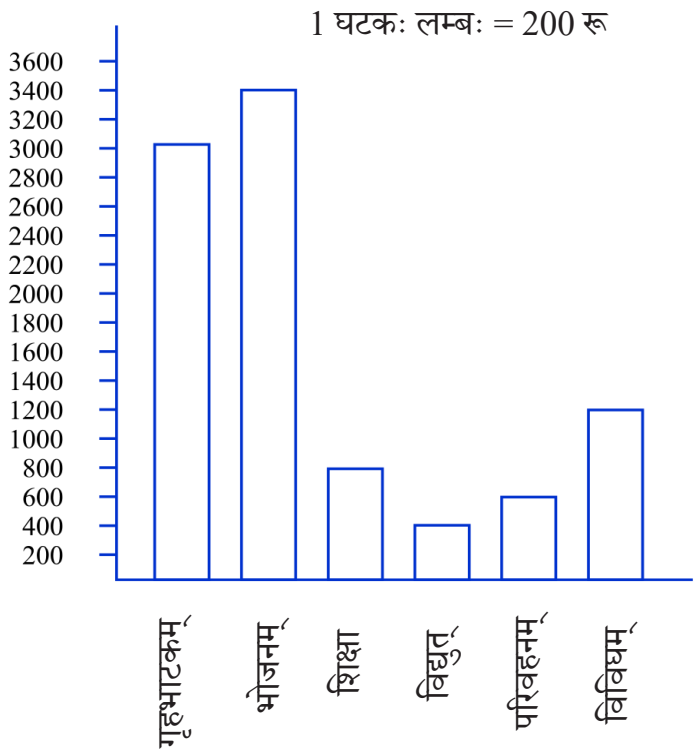
(b) क्षैतिजरेखायाः अनुदिशं क्षेत्रम् अङ्कितं कुर्वन्तु अपि च ऊर्ध्वाधररेखायाः अनुदिशं व्ययस्य अङ्कनं कुर्वन्तु।

(c) समानदूरे समानवैशाल्यस्य दण्डं निर्मान्तु।

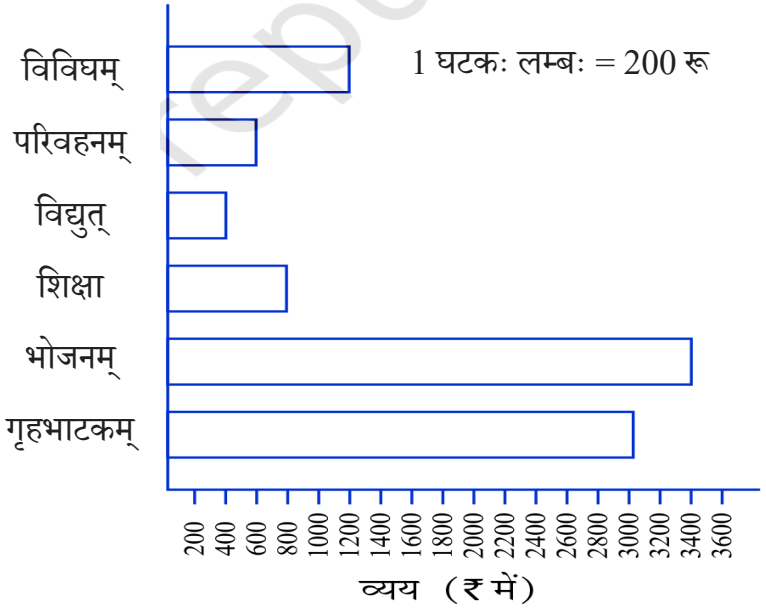
(d) ऊर्ध्वाधररेखायाः अनुदिशम् एकं साहाय्यकं मानकं स्वीकुर्वन्तु। भावयन्तु यत् 1 घटकः लम्बः = 200 रू अस्ति एवम् एतदनुसारं सङ्गतमानस्य अङ्कनं कुर्वन्तु।

विभिन्नक्षेत्राणां कृते दण्डानां लम्बस्य परिकल्पनं कुर्वन्तु यथा अधोदर्शितमस्ति ।

गृहभाटकम्	:	3000	÷	200	=	15 घटकः
भोजनम्	:	3400	÷	200	=	17 घटकः
शिक्षा	:	800	÷	200	=	4 घटकः
विद्युत्	:	400	÷	200	=	2 घटकः
परिवहनम्	:	600	÷	200	=	3 घटकः
विविधम्	:	1200	÷	200	=	6 घटकः



एतान् दत्तांशान्, क्षेत्रस्य अपि च व्ययस्य स्थिती अक्षेषु परस्परं परिवर्त्य अधोलिखितप्रकारेणापि दर्शयितुं शक्यते।



एतत् कुर्वन्तु

1. स्व-मित्रैः सह पञ्च एतादृशस्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यासु वयं दत्तांशान् प्राप्तुं शक्नुमः। संख्यानां प्रयोगं कृत्वा कोष्ठकं निर्मान्तु अपि च ताः दण्डालेखद्वारा प्रदर्शयन्तु।

अभ्यासः 9.4

1. एकस्य विद्वालयस्य 120 छात्रान् अनेन आशयेन सर्वेक्षणं कृतवन्तः यत् ते स्व-रिक्तसमये कं क्रियाकलापं कर्तुं वाञ्छन्ति इति।

अभिलषितः क्रियाकलापः	छात्राणां संख्या
क्रीडा	45
कथापुस्तकपटनम्	30
दूरदर्शनस्य दर्शनम्	20
सङ्गीतश्रवणम्	10
चित्रलेखनम्	15

1 घटकः लम्बः = 5 छात्राः इति मानकं स्वीकृत्य एकं दण्डालेखं निर्मान्तु। क्रीडाम् अतिरिच्य कतमः क्रियाकलापः अधिकैः छात्रैः अभिलषितः वर्तते?

2. षट्सु क्रमागतदिनेषु केनपि आपणिकेन विक्रीत-गणितपुस्तकानां संख्या अधः दत्तः अस्ति।

दिनम्	विक्रीतपुस्तकानां संख्या
रविवासरः	65
सोमवासरः	40
मङ्गलवासरः	30
बुधवासरः	50
गुरुवासरः	20
शुक्रवासरः	70

स्वाभिलषितस्य मानकस्य चयनं कृत्वा उपरि उक्तसूचनायाः कृते एकं दण्डालेखं रचयन्तु।

3. 1998 तः 2002 वर्षपर्यन्तं एकेन कार्यागारेण निर्मितानां द्विचक्रिकाणां संख्या अधोदर्शिता अस्ति।

वर्षः	निर्मितद्विचक्रिकाणां संख्या
1998	800
1999	600
2000	900
2001	1100
2002	1200

इदं दत्तांशानां दण्डालेखद्वारा प्रदर्शयन्तु। स्वाभिलषितं मानकं स्वीकुर्वन्तु।

(a) कस्मिन् वर्षे अधिकतमद्विचक्रिकाणां निर्माणम् अभवत्?

(b) कस्मिन् वर्षे न्यूनतमद्विचक्रिकाणां निर्माणम् अभवत्?

4. विभिन्नानां आयुस्समूहानाम् अनुसारेण कस्यचित् नगरस्य व्यक्तीनां संख्या अधोलिखितकोष्ठके दत्ता अस्ति।

आयुस्समूहः	1 – 14	15 – 29	30 – 44	45 – 59	60 – 74	75 एवमग्रे
व्यक्तीनां संख्या	200000	160000	120000	120000	80000	40000

एतान् दत्तांशान् एकेन दण्डालेखद्वारा निरूपयन्तु। (1 घटकः लम्बः = 1000 इति स्वीकुर्वन्तु) अधोलिखितप्राश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) कयोः द्वयोः आयुस्समूहयोः मध्ये जनसंख्या समाना अस्ति ?

(b) 60 अथवा ततोऽधिकायुषः जनाः वरिष्ठनागराः इति कथ्यन्ते। अस्मिन् नगरे कियन्तः वरिष्ठनागराः वर्तन्ते ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

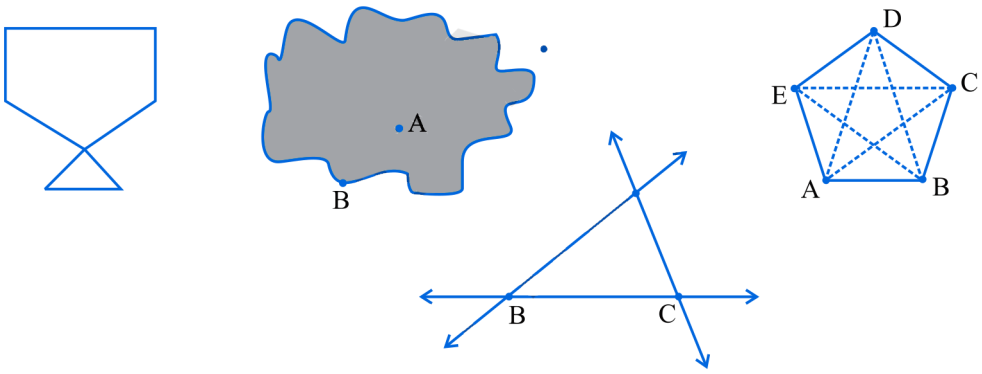
1. वयं दृष्टवन्तः यत् दत्तांशाः कतिचन सूचनाः प्रदातुम् एकत्रीकृतसंख्यानां सङ्ग्रहः भवति।
2. दत्त-दत्तांशैः कामपि विशेषसूचनां झटिति प्राप्तुं ताः मेलनचिह्नस्य प्रयोगं कृत्वा कोष्ठके प्रस्तोतुं शक्यते।
3. वयं शिक्षितवन्तः यत् केन प्रकारेण चित्रालेखः दतांशान् चित्ररूपेण, वस्तुरूपेण अपि च वस्तुभागरूपेण निरूपयति इति। वयं चित्रालेखानां व्याख्यां कर्तुं तथा तेन सम्बद्धप्रश्नानाम् उत्तरं प्रदातुम् अपि शिक्षितवन्तः। वयं कानिचन वस्तूनि सङ्केतेन निरूपयित्वा चित्रालेखानाम् आलेखनं कर्तुम् अपि शिक्षितवन्तः। उदाहरणार्थम् 100 पुस्तकानि स्वीकृत्य।
4. वयं चर्चां कृतवन्तः यत् दत्तांशाः एकया दण्डारेखया अथवा एकेन दण्डालेखेन कथं निरूपिताः भवन्ति इति। एकस्मिन् दण्डालेखे समानदूरे समानवैशाल्यस्य दण्डक्षैतिजः अथवा ऊर्ध्वाधरः आलेखितः भवति। प्रत्येकं दण्डस्य लम्बः वाञ्छितसूचनां दर्शयति।
5. एतत् कर्तुं, वयं आलेखार्थं मानकचयनप्रक्रियायाः विषये अपि चर्चां कृतवन्तः। उदाहरणार्थं, 1 घटकः = 100 छात्राः। वयं दण्डालेखस्य पठनाभ्यासम् अपि कृतवन्तः। वयं अस्य व्याख्यां कर्तुम् अपि ज्ञातवन्तः।

क्षेत्रमितिः

अध्यायः 10

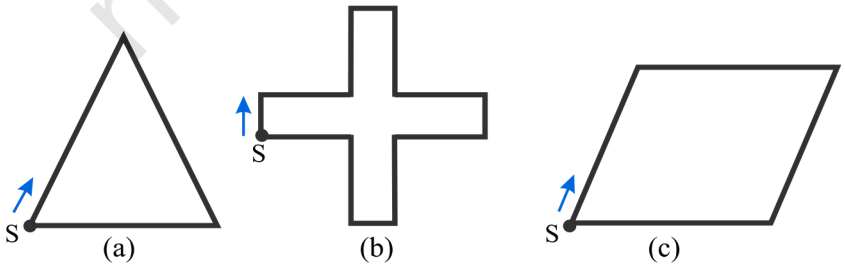
10.1 भूमिका

यदा वयं तलस्य एतादृशाकाराणां विषये सम्भाषणं कुर्मः, तदा वयं तेषाम् आकाराणां क्षेत्रस्य अथवा परिसीमायाः विषये अपि विचारं कुर्मः । अस्माकं कृते एतेषाम् आकाराणां तुलनार्थं केषाञ्चित् मापानाम् आवश्यकता भवति । आयान्तु, वयं तादृशान् एव काञ्चन आकारान् पश्यामः ।



10.2 परिमापः

आयान्तु, 10.1 इति अधोदत्ताकृतिं पश्यामः । भवन्तः एकया तन्त्र्या अथवा तन्तुना अपि एताः आकृतयः निर्मातुं शक्नुवन्ति ।



आकृति 10.1

यदि भवन्तः S बिन्दुना प्रारम्भं कृत्वा रेखाखण्डानां सहैव चलन्ति तर्हि पुनः भवन्तः S बिन्दुं प्राप्नुवन्ति। अनेन प्रकारेण भवन्तः आकृतेः एकं सम्पूर्णं भ्रमणं कृतवन्तः। एतद्दूरं एतासाम् आकृतीनां निर्माणे प्रयुक्त-तन्त्र्याः लम्बेन समानम् अस्ति।

एतद्दूरं पिहित-आकृतीनां परिमापः इत्युच्यते। एवमपि वक्तुं शक्यते यत् एतासाम् आकितीनां निर्माणे प्रयुक्त-तन्त्र्याः लम्बः एव परिमापः अस्ति।

- एकः कृषिकः स्व-क्षेत्रं परितः अवरोधकं निर्मातुम् इच्छति।
- एकः अभियान्त्रिकः स्व-गृहं परितः अवरोधकभित्तिं निर्मातुं इच्छति।
- एकः जनः क्रीडां क्रीडयितुं एकस्य पथः निर्माणं करोति।

एते सर्वेऽपि परिमापस्य प्रयोगं कुर्वन्ति।

एतादृश-पञ्च-स्थितीनाम् उदाहरणं ददतु यत्र भवद्भिः परिमापज्ञानस्य आवश्यकता अनुभूयते।

अतः परिमापः एतादृश-दूरम् अस्ति यत् यदि भवन्तः आकृतिं परितः एकं सम्पूर्णं भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि तत् रेखाखण्डेन सहैव गत्वा एकं पिहिताम् आकृतिं निर्माति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

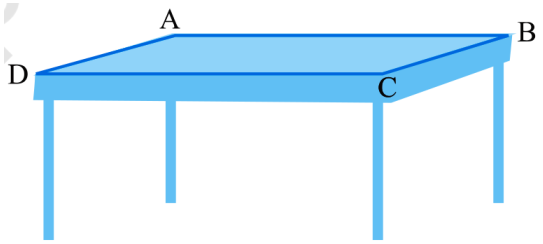
1. स्व-अध्ययन-उत्पीठिकायाः चतुर्णां शीर्षाणां लम्बस्य मापनं कुर्वन्तु।

AB = _____ सेमी

BC = _____ सेमी

CD = _____ सेमी

DA = _____ सेमी



अधुना चतुर्णां भुजानां लम्बानां योगफलम्

= AB + BC + CD + DA

= _____ सेमी + _____ सेमी + _____ सेमी + _____ सेमी

= _____ सेमी

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् परिमापः कियान् अस्ति इति ?

2. स्व-टिप्पणी-पुस्तकस्य एकस्य पृष्ठस्य चतुर्णां भुजानां लम्बानां मापं कुर्वन्तु अपि च तान् लिखन्तु। चतुर्णां भुजानां लम्बानां योगफलं

= AB + BC + CD + DA = _____ सेमी + _____ सेमी + _____ सेमी + _____ सेमी

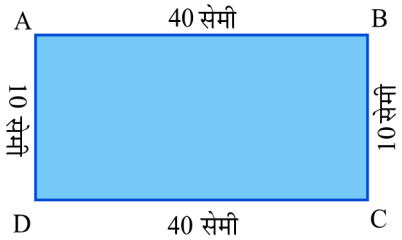
= _____ सेमी

पृष्ठस्य परिमापः कियान् अस्ति ?

3. मीरा 150 मी लम्बस्य तथा 80 मी वैशाल्यस्य एकम् उद्यानं गच्छति। सा तस्य उद्यानस्य सम्पूर्णं भ्रमणं करोति। तया भ्रमितं सम्पूर्णं दूरं मापयन्तु।

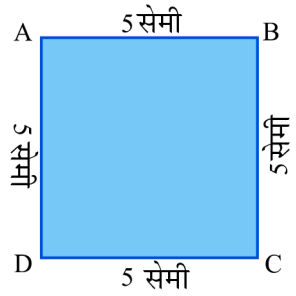
4. अधोदत्ताकृतीनां परिमापं जानन्तु।

(a)



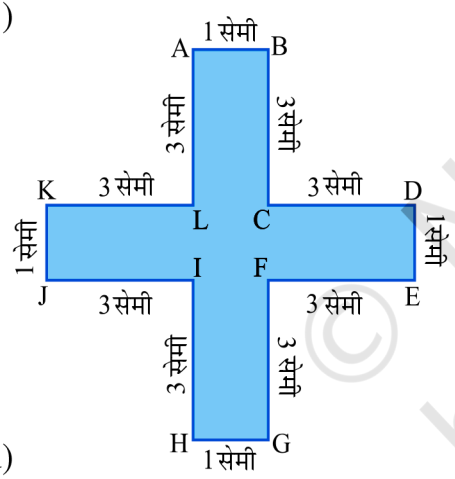
परिमाप = AB + BC + CD + DA
= ___+___+___+___
= _____

(b)



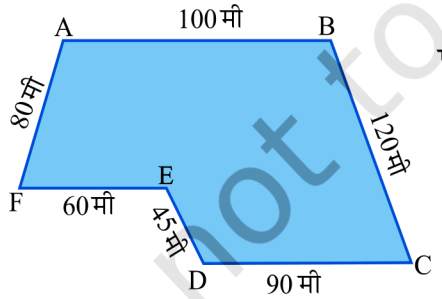
परिमाप = AB + BC + CD + DA
= ___+___+___+___
= _____

(c)



परिमाप = AB + BC + CD + DE
+ EF + FG + GH
+ HI + IJ + JK
+ KL + LA
= ___+___+___+___
= ___+___+___+___
= ___+___+___+___
= _____

(d)



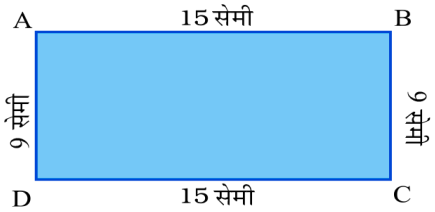
परिमाप = AB + BC + CD + DE + EF
+ FA
= ___+___+___+___+ ___
= _____

इत्थं, भवन्तः रेखाखण्डैः निर्मितानां पिहिताकृतीनां परिमापं कथं निष्कासयन्ति ? साधारणतया सर्वेषां भुजानां लम्बानां योगफलं ज्ञात्वा परिमापं जानीमः।

10.2.1 आयतस्य परिमापः

आयन्तु, इदानीं वयम् एकस्य ABCD इति आयतस्य (आकृतिः 10.2)उपरि विचारं कुर्मः। अस्य लम्बः = 15 सेमी अपि च वैशाल्यम् = 9 सेमी अस्ति। आयतस्य परिमापः कः भवति ?

© NCERT not to be republished



आकृति 10.2

आयतस्य परिमापः = चतुर्णां भुजानां लम्बानां योगफलम्

= AB + BC + CD + DA

= AB + BC + AB + BC

= 2 X AB + 2 X BC

= 2 X (15 सेमी + 9 सेमी)

= 2 X (24 सेमी)

= 48 सेमी

अतः उपरि दत्त-उदाहरणे वयं दृष्टवन्तः यत्

आयतस्य परिमापः = लम्बः + वैशाल्यम् + लम्बः + वैशाल्यम्

अर्थात् आयतस्य परिमापः = 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितायतानां परिमापं जानन्तु।

आयतस्य लम्बः	आयतस्य वैशाल्यम्	सर्वेषां भुजानां लम्बानां योगद्वारा परिमापः	परिमापसूत्रद्वारा 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)
25 सेमी	12 सेमी	= 25 सेमी + 12 सेमी + 25 सेमी + 12 सेमी = 74 सेमी	= 2 X(25 सेमी +12सेमी) = 2 X (37 सेमी) = 74 सेमी
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

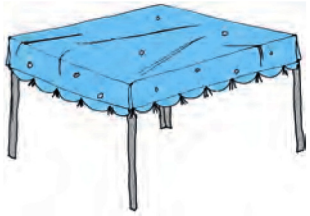
आयान्तु, अधुना वयं प्रयोगात्मकरूपेण अस्य सङ्कल्पनाः पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : शबाना 3 मी लम्बस्य अपि च 2 मी वैशाल्यस्य एकस्याः आयताकार-उत्पीठिकायाः आवारकं परितः (आकृतिः 10.3)प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति। शबानायै कियतः लम्बस्य प्रान्ताभरणस्य आवश्यकता अस्ति ?

समाधानम् : आयताकार-उत्पीठिका-आवारकस्य लम्बः = 3 मी

आयताकार-उत्पीठिका-आवारकस्य वैशाल्यम् = 2 मी

शबाना आवारकं परितः प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति अतः आवारकस्य परिमापेन समानं भवति। अधुना आयताकार-उत्पीठिकायाः आवारकस्य परिमापः



आकृति 10.3

= 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (3 मी + 2 मी)

= 2 X 5 मी = 10 मी

अतः आवश्यकप्रान्ताभरणस्य लम्बः = 10 मी अस्ति।

उदाहरणम् 2 : एक धावकः 50 मी लम्बस्य अपि च 25 मी वैशाल्यस्य एकम् आयताकारम् उद्यानं परितः 10 वारं भ्रमणं करोति। तेन परिक्रमितम् आहत्य दूरं जानन्तु।

समाधानम् : आयताकार-उद्यानस्य लम्बः = 50 मी

आयताकार-उद्यानस्य वैशाल्यम् = 25 मी

धावकेन परिक्रमित आहत्य दूरम् उद्यानस्य परिमापेन समानं भवति।

अधुना, आयताकार-उद्यानस्य परिमापः

= 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (50 मी + 25 मी)

= 2 X 75 मी = 150 मी

धावकेन 1 भ्रमणे परिक्रमितदूरं 150 मी अस्ति।

अतः 10 भ्रमणेषु परिक्रमितदूरं 10 X 150 मी = 1500 मी

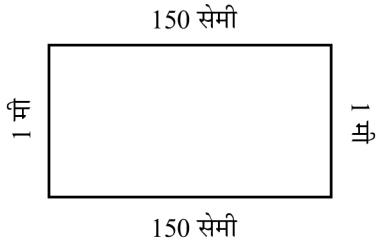
अतः धावकेन परिभ्रमितम् आहत्य दूरं 1500 मी अस्ति।

उदाहरणम् 3 : एकस्य आयतस्य परिमापं जानन्तु यस्य लम्बः = 150 सेमी तथा वैशाल्यं = 1 मी अस्ति।

समाधानम् : आयतस्य लम्बः = 150 सेमी

आयतस्य वैशाल्यम् = 1 मी

= 100 सेमी



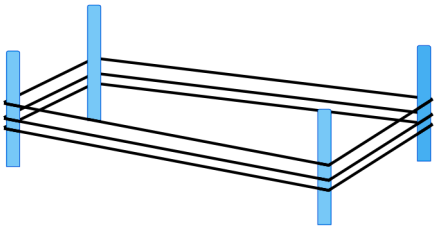
आयतस्य परिमापः

= 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (150 सेमी + 100 सेमी)

= 2 X (250 सेमी) = 500 सेमी = 5 मी

उदाहरणम् 4 : एकस्य कृषकस्य आयताकार-कृषिक्षेत्रस्य लम्बः अपि च वैशाल्यं क्रमशः 240 मी अपि च 180 मी अस्ति । सः क्षेत्रं परितः रज्जुना 3 सम्पूर्णभ्रमणस्य अवरोधकं निर्मातुम् इच्छति । यथा आकृतिः 10.4 इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृति 10.4

तेन प्रयुक्त-रज्जोः आहत्य लम्बं जानन्तु ।

समाधानम् : कृषिकेण रज्जुना क्षेत्रस्य परिमापः त्रिगुणितं परिक्रमणीयः वर्तते । आवश्यकरज्जोः लम्बः क्षेत्रस्य परिमापस्य त्रिगुणितः भवति ।

क्षेत्रस्य परिमापः = 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (240 मी + 180 मी)

= 2 X (420 मी) = 840 मी

आवश्यकरज्जोः आहत्य लम्बः = 3 X 840 मी = 2520 मी

उदाहरणम् 5 : 250 मी लम्बस्य अपि च 175 मी वैशाल्यस्य आयताकार-उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे आहत्य कियान् व्ययः भवति इति 12 रू प्रति मीटर् इति प्रमाणं स्वीकृत्य जानन्तु ।

समाधानम् : आयताकार-उद्यानस्य लम्बः = 250 मी

आयताकार-उद्यानस्य वैशाल्यम् = 175 मी

अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणव्ययं ज्ञातुम् उद्यानस्य परिमापस्य आवश्यकता भवति ।

आयताकार-उद्यानस्य परिमापः = 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (250 मी + 175 मी)

= 2 X (425 मी) = 850 मी

उद्यानं परितः 1 मी. अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणव्ययः = 12 रू

अतः 850 मी. लम्बस्य अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणः आहत्य व्ययः

= 12 X 850 रू = 10200 रू

10.2.2 सम-आकृतीनां परिमापः

आयान्तु, इदम् उदाहरणं पश्यामः ।

विश्वामित्रः 1 मी. भुजयुक्तं वर्गाकारचित्रं परितः एकं वर्णपट्टकं (टेप्) योजयितुम् इच्छति, यथा आकृतिः 10.5 इत्यस्मिन् दर्शितम् अस्ति । तस्य कृते कियतः लम्बस्य वर्णपट्टकस्य आवश्यकता भवति ?

विश्वामित्रः वर्गाकारचित्रं परितः वर्णपट्टकं योजयितुम् इच्छति इत्यतः तेन वर्गाकारचित्रस्य परिमापः ज्ञातव्यः भवति ।

अतः आवश्यकवर्णपट्टकस्य लम्बः =

वर्गाकारचित्रस्य परिमापः = 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी = 4 मी

वयं जानीमः यत् वर्गस्य चतुर्णामपि भुजानां लम्बः समानः भवति इति । अतः अस्य चतुर्वारं योगकरणस्थाने वयं वर्गस्य एकस्य भुजस्य लम्बं 4 इत्यनेन गुणनं कर्तुं शक्नुमः । अतः आवश्यकवर्णपट्टकस्य लम्बः = 4 X 1 मी = 4मी

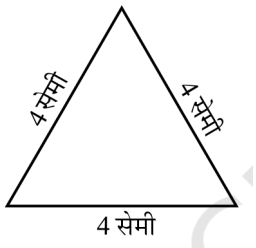
अनेन उदाहरणेन वयं पश्यामः यत्

वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य लम्बः

एवमेव इतोऽपि अन्यान् वर्गान् निर्मान्तु अपि च तेषां परिमापं जानन्तु।

अधुना वयं 4 से.मी. भुजायाः एकं समबाहुत्रिभुजं (आकृतिः 10.6) पश्यामः । किं वयम् अस्य परिमापं ज्ञातुं शक्नुमः ?

अस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 4 + 4 + 4 सेमी



आकृति 10.6

अस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = (4 + 4 + 4) सेमी

= 3 X 4 सेमी

= 12 सेमी

अनेन प्रकारेण वयं पश्यामः यत्

समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य लम्बः

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एकस्मिन् वर्गे एवम् एकस्मिन् समबाहुत्रिभुजे कः समानगुणः अस्ति ? एतासु आकृतिषु प्रत्येकं भुजस्य लम्बः समानः अस्ति अपि च प्रत्येकं कोणस्य मापः समानः अस्ति । **एतादृशः सर्वाः आकृतयः पिहित-समाकृतयः** इति कथ्यन्ते ।

अतः वर्गाः अपि च समबाहुत्रिभुजाः पिहित-समाकृतयः सन्ति ।

भवन्तः दृष्टवन्तः यत्

एकस्य वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य लम्बः

एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य लम्बः

एवमेव एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः कियान् भवति ?

एकस्मिन् समपञ्चभुजे 5 समानभुजाः भवन्ति ।

अतः एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः = 5 X एकस्य भुजस्य लम्बःतथैव एकस्य षड्भुजस्य परिमापः _____ भवति ।

एकस्य समाष्टभुजस्य परिमापः कियान् भवति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

आत्मानं परितः विद्यमानानां समाकारयुक्तानां वस्तूनां गवेषणं कुर्वन्तु अपि च तेषां परिमापं जानन्तु।

उदाहरणम् 6 : शायना 70 मी. वर्गाकारम् उद्यानं परितः 3 भ्रमणं करोति। तया परिक्रमितदूरं जानन्तु।

समाधानम् : वर्गाकार-उद्यानस्य परिमापः

= 4 X एकस्य भुजस्य लम्बः

= 4 X 70 मी = 280 मी

एकस्मिन् भ्रमणे परिक्रमितदूरम् = 280 मी

अतः 3 X 280 मी = 840 मी

उदाहरणम् 7 : पिङ्की 75 मीटर् भुजयुक्तम् एकं क्रीडाङ्गणं परितः भ्रमणं करोति। बोबः 160 मी. लम्बस्य अपि च 105 मी. वैशाल्यस्य एकम् आयताकारं क्रीडाङ्गणं भ्रमति। द्वयोः मध्ये कः अधिकं दूरं क्रमति अपि च अधिकं कियद्दूरं क्रमति ?

समाधानम् : पिङ्क्या परिक्रमित-आहत्य दूरं = वर्गस्य परिमापः

= 4 X एकस्य भुजस्य लम्बः

= 4 X 75 मी. = 300 मी

बोबेन परिक्रमित-आहत्य दूरं = आयतस्य परिमापः

= 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)

= 2 X (160 मी. + 105 मी)

= 2 X 265 मी. = 530 मी

परिक्रमितदूरयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरं = 530 मी – 300 मी. = 230 मी

अतः बोबः अधिकं दूरं परिक्रमति अपि च तद्दूरं 230 मी. अधिकम् अस्ति।

उदाहरणम् 8 : एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य प्रत्येकं भुजस्य लम्बः 3 से.मी. अस्ति।

समाधानम् : अस्मिन् समपञ्चभुजे 5 भुजाः सन्ति यस्य प्रत्येकं भुजस्य भुजायाः लम्बः 3 से.मी. अस्ति। अस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः = 5 X 3 सेमी = 15 सेमी

उदाहरणम् 9 : एकस्य समषड्भुजस्य परिमापः 18 से.मी. अस्ति। अस्य एकस्य भुजस्य लम्बं जानन्तु।

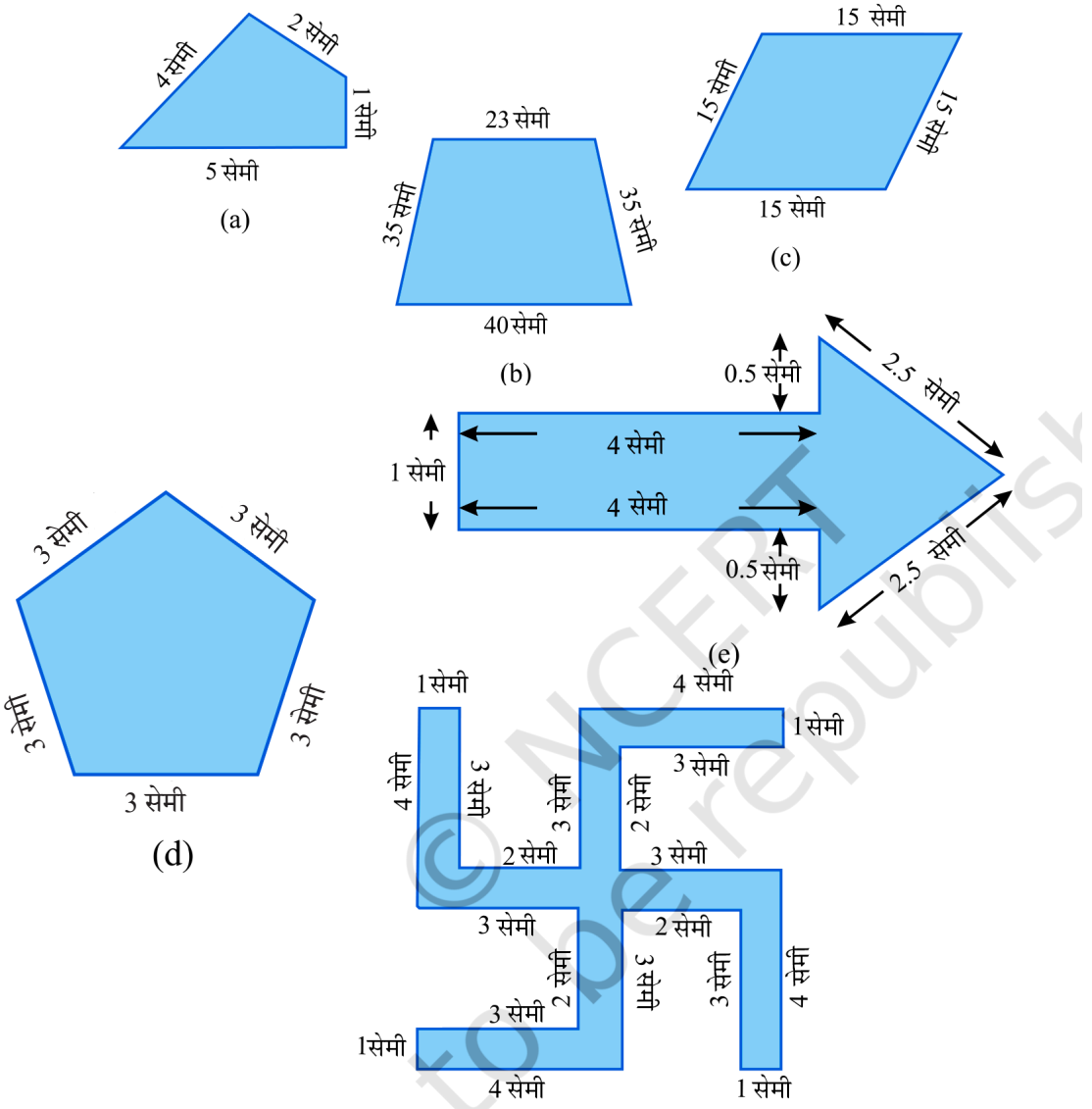
समाधानम् : परिमापः = 18 सेमी

एकस्मिन् समषड्भुजे 6 समानभुजाः भवन्ति। अतः एकस्य भुजस्य लम्बं ज्ञातुं वयं परिमापं 6 तः भागं कर्तुं शक्नुमः। समषड्भुजस्य एकस्य भुजस्य लम्बः = 18 से.मी. ÷ 6 = 3 सेमी अतः समषड्भुजस्य प्रत्येकं भुजस्य लम्बः 3 से.मी. अस्ति ।

अधुना वयम् एतावत्पर्यन्तं प्राप्तविचारेण सम्बन्धितानां केषाञ्चन प्रश्नानां समाधानं कुर्मः।

अभ्यासः 10.1

1. अधोदत्तानाम् आकृतीनां परिमापं जानन्तु।



2. 40 से.मी. लम्बस्य अपि च 10 से.मी. वैशाल्यस्य एकम् आयताकार-पेटिकावारकं एकेन वर्णपट्टेन (टेप्) पिहितम् अस्ति। आवश्यक-वर्णपट्टस्य लम्बं जानन्तु।

3. एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरितनस्य तलस्य भुजयोः लम्बः अपि च वैशाल्यं क्रमशः 2 मी. 25 से.मी. अपि च 1 मी 50 सेमी अस्ति। उत्पीठिकायाः उपरितनतलस्य परिमापं जानन्तु।

4. 32 से.मी. लम्बस्य अपि च 21 सेमी वैशाल्यस्य एकस्य भावचित्रस्य कृते काष्ठस्य प्रान्तभित्तिः (फ्रेम्) निर्मातव्या अस्ति।

5. एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य लम्बः अपि च वैशाल्यं क्रमशः 0.7 किमी अपि च 0.5 किमी अस्ति। भूखण्डं परितः चतृषु चतसृषु पङ्क्तिषु तन्त्र्या अवरोधकः निर्मातव्यः अस्ति। आवश्यकतन्त्र्याः लम्बं जानन्तु।

© NCERT not to be republished

6. अधोदत्ताकृतिषु प्रत्येकं परिमापं जानन्तु।

   (a) एकः त्रिभुजः यस्य भुजाः क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी अपि च 5 सेमी लम्बायमानाः सन्ति।

   (b) एकः समबाहुत्रिभुजः यस्य एकस्य भुजस्य लम्बः 9 से.मी. अस्ति ।

   (c) एकः समद्विबाहुत्रिभुजः यस्य प्रत्येकं समानभुजस्य लम्बः 8 से.मी. अपि च तृतीय भुजस्य लम्बः 6 से.मी. अस्ति।

7. एकस्य त्रिभुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य भुजानां लम्बाः 10 सेमी, 14 से.मी. अपि च 15 से.मी. सन्ति।

8. एकस्य समषड्भुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य प्रत्येकं भुजस्य भुजायाः मापः 8 मी. अस्ति।

9. एकस्य वर्गस्य भुजस्य मापं जानन्तु यस्य परिमापः 20 मी. अस्ति।

10. एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः 100 से.मी. अस्ति। प्रत्येकं भुजस्य लम्बं जानन्तु।

11. एकस्य तन्तोः लम्बः 30 से.मी. अस्ति। प्रत्येकं भुजस्य लम्बः कियान् भवति यदि तन्तुना निर्मिताः भवन्ति –

   (a) एकः वर्गः ?

   (b) एकः समबाहुत्रिभुजः ?

   (c) एकः समषड्भुजः ?

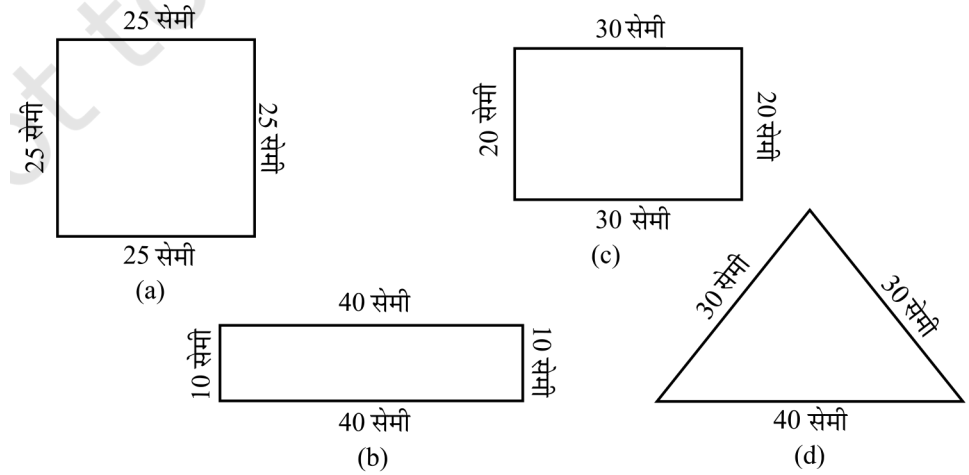
12. एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ 12 सेमी अपि च 14 से.मी. स्तः। अस्य त्रिभुजस्य परिमापः 36 सेमी अस्ति। अस्य तृतीयभुजस्य लम्बः कियान् भवति ?

13. यदि प्रति मीटर् इत्यस्य कृते 20 रू व्ययः भवति चेत् तर्हि 250 मी भुजस्य वर्गाकार-उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे कियद्धनम् अपेक्षते ?

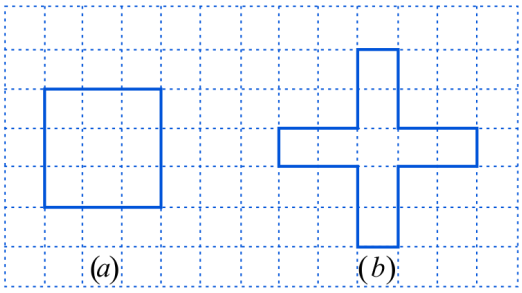
14. एकस्य आयताकार-उद्यानस्य लम्बः 175 मी अपि च वैशाल्यं 125 मी अस्ति। प्रति मीटर् इत्यस्य कृते 12 रू व्ययः भवति चेत् उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे कियान् व्ययः भवति ?

15. स्वीटी 75 मी भुजयुक्तवर्गं परितः धावति तथा बुल्बुल् इत्याख्या 60 मी लम्बस्य अपि च 45 मी. वैशाल्यस्य आयताकारं परितः धावति। एतयोः कतरा न्यूनतमदूरं धावति ?

16. अधोदत्ताकृतीनां परिमापं जानन्तु। भवन्तः उत्तरेण कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?



17. अवनीतः 9 वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरं (टैल्स्) क्रीणाति यस्य प्रत्येकं भुजः 1/2 मी अस्ति सः एतान् प्रस्तरान् एकस्य वर्गस्य रूपेण स्थापयति।



आकृति 10.7

(a) नूतनवर्गस्य परिमापः कः अस्ति [(आकृतिः 10.7 (a)]?

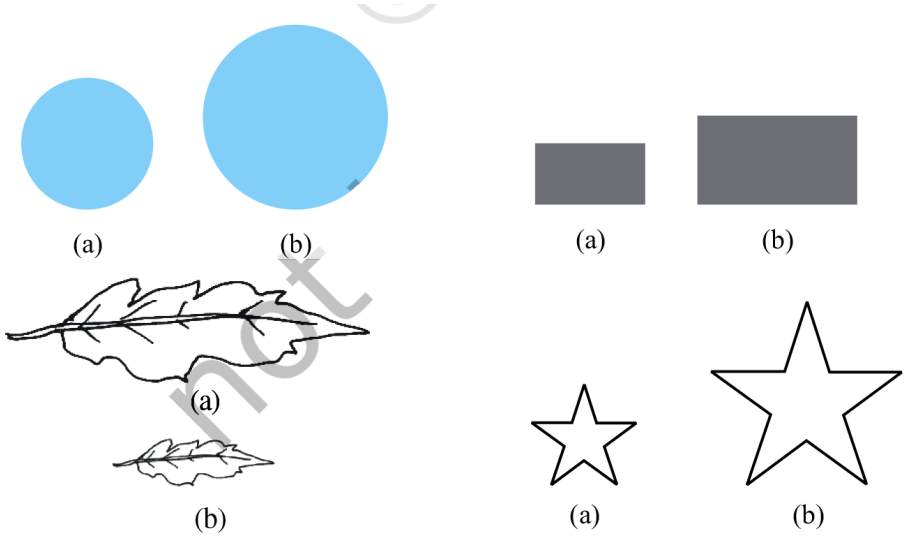
(b) शैर्यै अवनीतद्वारा स्थापित-प्रस्तरस्थापन-शैलिः न रोचते । सा तान् प्रस्तरान् धनचिह्नरूपेण स्थापयति। अस्याः स्थापनव्यवस्थायाः परिमापः कः भवति [(आकृतिः 10.7 (b)]?

(c) कस्याः आकृतेः परिमापः अधिकः अस्ति ?

(d) अवनीतः चिन्तयति किं कश्चन तादृशः विधिः अपि अस्ति येन सर्वाधिकपरिमापस्य प्राप्तिः भवेत् ? किं भवन्तः एतत्कर्तुं कमपि परामर्शं दातुं शक्नुवन्ति ? (प्रस्तराः परस्परं संलग्नाः एव भवेयुः)।

10.3 क्षेत्रफलम्

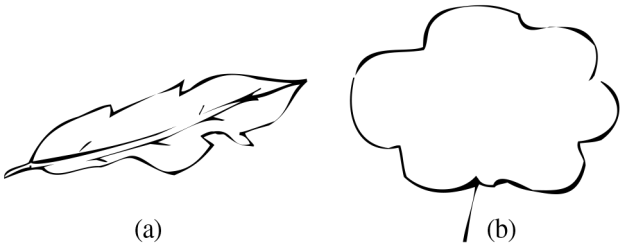
अधोदत्ताः पिहिताकृतयः पिहिताकृतीः पश्यन्तु (आकृतिः 10.8) । एताः सर्वाः आकृतयः तलभागे किञ्चित् क्षेत्रम् आवृणोति आवृण्वन्ति। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एतासु कतमा आकृतिः अधिकं क्षेत्रम् आवृणोति ?



आकृति 10.8

पिहित-आकृतिभिः आवृततलस्य परिणामः तस्याः क्षेत्रफलम् इत्युच्यते । अतः किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् उपरि दत्ताकृतिषु कस्याः क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ?

अधुना वयं अधोदत्ताकृतयः अधोदत्ताकृतीः पश्यामः (आकृतिः 10.9) । एतासु कस्याः आकृतेः क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ? एतासाम् आकृतीनां दर्शनमात्रेण एतत् वक्तुं बहुकष्टम् भवति । अतः भवन्तः किं कुर्वन्ति ?



आकृति 10.9

इमे आकृती वर्गाङ्कित-कर्गजस्य उपरि स्थापयन्तु यत्र प्रत्येकं वर्गस्य मापः 1 से.मी. X 1 से.मी. स्यात् ।

एतासां आकृतीनां बहिर्गत रूपरेखाम् आलिखन्तु । एताभिः आकृतिभिः आवृतवर्गान् पश्यन्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् तेषु केचन अर्धवर्गाः केचन पूर्णवर्गाः केचन अर्धान्न्यूनाः अर्धात् न्यूनाः केचन अर्धादधिकाः वर्गाः अवृताः आवृताः सन्ति ।

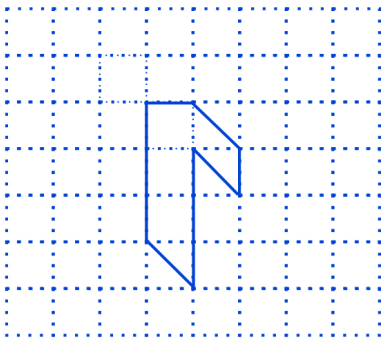
आकृत्या आवृतस्य आवश्यक-से.मी-वर्गस्य संख्या एव तस्याः क्षेत्रफलम् अस्ति ।

परन्तु अत्र एका समस्या वर्तते – भवन्तः यस्याः कस्याः अपि अकृतेः आकृतेः क्षेत्रफलं मापयितुम् इच्छन्ति, वर्गः तां सर्वदा पूर्णतया न आच्छादयति । वयं एकेन विधिना इमां समस्यां परिहर्तुं शक्नुमः ।

- वयम् एकस्य पूर्णवर्गस्य क्षेत्रफलम् एकवर्गघटकः इतिकरूपेण स्वीकुर्मः । यदि एषः वर्गः 1 वर्ग-से.मी. इत्यस्य अस्ति तर्हि एकस्य पूर्णवर्गस्य क्षेत्रफलं 1 वर्ग-से.मी. भवति ।
- येषां वर्गाणाम् अर्धादपि न्यूनभागः आकृत्या आवृतः अस्ति तर्हि तं त्यजन्तु ।
- यदि वर्गस्य अर्धादधिकभागः आकृत्या आवृतः तर्हि तादृशवर्गान् वयं पूर्णवर्गः इति गणयामः ।
- यदि कस्यापि वर्गस्य अर्धभागं गणनं कर्तुं शक्यते तर्हि तादृशवर्गस्य क्षेत्रफलं $\frac{1}{2}$ वर्गघटकः इति स्वीकुर्मः ।

अनेन विधिना इच्छितक्षेत्रफलस्य इष्टक्षेत्रफलस्य समुचितं मापनं कर्तुं शक्यते ।

उदाहरणम् 10 : आकृतिः 10.10 इत्यत्र दर्शिताकारस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।


आकृति 10.10

समाधानम् : एषः आकारः रेखाखण्डैः निर्मितः अस्ति । एषः आकारः केवलं पूर्णवर्गैः अपि च अर्धवर्गैः आवृतः अस्ति । एषः अस्माकं कार्यम् इतोऽपि सरलं करोति । कथम् ?

(i) पूर्णावृतवर्गाः = 3

(ii) अर्धावृतवर्गाः = 3

पूर्णावृतवर्गाणां क्षेत्रफलं = 3 X 1 वर्गघटकः = 3 वर्गघटकाः ।

अर्धावृतवर्गाणां क्षेत्रफलं

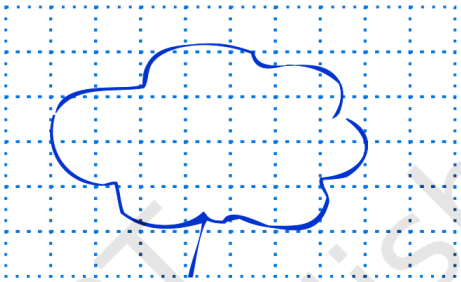
$= 3 \text{ X } \frac{1}{2}$ वर्गघटकः $= 1 \frac{1}{2}$ वर्गघटकः

अतः आहत्य क्षेत्रफलम् $= 4 \frac{1}{2}$ वर्गघटकः ।

उदाहरणम् 11 : वर्गान् गणयित्वा, आकृतिः 10.9 (b) इत्यस्य अनुमानितक्षेत्रफलं जानन्तु ।

समाधानम् : वर्गाङ्कितकर्गजे अस्याः अकृत्याः बहिर्गतरूपरेखाम् आलिखन्तु । वर्गाः इमाम् आकृतिं कथं आवृण्वन्ति ।

आवृताः वर्गाः	संख्या	अनुमानितक्षेत्रफलम्
(i) पूर्णावृतवर्गाः	11	11
(ii) अर्धावृतवर्गाः	3	$3 \text{ X } \frac{1}{2}$
(iii) अर्धादधिकावृतवर्गाः	7	7
(iv) अर्धान्यूनावृतवर्गाः	5	0



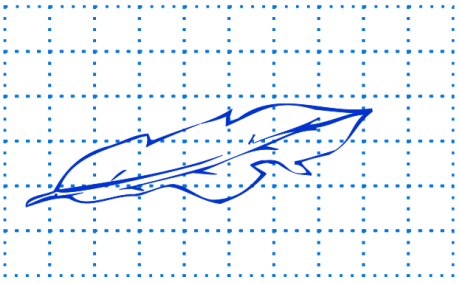
आकृति 10.11

आहत्य क्षेत्रफलम् = 11 + 3 X $\frac{1}{2}$ + 7 = 19 $\frac{1}{2}$ वर्गघटकाः

उदाहरणम् 12 : वर्गान् गणयित्वा, आकृतिः 10.9 (a) इत्यस्य अनुमानितं क्षेत्रफलं जानन्तु ।

समाधानम् : एकस्मिन् वर्गाङ्कितकर्गजे आकृतेः बहिर्गतरूपरेखाम् आलिखन्तु । वर्गाः इमाम् आकृतिं कथं अवृण्वन्ति ?

आवृताः वर्गाः	संख्या	अनुमानित क्षेत्रफलम्
(i) पूर्णावृतवर्गाः	1	11
(ii) अर्धावृतवर्गाः	-	-
(iii) अर्धादधिकावृतवर्गाः	7	7
(iv) अर्धान्यूनावृतवर्गाः	9	0



आकृति 10.12

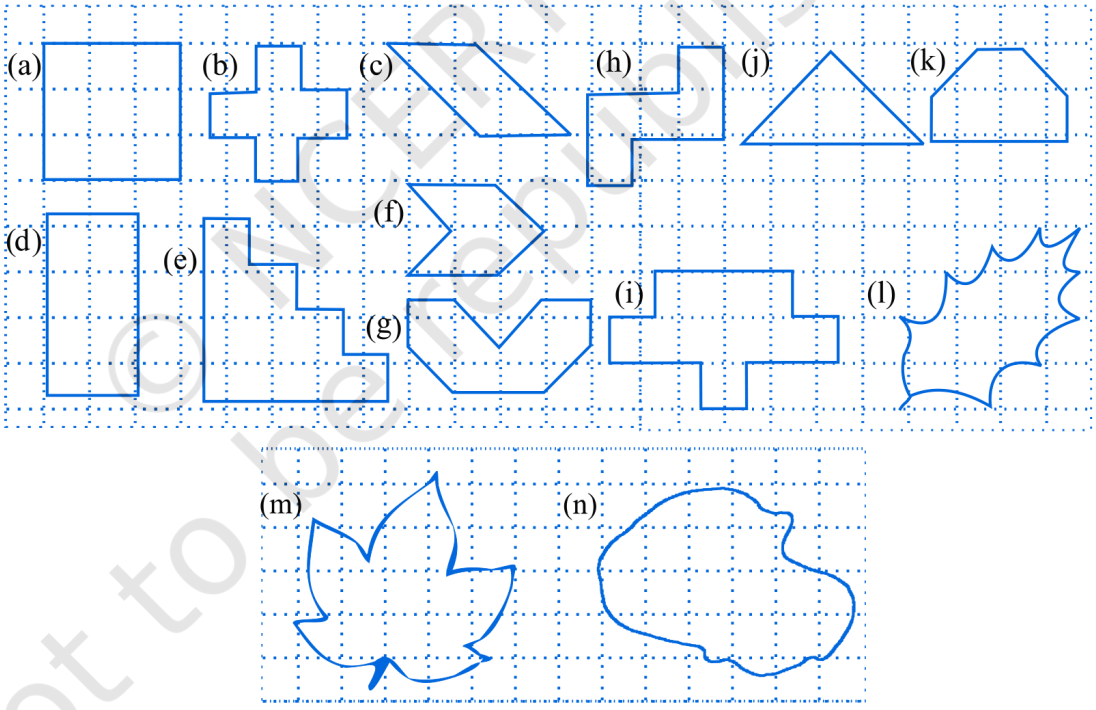
आहत्य क्षेत्रफलम् = 1 + 7 = 8 वर्गघटकाः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. वर्गाङ्कितकर्गजे कमपि एकं वृत्तम् आलिखन्तु । अस्मिन् वृत्ते विद्यमानवर्गाणां संख्यां गणयित्वा वृत्ताकारस्य क्षेत्रस्य अनुमानित क्षेत्रफलं जानन्तु ।
2. वर्गाङ्कितकर्गजस्य उपरि पत्राणि, पुष्पदलानि तथा एवमेव अन्यानि वस्तूनि स्थापयित्वा छायाङ्कनं कुर्वन्तु अपि च तेषां क्षेत्रफलं जानन्तु ।

अभ्यासः 10.2

1. अधोलिखिताकृतीनां क्षेत्रफलं जानन्तु ।



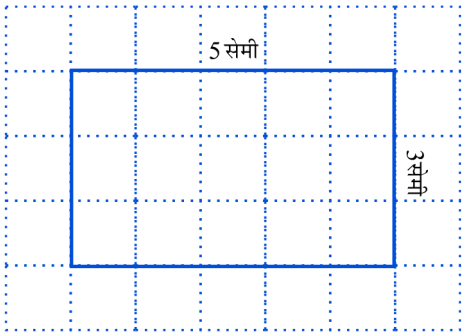
10.3.1 आयतस्य क्षेत्रफलम्

एकस्य वर्गाङ्कितकर्गजस्य साहाय्येन किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं कियत् स्यात् , यस्य लम्बः 5 से.मी. अपि च वैशाल्यम् 3 से.मी. अस्ति ?

वर्गाङ्कितकर्गजस्य उपरि एकम् आयतं निर्मान्तु (आकृतिः 10.13) । एषः आयतः 15 वर्गान् पूर्णतया आवृणोति ।

आयतस्य क्षेत्रफलम् = 15 वर्गसे.मी. अस्ति । यद्वयं 5 X 3 वर्गसे.मी. (लम्बः X वैशाल्यम्) इति रूपेण अपि लेखितुं शक्नुमः ।

© NCERT not to be republished



आकृति 10.13

कतिचन आयतानां मापाः दत्ताः वर्तन्ते । एतान् वर्गाङ्कितकर्गजे स्थापयित्वा तथा वर्गाणां संख्यां गणम्यित्वा गणयित्वा एतेषां क्षेत्रफलं जानन्तु ।

लम्बः	वैशाल्यम्	क्षेत्रफलम्
3 सेमी	2 सेमी	_____
5 सेमी	4 सेमी	_____
6 सेमी	5 सेमी	_____

अनेन वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ?

वयं दृष्टवन्तः यत्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = (लम्बः X वैशाल्यम्)

वर्गाङ्कितकर्गजेन विना किं वयम् आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुमः,यस्य लम्बः 6 सेमी अपि च वैशाल्यं 4 से.मी. अस्ति ?

आम्, अयं सम्भवः अस्ति ।

आयतस्य क्षेत्रफलम्

= लम्बः X वैशाल्यम्

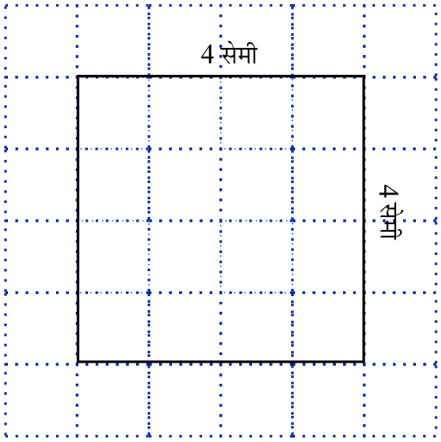
= 6 सेमी X 4 सेमी = 24 वर्गसेमी

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. स्व-कक्ष्यायाः कुट्टिमस्य (फर्श) क्षेत्रफलं जानन्तु
2. स्वगृहस्य कस्यापि एकस्य द्वारस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

10.3.2 वर्गस्य क्षेत्रफलम्

आयान्तु, अधुना वयं वर्गस्य विषये विचारं कुर्मः यस्य भुजस्य लम्बः 4 से.मी. अस्ति (आकृतिः 10.14) ।



आकृति *10.14*

अस्य वर्गस्य क्षेत्रफलं कियद्भवेत् ?

यदि वयं अमुं सेण्टी.मीटर् वर्गाङ्कितकर्गजस्य उपरि स्थापयामः तर्हि वयं किं पश्यामः ?
एषः 16 वर्गान् पूर्णतया आवृणोति।
अतः वर्गस्य क्षेत्रफलं = 16 वर्गसे.मी.
= 4 X 4 वर्गसे.मी .
केषाञ्चन वर्गाणाम् एकस्य भुजस्य लम्बः दत्तः अस्ति।
वर्गाङ्कितकर्गजस्य साहाय्येन तेषां क्षेत्रफलं जानन्तु।

एकस्य भुजस्य लम्बः	वर्गस्य क्षेत्रफलम्
3 सेमी	_____
7 सेमी	_____
5 सेमी	_____

अनेन वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ? वयं दृष्टवन्तः यत् प्रत्येकं स्थितिषु
वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः X भुजः
भवन्तः प्रश्नानां समाधानसमये एकेन सूत्ररूपेण अस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 13 : एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं जानन्तु, यस्य लम्बः 12 सेमी. वैशाल्यं च 4 सेमी. अस्ति।

समाधानम् : आयतस्य लम्बः = 12 सेमी.
आयतस्य वैशाल्यम् = 4 सेमी.
आयतस्य क्षेत्रफलम् = लम्बः x वैशाल्यम्
= 12 सेमी X 4 सेमी. = 48 वर्गसेमी.

उदाहरणम् 14 : एकस्य वर्गाकर-भूखण्डस्य क्षेत्रफलं जानन्तु, यस्य एकः भुजः 8 मी. लम्बायमानः अस्ति।

समाधानम् : वर्गस्य भुजः = 8 मी.
वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः X भुजः
= 8 मी X 8 मी. = 64 वर्गमी.

उदाहरणम् 15 : एकस्य आयताकारगुरुपत्रस्य क्षेत्रफलं 36 वर्गसेमी तथा अस्य लम्बः 9 से.मी. अस्ति। गुरुपत्रस्य वैशाल्यं जानन्तु।

समाधानम् : आयताकारस्य गुरुपत्रस्य क्षेत्रफलं = 36 वर्गसेमी
लम्बः = 9 से.मी.
वैशाल्यं = ?
आयतस्य क्षेत्रफलं = लम्बः X वैशाल्यम्

$$\text{अतः वैशाल्यं} = \frac{\text{क्षेत्रफलम्}}{\text{लम्बः}} = \frac{36}{9} \text{ से.मी.} = 4 \text{ से.मी.}$$

अतः आयताकारस्य गुरुपत्रस्य वैशाल्यं 4 से.मी. अस्ति।

उदाहरणम् 16 : बोबः 3 मी वैशाल्यस्य अपि च 4 मी लम्बस्य एकस्मिन् प्रकोष्ठे वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरं स्थापयितुम् इच्छति। यदि प्रत्येकं वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरस्य भुजः 0.5 मी स्यात् तर्हि प्रकोष्ठस्य कुट्टिमस्य आच्छादनाय कियन्तः स्निग्धप्रस्तराः अपेक्षिताः भवन्ति ?

समाधानम् : प्रकोष्ठे युज्यमानानां सर्वेषां स्निग्धप्रस्तराणां सम्पूर्णं क्षेत्रफलं, कुट्टिमस्य क्षेत्रफलेन समानं भवति।

प्रकोष्ठस्य लम्बः = 4 मी.

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यं = 3 मी.

कुट्टिमस्य क्षेत्रफलं = लम्बः X वैशाल्यम्

= 4 मी. X 3 मी.

= 12 वर्ग-मी.

एकस्य वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरस्य क्षेत्रफलं = लम्बः X लम्बः

= 0.5 मी X 0.5 मी

= 0.25 वर्ग-मी

आवश्यकानां आवश्यकानाम् आहत्य स्निग्धप्रस्तराणां संख्या

$$= \frac{\text{कुट्टिमस्य क्षेत्रफलम्}}{\text{एकस्य स्निग्धप्रस्तरस्य क्षेत्रफलम्}}$$

$$= \frac{12}{0.25} = \frac{1200}{25} = 48 \text{ स्निग्धप्रस्तराः}$$

उदाहरणम् 17 : 1 मी 25 से.मी. वैशाल्यस्य अपि च 2 मी. लम्बस्य वस्त्रस्य क्षेत्रफलं वर्गमीटर्-माने जानन्तु।

समाधानम् : वस्त्रस्य लम्बः = 2 मी.

वस्त्रस्य वैशाल्यम् = 1 मी 25 से.मी. = 1 मी + 0.25 मी. = 1.25 मी.

(यतो हि 25 से.मी. = 0.25 मी.)

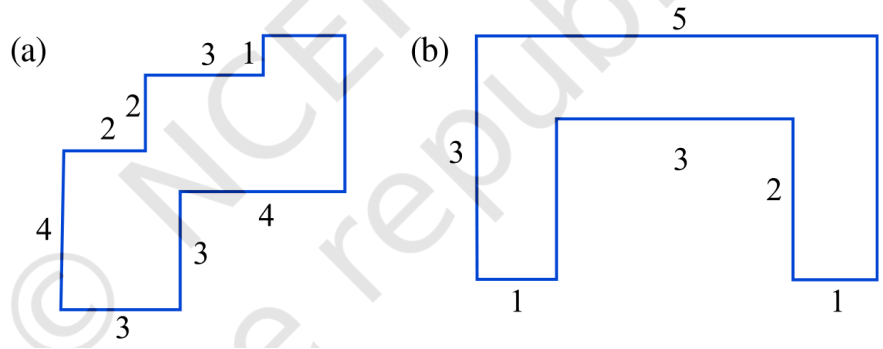
वस्त्रस्य क्षेत्रफलम् = वस्त्रस्य लम्बः X वस्त्रस्य वैशाल्यम्

= 2 मी X 1.25 मी. = 2.50 वर्ग-मी.

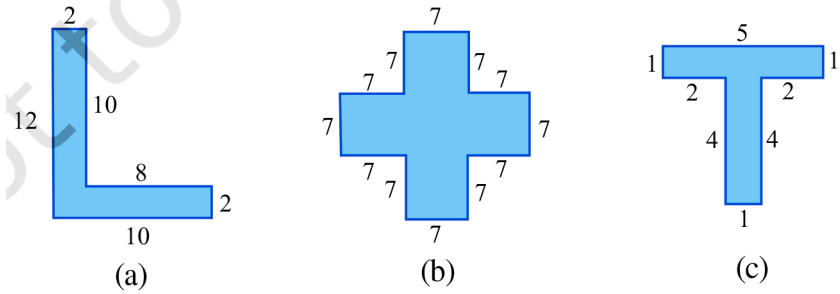
अभ्यासः 10.3

1. तेषाम् आयतानां क्षेत्रफलं जानन्तु येषां भुजानां मापः अधोदत्तः वर्तते।
   (a) 3 सेमी अपि च 4 से.मी. (b) 12 मी अपि च 21 मी.
   (c) 2 किमी अपि च 3 कि.मी. (d) 2 मी अपि च 70 से.मी.
2. तेषां वर्गाणां क्षेत्रफलं जानन्तु येषां भुजाः अधोलिखिताः वर्तन्ते।
   (a) 10 से.मी . (b) 14 सेमी (c) 5 मी
3. त्रयाणाम् आयतानां भुजाः अधोलिखिताः सन्ति।
   (a) 9 मी अपि च 6 मी (b) 3 मी अपि च 17 मी (c) 4 मी अपि च 14 मी
   एतेषु कस्य क्षेत्रफलम् अधिकतमं वर्तते अपि च कस्य न्यूनतमम् अस्ति ?

4. 50 मी. लम्बस्य एकस्य आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलं 300 वर्ग.मीटर् अस्ति। उद्यानस्य वैशाल्यं जानन्तु।
5. 500 मी. लम्बस्य अपि च 200 मी वैशाल्यस्य एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य उपरि, प्रति 100 वर्गमीटर् इत्यस्य कृते 8 रू इति मानेन स्निग्धप्रस्तरं योजयितुं कियान् व्ययः भविष्यति ?
6. एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरितनतलस्य मापः 2 मी 25 सेमी X 1 मी 50 सेमी अस्ति। उत्पीठिकायाः क्षेत्रफलं वर्गमीटर्-मानेन जानन्तु।
7. एकस्य प्रकोष्ठस्य लम्बः 4 मी 25 से.मी. अपि च वैशाल्यं 3 मी 65 सेमी अस्ति। प्रकोष्ठस्य कुट्टिमम् आच्छादयितुं कियद्वर्ग-मीटर् स्थूलकटः अपेक्षितः ?
8. एकस्य कुट्टिमस्य लम्बः 5 मी तथा वैशाल्यं 4 मी अस्ति। 3 मी भुजयुक्तः एकः स्थूलकटः कुट्टिमस्योपरि प्रसारितः वर्तते। कुट्टिमस्य तस्य भागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्योपरि स्थूलकटः प्रसारितः नास्ति।
9. 5 मी लम्बस्य अपि च 4 मी. वैशाल्यस्य एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य उपरि 1 मी भुजयुक्तः वर्गाकारः पुष्पाणां केदारः निर्मितः अस्ति। भूखण्डस्य शिष्टभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।
10. अधोलिखिताकृतीन् आयतेषु त्रोटयन्तु। एतेषां क्षेत्रफलं जानन्तु। (भुजानां मापः सेमी इत्यस्मिन् दत्तः अस्ति।)



11. अधोलिखिताकृतयः आयतेषु त्रोटयन्यु अपि च प्रत्येकं आकृतेः क्षेत्रफलं जानन्तु। (भुजानां मापः सेमी इत्यस्मिन् दत्तः अस्ति।)



12. एकस्य स्निग्धप्रस्तरस्य मापः 5 सेमी X 12 सेमी अस्ति। एकं क्षेत्रं पूर्णतया आच्छादयितुं तादृशानां कतीनां स्निग्धप्रस्तराणाम् आवश्यकता भवति ? यदि तस्य लम्बः अपि च वैशाल्यं क्रमशः–
    (a) 144 सेमी अपि च 100 सेमी अस्ति।
    (b) 70 सेमी अपि च 36 सेमी अस्ति।

एकम् आह्वानम्

1 सेमी वर्गाङ्कितकर्गजस्य उपरि भवद्भिः यावन्तः आयताः निर्मितुं शक्यन्ते तावतः आयतान् निर्मान्तु, यैः आयतस्य क्षेत्रफलं 16 वर्ग-सेमी भवेत्। (केवलं पूर्णसंख्यायाः लम्बस्योपरि एव विचारः कर्तव्यः।)

(a) कस्य आयतस्य क्षेत्रफलम् अधिकतमम् अस्ति ?

(b) कस्य आयतस्य क्षेत्रफलं न्यूनतमम् अस्ति ?

यदि भवन्तः एतादृश-आयतं स्वीकुर्वन्तु यस्य क्षेत्रफलं 24 वर्ग-सेमी भवेत्, तर्हि भवताम् उत्तराणि कानि भविष्यन्ति ?

दत्तक्षेत्रफलस्य कृते, किम् अधिकतमपरिमापस्य आयतस्य आकारं वक्तुं शक्नुमः ? किं न्यूनतम-आकारं वक्तुं शक्नुमः ? उदाहरणं यच्छन्तु अपि च कारणं वदन्तु।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. परिमापः एकं तादृशं दूरम् अस्ति यः रेखाखण्डेन सहैव चलित्वा एकां पिहिताकृतिं परितः पूर्णभ्रमणं करोति।
2. (a) आयतस्य परिमापः = 2 X (लम्बः + वैशाल्यम्)
   (b) वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य लम्बः
   (c) समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य लम्बः
3. एतादृश्यः आकृतयः यासां सर्वाः भुजाः अपि च कोणाः समानाः स्युः ताः पिहित-समाकृतयः इत्युच्यन्ते।
4. पिहिताकृतिभिः आवृततलस्य परिमाणं तासां क्षेत्रफलम् इति कथ्यते।
5. वर्गाङ्कितकर्गजस्य प्रयोगपुरस्सरं कस्याः अपि आकृतेः क्षेत्रफलं ज्ञातुं अधोलिखित –तत्त्वानि आत्मसात्क्रियन्ते
   (a) येषां वर्गाणाम् अर्धादपि न्यूनभागाः आकृत्या आवृताः सन्ति तान् त्यजन्तु।
   (b) यदि वर्गाणाम् अर्धादपि अधिकभागाः आकृत्या आवृताः भवन्ति तान् एकेन पूर्णवर्गरूपेण एव स्वीकुर्वन्तु।
   (c) यदि कस्यापि वर्गस्य अर्धभागः एव आकृत्या आवृतः अस्ति तर्हि तस्य क्षेत्रफलं $\frac{1}{2}$ वर्ग-घटकरूपेण स्वीकुर्वन्तु।
6. (a) आयतस्य क्षेत्रफलम् = लम्बः X वैशाल्यम्
   (b) वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजः X भुजः

बीजगणितम्

अध्यायः 11

11.1 भूमिका

अधुनापर्यन्तम् अस्माकम् अध्ययनं संख्याभिः अपि च आकृतिभिः सह एव आसीत्। अधुनापर्यन्तं वयं संख्याः, तासाम् उपरि सङ्क्रियाः तासां च गुणानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः। वयं दैनिकजीवनस्य अनेकसमस्यानां समाधानार्थं संख्यानाम् उपयोगं कृतवन्तः। गणितस्य सा शाखा, यस्यां वयं संख्यानाम् अध्ययनं कृतवन्तः सा अङ्कगणितम् इत्युच्यते। वयं द्विधाकारयुक्तानां तथा त्रिधाकारयुक्तानाम् आकृतीनां विषये अपि च तासां गुणानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः। यस्यां वयं एतासाम् आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्मः, सा शाखा ज्यामितिः इत्युच्यते। अधुना वयं गणितस्य एकस्याः अन्यशाखायाः अध्ययनं कर्तुं गच्छन्तः स्मः , यत् बीजगणितम् इति कथ्यते।

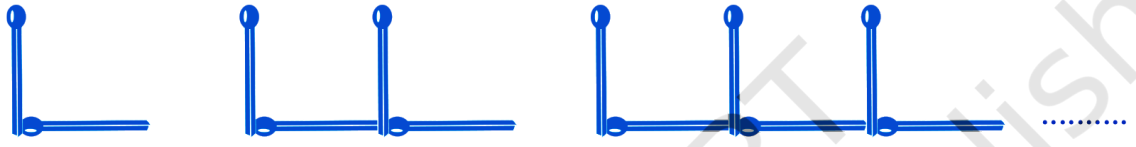
यस्याः शाखायाः अध्ययनं कर्तुं वयम् उत्सुकाः स्मः अस्याः मुख्यः विशेषः अस्ति यत् अस्याम् अक्षराणां प्रयोगः भवति। वयम् अक्षराणां प्रयोगेण व्यापकतया नियमानां तथा सूत्राणां लेखने समर्थाः भविष्यामः। अक्षराणाम् अनेन प्रयोगेण वयं न केवलं एकस्याः विशेषसंख्यायाः विषये वदामः अपि तु सर्वासां संख्यानां विषये वक्तुं शक्नुमः। द्वितीयविचारः अयमस्ति यत् अज्ञातराशीनां विषये अपि अक्षराणां प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः। वयम् एतान् अज्ञातराशीन् निर्धारयितुं विधीन् अधीत्य प्रहेलिकानाम् अपि च दैनिकजीवनेन सम्बन्धितानां अनेकानां समस्यानां समाधानं कर्तुं शक्नुमः। तृतीयविचारः अयमस्ति यत् एतानि अक्षराणि संख्यानां स्थाने प्रयुज्यन्ते, अतः एतेषाम् उपरि संख्याः इव सङ्क्रियाः अपि कर्तुं शक्नुमः। अतः वयं बीजीय-व्यञ्जकानाम् अपि च तेषां गुणानाम् अध्ययने अग्रेसराः भवामः।

भवन्तः बीजगणितं रुचिकरम् एवम् उपयोगि प्राप्स्यन्ति। बीजगणितं समस्यानां समाधानाय अत्युपयोगि भवति। आयान्तु, अस्माकम् अध्ययनं सरलैः उदाहरणैः सह प्रारम्भं कुर्मः।

11.2 अग्निशलाकाभिः निर्मितप्रतिरूपाणि

अमीना अपि च सरिता अग्निशलाकाभिः प्रतिरूपस्य निर्माणं कुरुतः । ते आङ्ग्लवर्णमालायाः अक्षराणां सरलप्रतिरूपाणां निर्माणस्य निर्णयं कृतवत्यौ । अमीना शलाकाद्वयं स्वीकृत्य L इत्यक्षरं निर्माति यथा आकृतिः 11.1 (a) इत्यत्र दर्शितमस्ति । पुनः सरिता अपि शलाकाद्वयं स्वीकरोति अपि च सा एकम् अन्यं L इत्यक्षरं निर्माय अमीनया निर्मितस्य L इत्यस्य अग्रे स्थापयति यथा आकृतिः 11.1 (b) इत्यत्र दर्शितमस्ति ।

पुनः अमीना इतोऽपि एकं L इति निर्माय अग्रे स्थापयति एवम् इयं प्रक्रिया अग्रे सरति यथा आकृतिः 11.1 (c) इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृति 11.1

तदानीं तासां मित्रम् अप्पूः आगच्छति । सः इदं प्रतिरूपं पश्यति । अप्पूः सर्वादा प्रश्नं पृच्छन् एव भवति । सः एते बालिके पृच्छति यत् सप्त L निर्मातुं कतिशलाकानाम् आवश्यकता भवति ? इति । अमीना अपि च सरिता समीचीनतया कार्यं कुरुतः । ते 1 L, 2 L, 3 L इत्यादि-प्रतिरूपाणि निर्माय एकं सारिणीम् निर्मीतः ।

सारिणी 1

निर्मितस्य L इत्यस्य संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-
आवश्यक-शलाकानां संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	-	-

अप्पूः सरिणी 1 इत्यनेन स्वप्रश्नस्य उत्तरं प्राप्यते । 7 L निर्मितुं 14 शलाकानाम् आवश्यकता भविष्यति ।

सारिण्यां लेखनसमये अमीना इदम् अनुभवति यत् आवश्यकशलाकानां संख्या L इत्यस्य संख्यायाः द्विगुणिता अस्ति । अर्थात्

आवश्यकशलाकानां संख्या = 2 X L इत्यस्य संख्या

आयान्तु, सौविद्ध्यर्थं L इत्यस्य संख्यार्थं n इत्यक्षरं लिखामः ।

यदि एकं L निर्मितः भवति तर्हि n = 1 अस्ति ; यदि 2 L निर्मितः भवति चेत् तर्हि n = 2 भवति ; इत्यादिः । अपि च n कापि प्राकृतसङ्ख्या 1, 2, 3, 4, 5, … भवितुं शक्यते । पुनः वयं लिखामः यत्

आवश्यकशलाकानां संख्या = 2 X n अस्ति ।

2 X n लेखनस्थाने वयम् इदं 2n लिखामः। अवधानम् यच्छन्तु 2n तदेव अस्ति यत् 2 X n अस्ति।

अमीना स्वमित्राणां समीपे वदति यत् तस्याः एषः नियमः कियत्सु अपि संख्यासु L निर्मातुम् आवश्यकशलाकानां संख्यां वक्तुं शक्नोति।

अपि च n = 1 इत्यस्य कृते आवश्यकशलाकानां संख्या = 2 X 1 = 2 ;

n = 2 इत्यस्य कृते आवश्यकशलाकानां संख्या = 2 X 2 = 4 ;

n = 3 इत्यस्य कृते आवश्यकशलाकानां संख्या = 2 X 3 = 6 इत्यादिः।

एताः संख्याः सरिणी 1 इत्यस्यां दत्तसंख्याः इव एव अस्ति।

सरिता वदति, " एषः नियमः बहुप्रभावशाली वर्तते ! अस्य नियमस्य उपयोगं कृत्वा 100 L निर्मातुं कति शलाकाः अपेक्षिताः इत्यपि वक्तुं शक्नोमि। एकवारं नियमस्य ज्ञानं भवति चेत् तर्हि मया प्रतिरूपालेखनस्य अथवा सारिण्याः निर्माणस्य कापि आवश्यकता न भवति।"

किं भवन्तः सरितायाः वचनेन सहमताः सन्ति ?

11.3 एकस्य चरस्य अवधारणा

उपरि उक्त-उदाहरणे अस्माभिः L इत्यस्य प्रतिरूपनिर्माणे आवश्यकशलाकानां संख्यां ज्ञातुम् एकः नियमः ज्ञातः आसीत्। नियमः एषः आसीत्

आवश्यकशलाकानां संख्या = 2n

अत्र n, L इत्यस्य प्रतिरूपाणां संख्या अस्ति अपि च n इत्यस्य मानं 1,2,3,4,5,... भवितुं शक्यते। आयान्तु, सारिणी 1 इत्याख्यां पुनः पश्यामः। सरिण्यां n इत्यस्य मानं परिवर्तयन् भवति। अस्य परिणामेन आवश्यकशलाकानां संख्या अपि परिवर्तिता भवति।

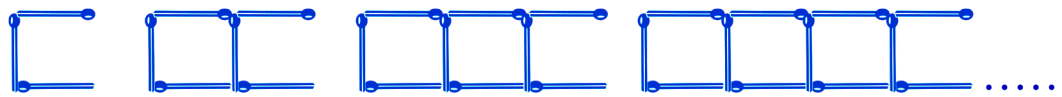
n चरस्य एकम् उदाहरणम् अस्ति। अस्य मानं स्थिरं नास्ति ; एतत् किमपि मानं 1, 2, 3, 4, 5, ... स्वीकर्तुं शक्नोति । अस्माभिः अपेक्षितशलाकानां संख्यायाः कृते चरस्य n इत्यस्य प्रयोगं कृत्वा, नियमः लिखितः।

शब्दस्य ' चरः ' इत्यस्य अर्थः अयमस्ति यत् तद् वस्तु यत् विचरणं करोति, अर्थात् परिवर्तितं भवति। चरस्य मानं स्थिरं नास्ति। एषः विभिन्नमानान् स्वीकर्तुं शक्नोति।

वयं चराणां विषये इतोऽपि अधिकं ज्ञातुं, शलाकाभिः निर्मितप्रतिरूपेषु अन्यतमम् उदाहरणं पश्यामः।

11.4 अग्निशलाकानाम् अन्यप्रतिरूपाणि

अमीना अपि च सरिता अग्निशलाकानाम् एतेषु प्रतिरूपेषु रुचिं प्राप्नुवन्त्यौ स्तः। अधुना ते C इत्यस्य एकं प्रतिरूपं निर्मातुं प्रयत्नं कुरुतः। एकस्य C इत्यस्य निर्माणे ते तिसृणाम् अग्निशलाकानां प्रयोगं कुर्वन्ति, यथा आकृतिः 11.2 (a) इत्यत्र प्रदर्शितम् अस्ति।



(a) (b) (c) (d)

आकृतिः 11.2

सारिणी- 2, C इत्यस्य एकं प्रतिरूपं निर्मातुम् आवश्यकशलाकानां संख्यां प्रददाति।

सारिणी 2

C इत्यस्य संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-	-
आवश्यकशलाकानां संख्या	3	6	9	12	15	18	21	24	-	-	-

किं भवन्तः उपरि उक्तसारिण्यां रिक्तस्थानं पूरयितुं शक्नुवन्ति ?

सरिता अमुं नियमं दत्तवती

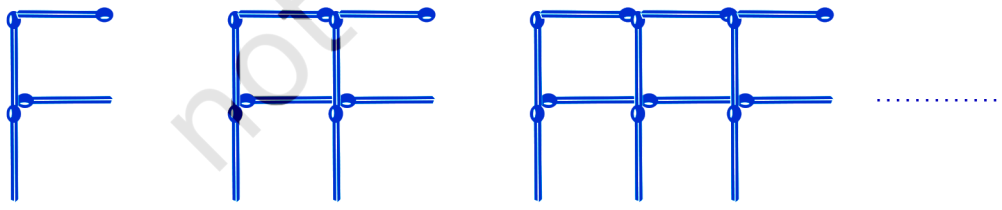
आवश्यकशलाकानां संख्या = 3n

सा C इत्यस्य संख्यायाः कृते n इत्यक्षरस्य प्रयोगं कृतवती ; n इति एकः चरः अस्ति यः मानं 1,2,3,4,... इत्यादिकं स्वीकर्तुं शक्नोति।

किं भवन्तः सरितायाः विचारेण सहमताः सन्ति ?

स्मरन्तु यत् 3n तदेव अस्ति यत् 3 X n अस्ति।

पुनः अधुना अमीना अपि च सरिता F इत्यस्य प्रतिरूपं निर्मातुम् इच्छतः। ते चतसृणां शलाकानां प्रयोगं कृत्वा एकं F निर्मीतः, यथा आकृतिः 11.3 (a) इत्यत्र प्रदर्शितम् अस्ति।



(a) (b) (c)

आकृति 11.3

किं भवन्तः F इत्यस्य प्रतिरूपं निर्मातुम् अधुना कमपि नियमं लेखितुं शक्नुवन्ति ?

शलाकाभिः निर्मीयमाणानां वर्णमालाक्षराणाम् अन्याक्षराणां विषये चिन्तयन्तु।

उदाहरणार्थं, U (⊔), V (⋁),त्रिभुजः (△) ,वर्गः (□) इत्यादि। एतेषु कानिचित्

पञ्चाक्षराणि चिन्वन्तु । अपि च तेषां प्रतिरूपं निर्मातुम् आवश्यकशलाकानां संख्यायाः कृते नियमं लिखन्तु ।

11.5 चराणाम् अन्य-उदाहरणानि

वयं एकं चरं दर्शयितुम् अक्षरस्य n इत्यस्य प्रयोगं कृतवन्तः । राजुः पृच्छति यत्, m किमर्थं न स्वीकुर्मः ? इति । n इत्यस्मिन् कोऽपि विशेषः नास्ति, कस्यापि अक्षरस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ।

एकं चरं दर्शयितुं किमपि अक्षरं m, l, p, x, y, z इत्यादिकं प्रयोक्तुं शक्यते । स्मरन्तु यत् चरः एका सा संख्या अस्ति यस्याः मानं स्थिरं नास्ति । उदाहरणार्थं 5 अथवा 100 अथवा अन्य-दत्तसंख्याः चराः न भवन्ति । एतासां मानं स्थिरं भवति । अनेन प्रकारेण त्रिभुजस्य कोणानां संख्यानां मानं स्थिरम् अस्ति, यत् 3 अस्ति । एषः कश्चन चरः नास्ति । एकस्य चतुर्भुजस्य कोणानां सख्या (4) स्थिरा अस्ति । एतदपि एकः चरः नास्ति । परन्तु उपरि उक्त-उदाहरणेषु n एकः चरः अस्ति । एषः विभिन्नमानं 1, 2, 3, 4, … इत्यादिकं स्वीकर्तुं शक्नोति ।

आयान्तु, अधुना एकस्यां परिचितस्थितौ चराणाम् उपरि विचारं कुर्मः ।

छात्राः अभ्यासपुस्तकानि क्रेतुं विद्यालयस्य पुस्तकापणं गतवन्तः । एकस्य पुस्तकस्य मूल्यं 5 रू. अस्ति । मुन्नूः 5, अप्पूः 7, सारा 4 क्रेतुम् इच्छन्ति । एकस्य छात्रस्य कृते पुस्तकानि क्रेतुं कियान् धनराशिः अपेक्षितः भवति ?

छात्रः कियन्ति पुस्तकानि क्रीणाति इत्यस्योपरि धनराशेः निर्धारणं भविष्यति । छात्राः मिलित्वा एकां सारिणीं निर्मान्ति ।

सारिणी – 3

वाञ्छितपुस्तकानां संख्या	1	2	3	4	5	--	m	--
आहस्य मूल्यम् (रू इत्यस्मिन्)	5	10	15	20	25	--	5m	--

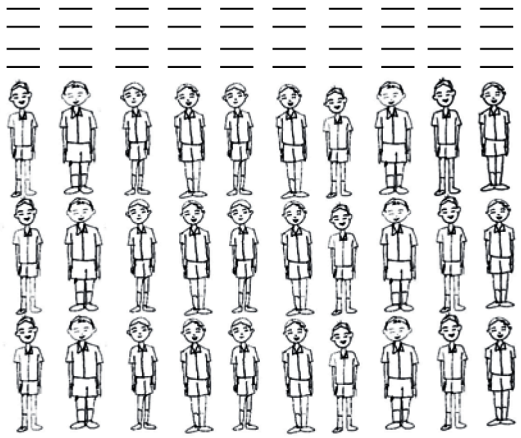
m, अभ्यासपुस्तकानां तासां संख्यानां कृते प्रयुक्तम् अस्ति यावत् एकः छात्रः क्रेतुम् इच्छति । अत्र m एकः चरः अस्ति, यः किमपि मानं 1, 2, 3, 4, … स्वीकर्तुं शक्नोति । m अभ्यासपुस्तकानाम् आहत्य मूल्यं अधोलिखितनियमद्वारा दीयते ।

आहत्य मूल्यम् (रूप्यकेषु) = 5 X वाञ्छिताभ्यासपुस्तकानां संख्या

= 5m

यदि मुन्नूः 5 अभ्यासपुस्तकानि क्रेतुम् इच्छति, तर्हि m = 5 स्वीकृत्य वयं वदामः यत् मुन्नू-द्वारा 5 X 5 रू., अर्थात् 25 रू. नेतव्यं भवति ।

आयान्तु, एकम् अन्यम् उदाहरणं स्वीकुर्मः । कस्मिंश्चित् विद्यालये छात्राः गणराज्योत्सवस्य आचरणदिने मुख्य-अतिथेः सम्मुखे सामूहिक-अभ्यासं प्रदर्शयितुं गच्छन्तः सन्ति । ते अनेन प्रकारेण तिष्ठन्ति यथा एकस्यां पङ्क्तौ 10 छात्राः स्युः (आकृतिः 11.4)। अस्याम् अभ्यासप्रदर्शिन्यां कति छात्राः भागं स्वीकर्तुं शक्नुवन्ति ?



आकृति 11.4

छात्राणां संख्या छात्राणां संख्यानामुपरि निर्धारणं भवति । यदि 1 पङ्क्तिः अस्ति तर्हि छात्राणां संख्या 10 भविष्यति । यदि 2 पङ्क्ती स्यातां तर्हि छात्राणां संख्या 2 X 10 = 20 भविष्यति । यदि r पङ्क्तयः भवेयुः तर्हि संख्या 10r भविष्यति । अत्र r एकः चरः अस्ति यः पङ्क्तीनां संख्यां प्रदर्शयति एवम् अस्य मानं 1, 2, 3, 4, … इत्यादिकं भवितुं शक्नोति ।

अधुनापर्यन्तं वयं यावन्ति उदाहरणानि दृष्टवन्तः तेषु एकः चरः एकया संख्यया सह गुणितः वर्तते । परन्तु, विभिन्नाः स्थितयः एवमपि भवितुं शक्नुवन्ति यथा योजनम् अपि च व्यवकलनम् अपि कर्तव्यम् आपद्येत यथा अधः प्रदर्शितम् अस्ति ।

सरिता कथयति यत् तस्याः काचमणीनां सङ्ग्रहे अमीनायाः काचमणीनां सङ्ग्रहापेक्षया 10 अधिकमणयः सन्ति । यदि अमीनायाः पार्श्वे 20 मणयः सन्ति तर्हि सरितायाः पार्श्वे 30 मणयः भविष्यन्ति । यदि अमीनायाः पार्श्वे 30 काचमणयः भवन्ति तर्हि सरितायाः पार्श्वे 40 मणयः भविष्यन्ति । वयं न जानीमः यत् अमीनायाः समीपे कति काचमणयः सन्ति इति । तस्याः पार्श्वे मणीनां संख्या कापि भवितुं शक्नोति । परन्तु वयं जानीमः यत् सरितायाः मणीनां संख्या = अमीनायाः मणीनां संख्या + 10 अस्ति।

वयम् अमीनायाः समीपे विद्यमानकाचमणीनां संख्यां x इत्यनेन प्रदर्शयामः । अत्र x एकः चरः अस्ति, यः मानं 1, 2, 3, 4,….., 10, …, 20, … 30,… स्वीकर्तुं शक्नोति । x इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तः वयं लेखितुं शक्नुमः यत् सरितायाः मणीनां संख्या = x + 10 अस्ति । व्यञ्जकं (x + 10) इत्याख्यं x योगः 10 इति पठामः । अस्य अर्थः अयम् अस्ति यत् x इत्यस्य मानं 20 अस्ति चेत् तर्हि (x + 10) इत्यस्य मानं 30 भविष्यति । यदि x इत्यस्य मानं 30 स्यात् तर्हि (x + 10) इत्यस्य मानं 40 भविष्यति ।

व्यञ्जकं (x + 10) इत्याख्यम् इतोऽपि सरलं कर्तुं न शक्यते । x + 10 इत्याख्यं 10x इति न मन्तव्यम् । द्वयमपि भिन्नमस्ति । 10x इत्यस्मिन् 10 इत्याख्यं x इत्यनेन गुणनं कुर्मः किन्तु (x + 10) इत्यस्मिन् x इत्यस्मिन् 10 इत्यस्य योजनं कुर्मः । वयं x इत्यस्य कानिचन मानानि स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुमः । उदाहरणार्थम्,

यदि x = 2, तर्हि 10x = 10 x 2 = 20 अस्ति अपि च x + 10 = 2 + 10 = 12 अस्ति ।

यदि x = 10, तर्हि 10x = 10 x 10 =100 अस्ति अपि च x + 10 = 10 + 10 = 20 अस्ति ।

राजूः अपि च बालूः भ्रातरौ स्तः। बालूः राज्वः अपेक्षया वर्षत्रयं कनिष्ठः अस्ति। यदि राजूः 15 वर्षीयः अस्ति तर्हि बालूः 12 वर्षीयः अस्ति। वयं राज्वः वर्तमान-आयुः न जानीमः। अस्य मानं किमपि भवितुं शक्यते। भावयन्तु, x राज्वः आयुः वर्षेषु व्यक्तीकरोति। x एकः चरः अस्ति। यदि राज्वः आयुः वर्षेषु x अस्ति तर्हि बाल्वः आयुः वर्षेषु (x – 3) भवति। व्यञ्जकं (x – 3) इत्याख्यं x उपचयः (minus) 3 इति पठामः। यदि x इत्यस्य मानं 12 अस्ति तर्हि (x – 3) इत्यस्य मानं 9 अस्ति, अपि च यदि x इत्यस्य मानं 15 अस्ति, तर्हि (x – 3) इत्यस्य मानं 12 अस्ति।

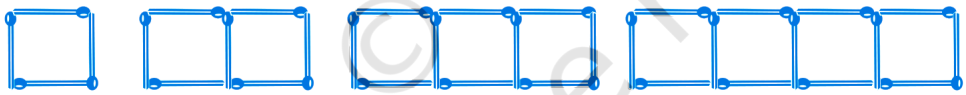
अभ्यासः 11.1

1. शलाकानां प्रतिरूपं निर्मातुम् आवश्यकशलाकानां संख्यायाः कृते नियमं जानन्तु। नियमं लेखितुं एकस्य चरस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।
   (a) अक्षरस्य T इत्यस्य T प्रतिरूपम्
   (b) अक्षरस्य Z इत्यस्य Z प्रतिरूपम्
   (c) अक्षरस्य U इत्यस्य U प्रतिरूपम्
   (d) अक्षरस्य V इत्यस्य V प्रतिरूपम्
   (e) अक्षरस्य E इत्यस्य E प्रतिरूपम्
   (f) अक्षरस्य S इत्यस्य S प्रपिरूपम्
   (g) अक्षरस्य A इत्यस्य A प्रतिरूपम्
2. वयं अक्षराणां L, C, F इत्येतेषां प्रतिरूपाणां नियमं पूर्वतः एव जानीमः। उपरि 1 इत्यस्मिन् प्रश्ने दत्तैः कैश्चित् अक्षरैः सः एव नियमः प्राप्तः भवति यः L इत्यनेन प्राप्तः आसीत्। एतानि अक्षराणि कानि सन्ति ? इत्थं किमर्थं भवति ?
3. कस्मिंश्चित् प्रचरणे छात्राः प्रचरणं कुर्वन्तः सन्ति। एकस्यां पङ्क्तौ 5 छात्राः सन्ति। यदि पङ्क्तीनां संख्या ज्ञाता स्यात् तर्हि छात्राणां संख्यां ज्ञातुं कः नियमः प्रयुज्यते ? (पङ्क्तीनां संख्यायाः कृते n इति चरस्य उपयोगं कुर्वन्तु।)
4. एकस्यां पेटिकायां 50 आम्राणि सन्ति। भवन्तः पेटिकानां संख्यानां पदेषु आम्राणाम् आहत्य संख्यां केन प्रकारेण लेखिष्यन्ति ? (पेटिकानां संख्यायाः कृते b इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।)
5. अध्यापकः प्रत्येकं छात्राय 5 अङ्कनीः ददाति। छात्राणां संख्याज्ञानानन्तरं, किं भवन्तः आहस्य अङ्कनीनां संख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति ? (छात्राणां संख्यायाः कृते s इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।)
6. एकः चटकः 1 निमेषे 1 किलोमीटर् उड्डयति। किं भवन्तः चटकेन परिक्रमितदूरं तस्य उड्डयनसमयस्य पदेषु व्यक्तीकर्तुं शक्नुवन्ति ? (निमेषेषु उड्डयनसमयस्य कृते t इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तु।)
7. राधा बिन्दुभिः एकां रङ्गवल्लीं निर्माति (शिलाचूर्णस्य साहाय्येन बिन्दून् संयुज्य रेखानां एकं सुन्दरं प्रतिरूपनिर्माणं, यथा आकृतिः 11.5 इत्यत्र अस्ति)। तस्याः समीपे एकस्यां पङ्क्तौ 8 बिन्दवः सन्ति। r पङ्क्तीनां रङ्गवल्ल्यां कति बिन्दवः भवन्ति ? यदि 8 पङ्क्तयः भवेयुः तर्हि कति

बिन्दवः भविष्यन्ति ? यदि 10 पङ्क्तयः भवेयुः तर्हि कति बिन्दवः भविष्यन्ति ?

आकृति 11.5

8. लीला राधायाः अनुजा अस्ति । लीला राधापेक्षया 4 वर्षेण कनिष्ठा अस्ति । किं भवन्तः लीलायाः आयुः राधायाः आयुषः पदेषु लेखितुं शक्नुवन्ति ? (राधायाः आयुः x वर्षः अस्ति)
9. माता लड्डुकं निर्मितवती । सा कतिचन लड्डुकानि अतिथीभ्यः अपि च परिवारस्य सदस्येभ्यः दत्तवती । तथापि 5 लड्डुकानि शिष्टानि अभवन् । यदि माता 1 लड्डुकानि दत्तवती स्यात् तर्हि सा आहस्य कति लड्डुकानि निर्मितवती आसीत् ?
10. बृहत्पेटिकाभ्यः लघुपेटिकासु नारङ्गफलानि स्थापनीयानि सन्ति । यदा एकां बृहत्पेटिकां रिक्तां कुर्मः तदा तद्गतेभ्यः नारङ्गेभ्यः लघुपेटिकाद्वयं पूरितं भवति अपि च तथापि 10 नारङ्गफलानि शिष्टानि भवन्ति । यदि एकस्यां लघुपेटिकायां विद्यमान-नारङ्गानां संख्यां x इति स्वीकुर्मः तर्हि बृहत्पेटिकायाः नारङ्गानां संख्या का अस्ति ?
11. (a) शलाकाभिः निर्मितवर्गाणाम् अधोलिखितप्रतिरूपाणि पश्यन्तु (आकृतिः 11.6)। एते वर्गाः पृथक् पृथक् न सन्ति । द्वयोः संलग्नवर्गयोः मध्ये एका शलाका उभयनिष्ठा अस्ति । इदं प्रतिरूपं पश्यन्तु अपि च तं नियमं जानन्तु यत् यः वर्गाणां संख्यायाः पदेषु आवश्यकशलाकानां संख्यां ददाति । (सङ्केतः – यदि भवन्तः अन्तिम-ऊर्ध्वाधरशलाकाः निष्कासयिष्यन्ति तर्हि भवद्भिः C इत्यस्य प्रतिरूपं प्राप्यते ।)



(a) (b) (c) (d)

आकृतिः 11.6

(b) आकृतिः 11.7 शलाकाभिः निर्मितत्रिभुजानाम् एकं प्रतिरूपं दर्शयति । उपरि उक्तप्रश्नः 11 (a) इतिवत् तं व्यापकनियमं जानन्तु यः त्रिभुजानां संख्ययाः पदेषु आवश्यकशलाकानां संख्यां ददाति ।

(a) (b) (c) (d) .....

आकृतिः 11.6

11.6 समान्यनियमेषु चराणां प्रयोगः

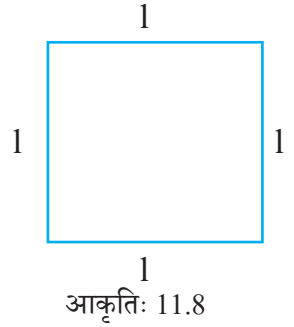
आयान्तु, अधुना पश्यामः यत् गणितस्य काञ्चन सामान्यनियमान्, यान् वयं पूर्वमेव पठितवन्तः, केन

प्रकारेण चराणां प्रयोगं कुर्वन्तः एव व्यक्तीकुर्मः इति।

ज्यामित्या नियमः

वयं क्षेत्रमित्याः अध्याये, वर्गस्य एवम् आयतस्य परिमापविषये पूर्वमेव अध्ययनं कृतवन्तः। अधुना वयं तान् एकेन नियमरूपेण लेखनार्थं भवतः सर्वान् पुनर्नयामः।

1. **वर्गस्य परिमापः** वयं जानीमः यत् एकस्य बहुभुजस्य परिमापः तस्य भुजानां योगः भवति। वर्गे चत्वारः भुजाः भवन्ति। अपि च प्रत्येकं भुजस्य लम्बः समानः भवति। (आकृतिः 11.8)



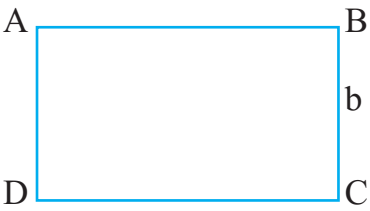
आकृतिः 11.8

अतः वर्गस्य परिमापः = वर्गस्य भुजानां लम्बानां योगः

$= l + l + l + l = 4 \times l = 4l$

अनेन प्रकारेण वयं वर्गस्य परिमापस्य एकं नियमं प्राप्नुमः। चरस्य l इत्यस्य प्रयोगः अस्मान् एकं तादृशं नियमं लेखितुं समर्थान् करोति, यः संक्षिप्तः अस्ति अपि च यं सरलतया स्मर्तुं शक्नुमः।

2. **आयतस्य परिमापः** वयं जानीमः यत् एकस्य आयतस्य चत्वारः भुजाः भवन्ति। उदाहरणार्थम्, आयतस्य ABCD इत्यस्य चत्वारः भुजाः AB, BC, CD, DA सन्ति (आकृतिः 11.9)। एकस्य आयतस्य सम्मुखभुजौ सर्वदा समानौ भवतः। अतः आयान्तु ABCD इत्यायतस्य भुजयोः AB अपि च CD इत्यनयोः लम्बं l इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः अपि च भुजयोः AD अपि च BC इत्यनयोः लम्बं b इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः।



आकृतिः 11.9

अतः आयतस्य परिमापः = AB इत्यस्य लम्बः + BC इत्यस्य लम्बः + CD इत्यस्य लम्बः + DA इत्यस्य लम्बः

$= l + b + l + b$

$= (l + l) + (b + b)$

$= 2l + 2b$

अतः नियमः अयमस्ति

आयतस्य परिमापः $= 2l + 2b$

यत्र l अपि च b क्रमशः आयतस्य लम्बः अपि च वैशाल्यम् अस्ति।

अस्य चर्चां कुर्वन्तु यत् $l = b$ इति भवेत् तर्हि किं स्यात् ?

यदि वयं आयतस्य परिमापं चरेण p इत्यनेन व्यक्तीकुर्मः, तर्हि आयतस्य परिमापस्य अधोलिखितः नियमः भविष्यति।

$$\mathbf{p = 2l + 2b}$$

टिप्पणी – अत्र 1 अपि च b द्वौ अपि चरौ स्तः । एतौ परस्परं स्वतन्त्रं मानं स्वीकुरुतः । अर्थात् एकेन चरेण स्वीकृतस्य मानस्य उपरि अपरेण चरेण स्वीकृतं मानं निर्भरं न भवति ।

ज्यामित्याः स्व-अध्ययने भवतां सम्मुखे अनेकनियमाः अपि च सूत्राणि आगमिष्यन्ति यानि च समतलीय-आकृतीनां परिमापैः अपि च क्षेत्रफलैः तथा च त्रिधाकारयुक्त-आकृतीनां पृष्ठीय-क्षेत्रफलैः एवम् आयतनैः सम्बन्धितानि भविष्यन्ति । सहैव भवन्तः एकस्य बहुभुजस्य अन्तःकोणानां योगस्य, एकस्य बहुभुजस्य विकर्णानां संख्यायाः च सूत्राणि प्राप्नुवन्ति । चराणाम् अवधारणा भवतां कृते एतादृशानां सर्वेषां व्यापकनियमानाम् अपि च सूत्राणां लेखने अत्युपयोगिनी भविष्यति ।

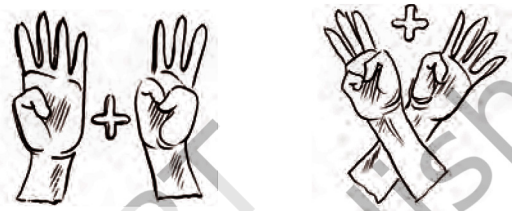
अङ्कगणितस्य नियमः

3. द्वयोः संख्ययोः योगस्य क्रमविनिमयता

वयं जानीमः यत्

$4 + 3 = 7$ अपि च $3 + 4 = 7$

अर्थात् $4 + 3 = 3 + 4$



यथा वयं पूर्णसंख्यानाम् अध्याये दृष्टवन्तः, कयोरपि द्वयोः पूर्णसंख्ययोः कृते एतत् सत्यम् अस्ति।संख्यानाम्एषःनियमः**संख्यानांयोगस्य क्रमविनिमयता** इत्युच्यते । 'क्रमविनिमय'स्य अर्थः अस्ति 'क्रमपरिवर्तनम्' । योगे संख्यानां क्रमपरिवर्तनेन तेषां योगे उत योगफले परिवर्तनं न भवति । चराणां प्रयोगः, अस्मान् अस्य गुणस्य व्यापकताम् एकस्मिन् संक्षिप्तरूपे व्यक्तीकर्तुं समर्थान् करोति । भावयन्तु यत् a अपि च b द्वौ चरौ स्तः यौ कस्याः अपि संख्यायाः मानं स्वीकर्तुं शक्नुतः ।

तदा, $a + b = b + a$ भवति ।

एकवारं यदि वयं नियमम् अस्मिन् रूपे लिखामः तर्हि अस्मिन् सर्वाः अपि विशिष्टस्थितयः सम्मिलिताः भविष्यन्ति । यदि $a = 4$ अपि च $b = 3$ अस्ति, तर्हि अस्माभिः $4 + 3 = 3 + 4$ इति प्राप्यते । यदि $a = 37$ अपि च $b = 73$ अस्ति, तर्हि अस्माभिः $37 + 73 = 73 + 37$ इति प्राप्यते ।

4. द्वयोः संख्ययोः गुणनस्य क्रमविनिमेयता

वयं पूर्णसंख्यानाम् अध्याये अधीतवन्तः यत् द्वयोः संख्ययोः गुणन-अवसरे संख्ययोः स्थानपरिवर्तनेन गुणनफले परिवर्तनं न भवति । उदाहरणार्थम्,

$4 \times 3 = 12$ अस्ति अपि च $3 \times 4 = 12$ अस्ति ।

अतः, $4 \times 3 = 3 \times 4$ अस्ति ।

संख्यानां एषः गुणः संख्यानां गुणनस्य क्रमविनिमयता इत्युच्यते । गुणने संख्ययोः क्रमपरिवर्तनेन गुणनफले कोऽपि प्रभावः अथवा किमपि परिवर्तनं न भवति । योगस्य इव चरयोः a अपि च b इत्यनयोः प्रयोगं कृत्वा वयं द्वयोः संख्ययोः गुणनस्य क्रमविनिमेयतां

$$a \times b = b \times a$$

इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः । अवधानं यच्छन्तु यत् अत्र a अपि च b किमपि मानं स्वीकर्तुं शक्नुतः । अनेन व्यापकनियमेन सर्वाः विशिष्टाः स्थितयः यथा $4 \times 3 = 3 \times 4$ अथवा $37 \times 73 = 73 \times 37$ इत्यदिकं प्राप्यते ।

5. संख्यानां वितरणता

भावयन्तु अस्माकं कृते 7×8 इत्यस्य परिकलनं कर्तुं वदन्ति । स्पष्टतया अस्माभिः 38 इत्यस्य गुणनसारिणी अज्ञाता अस्ति । अतः वयम् अधोलिखितप्रकारेण परिकलनं कुर्मः ।

$$\begin{aligned} 7 \times 38 &= 7 \times (30 + 8) \\ &= 7 \times 30 + 7 \times 8 \\ &= 210 + 56 \\ &= 266 \end{aligned}$$

7. 30 अपि च 8 इत्यादिसंख्याः सर्वासां तिसृणां संख्यानां कृते सत्यम् अस्ति । एषः गुणः **संख्यानां योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणता** इत्युच्यते ।

चराणां प्रयोगं कृत्वा वयं संख्यानाम् अमुं गुणम् अपि एकेन व्यापकरूपेण अपि च संक्षिप्तरूपेण लेखितुं शक्नुमः । भावयन्तु a, b अपि च c चराः सन्ति एवम् एतेषु प्रत्येकं चरः किमपि मानं स्वीकर्तुं शक्नोति । तदा,

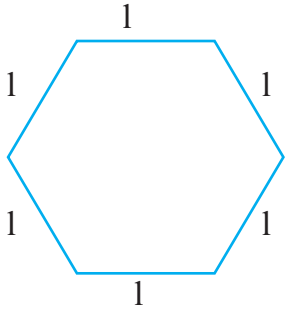
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ भवति ।

संख्यानां गुणाः अत्याकर्षकाः भवन्ति । अस्मिन् वर्षे भवन्तः एतेषु केषाञ्चन गुणानां विषये पठन्ति अपि च काञ्चन अन्यगुणानां विषये अग्रे स्व-गणिताध्ययनेन सह पठिष्यन्ति । एतान् गुणान् एकेन व्यापकरूपेण अपि च संक्षिप्तरूपेण व्यक्तीकर्तुं चराणां प्रयोगः अस्माकं कृते अतीव सहाय्यतां करोति । संख्यानाम् एकः अन्यगुणः अभ्यासः 11.2 इत्यस्य पञ्चमे प्रश्ने दत्तः । संख्यानाम् एतादृशानेव काञ्चन गुणान् जानन्तु अपि च तान् चराणां प्रयोगं कुर्वन्तः व्यापकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

अभ्यासः 11.2

1. एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य भुजाः 1 इत्यनेन दर्शिताः भवन्ति । अस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापं 1 इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तः व्यक्तीकुर्वन्तु ।

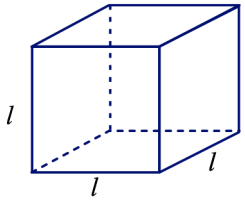
2. एकस्य समषड्भुजस्य एकः भुजः 1 इत्यनेन व्यक्तीकृतः (आकृतिः



आकृतिः 11.10

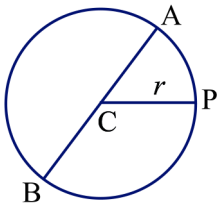
11.10) । 1 इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तः अस्य षड्भुजस्य परिमापं व्यक्तीकुर्वन्तु । (एकस्य षड्भुजस्य सर्वे 6 भुजाः समानाः भवन्ति अपि च सर्वे कोणाः अपि समानाः भवन्ति ।)

3. घनः एका त्रिधाकारयुक्त-आकृतिः भवति यथा आकृतिः 11.11 इत्यत्र प्रदर्शितमस्ति । अस्य 6 फलकानि भवन्ति एवम् एते सर्वे सर्वसमवर्गाः भवन्ति । घनस्य एकस्य प्रान्तभागस्य लम्बः 1 इत्यनेन दर्शितः भवति । घनस्य प्रान्तभागानां आहत्य लम्बं ज्ञातुम् एकं सूत्रं निर्मान्तु ।



आकृति 11.11

4. वृत्तस्य एकः व्यासः सः रेखाखण्डः अस्ति यः वृत्तस्य उपरि स्थितबिन्दुद्वयं योजयति अपि च वृत्तस्य केन्द्रबिन्दुं स्पृष्ट्वा एव चलति । संलग्नाकृतिः 11.12 इत्यत्र AB वृत्तस्य व्यासः अस्ति C तस्य केन्द्रम् अस्ति । वृत्तस्य व्यासं (d) तस्य त्रिज्यायाः पदेषु व्यक्तीकुर्वन्तु ।



आकृति 11.12

5. 14, 27 अपि च 13 एतासां तिसृणां संख्यानां योगस्य उपरि विचारं कुर्वन्तु । वयम् अमुं योगं द्विधा कर्तुं शक्नुमः ।

(a) वयं प्रथमं तावत् 14 अपि च 27 इत्यनयोः योगेन 41 इति प्राप्य पुनः 41 अपि च 13 इत्यनयोः योगेन 54 प्राप्तुं शक्नुमः । अथवा

(b) वयं पूर्वं 27 अपि च 13 इत्यनयोः योगेन 40 इति प्राप्य पुनं तस्मिन् 14 संयोज्य 54 इति प्राप्तुं शक्नुमः । अनेन प्रकारेण (14 + 27) + 13 = 14 + (27 + 13) अभवत् ।

एवमेव कासाञ्चन तिसृणां संख्यानां कृते कर्तुं शक्यते । एषः गुणः संख्यानां योगस्य साहचर्यगुणः इत्युच्यते । अमुं गुणं यं वयं पूर्णसंख्यासम्बद्धे अध्याये पठितवन्तः, चराणां a, b, c इत्येतेषां प्रयोगं कुर्वन्तः एकेन व्यापकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

11.7 चरयुक्तः व्यञ्जकः

स्मरन्तु यत् अङ्कगणिते अस्माभिः 2 X 10 + 3, 3 X 100 + 2 X 10 + 4 इत्यादिव्यञ्जकाः प्राप्ताः आसन् । एते व्यञ्जकाः 2, 3, 4, 10, 100 इत्यादिभिः संख्याभिः भवन्ति । एतादृशव्यञ्जकान् रचयितुं चतसृणां योगः , व्यवकलनं, गुणनं , विभजनम् इति सङ्क्रियानां प्रयोगं कर्तुं शक्यते । उदाहरणार्थं, 2 X 10 + 3 प्राप्तुं वयं 2 अपि च 10 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा तस्य गुणनफलेन 3 इत्याख्यं योजितवन्तः । अन्य-अङ्कगणितीय-व्यञ्जकानाम् उदाहरणानि अधोलिखितानि सन्ति ।

3 + (4 X 5), (- 3 X 4) + 5,
8 – (7 X 2), 14 – (5 – 2),
(6 X 2) – 5, (5 X 7) – (3 X 4),
7 + (8 X 2), (5 X 7) – (3 X 4 – 7), इत्यादि ।

व्यञ्जकान् चराणां प्रयोगं कृत्वा अपि प्राप्तुं शक्यते । वस्तुतः, वयं चरयुक्त-व्यञ्जकान् पूर्वमेव दृष्टवन्तः । उदाहरणार्थं, 2n, 5m, x + 10, x – 3 इत्यादि । चरयुक्ताः एते व्यञ्जकाः चराणाम्

उपरि योगस्य, व्यवकलनस्य, गुणनस्य विभजनस्य च सङ्क्रियाणाम् अनन्तरम् एव प्राप्यन्ते। उदाहरणार्थं, व्यञ्जकः 2n इत्याख्यं, n इत्याख्यं 2 इत्यनेन गुणनं कृत्वा प्राप्यते। चरे x इत्यस्मिन् 10 संयोजनेन व्यञ्जकस्य (x + 10) इत्यस्य प्राप्तिः भवति इत्यादि।

वयं जानीमः यत् चरः विभिन्नमानं स्वीकुर्तुं शक्नोति अस्य किमपि निश्चितं मानं न भवति। परन्तु एते चराः संख्याः सन्ति। अनेन कारणेन संख्यानाम् इव एतेषां चराणाम् उपरि अपि योगं,व्यवकलनं, गुणनम् एवम् विभाजनं कर्तुं शक्यते ।

चरयुक्तव्यञ्जकानां सम्बन्धे कश्चन महत्त्वपूर्णविषयः अस्ति। एकः संख्यात्मकः व्यञ्जकः यथा 4 X 3 + 5 इत्यस्य मानं सरलतया निष्कासयितुं शक्यते। उदाहरणार्थं ,

4 X 3 + 5 = 12 + 5 = 17

परन्तु (4x + 5) इत्यादि-व्यञ्जकस्य, यस्मिन् x इति एकः चरः अस्ति, माननिष्कासनं सम्भवं नास्ति। उदाहरणार्थं, यदि x = 3 अस्ति, तर्हि

4x + 5 = 4 X 3 + 5 = 17 अस्ति, यः उपरि पूर्वमपि प्राप्तः आसीत्।

अधः आगमिष्यमाणासु कासुचित् पङ्क्तिषु वयं द्रक्ष्यामः यत् केचित् व्यञ्जकाः कथं निर्मिताः भवन्ति इति।

व्यञ्जकाः	**कथं निर्मिताः सन्ति**
y + 5	y अपि च 5 इत्यनयोः योजनेन
t – 7	t इत्यस्मात् 7 इत्यस्य व्यवकलनेन
10a	a अपि च 10 इत्यनयोः गुणनेन
x/3	x इत्याख्यं 3 इत्यनेन विभजनेन
- 5q	q अपि च – 5 इत्यनयोः गुणनेन
3x+2	पूर्वं x अपि च 3 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा प्राप्तगुणनफले 2 इत्यस्य योजनम्
2y-5	पूर्वं y अपि च 2 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा प्राप्तगुणनफलेन 5 इत्यस्य व्यवकलनम्

एवमेव दश अन्य-सरल-व्यञ्जकान् लिखन्तु अपि च वदन्तु यत् ते केन प्रकारेण निर्मिताः सन्ति।

अस्माभिः कमपि व्यञ्जकं तादृश्यां स्थितौ अपि निर्मातुं समर्थैः भवितव्यं यदि एषः निर्देशः दत्तः स्यात् यत् व्यञ्जकः केन प्रकारेण निर्मितः स्यात्।

अधोलिखितानां कृते व्यञ्जकं यच्छन्तु।

(a) z इत्यस्मात् 12 इत्यस्य व्यवकलनम् — z – 12

(b) r अपि च 25 इत्यनयोः योजनम् — r + 25

(c) p अपि च 16 इत्यनयोः गुणनम् — 16p

(d) y इत्याख्यं 8 इत्यनेन विभजनम् — $\frac{y}{8}$

(e) m अपि च – 9 इत्यनयोः गुणनम् — - 9m

(f) y अपि च 10 इत्यनयोः गुणनम् तथा

गुणनफले 7 इत्यस्य योजनम् $10y + 7$

(g) n अपि च 2 इत्यनयोः गुणनम् अपि च पुनः

गुणनफलात् 1 इत्यस्य व्यवकलनम् $2n - 1$

सरिता अपि च अमीना व्यञ्जकानाम् काञ्चित् क्रीडां क्रीडितुं निर्णयं कृतवत्यौ । ते एकं चरं x इति एवम् एकां संख्यां 3 इति स्वीकृतवत्यौ अपि च कतिचन व्यञ्जकान् निर्मातुं शक्यते इति दृष्टवत्यौ । एतस्मिन् प्रतिबन्धः एषः अस्ति यत् ते चतसृणां संख्यासङ्क्रियाणां मध्ये एकस्याः सङ्क्रियायाः एव प्रयोगं कर्तुं शक्नुतः अपि च प्रत्येकं व्यञ्जके x अवश्यं भवेत् । किं भवन्तः एतयोः कृते साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

किं (3x + 5) निर्मातुं शक्यते ?
किं (3x + 3) निर्मातुं शक्यते ?

सरिता (x + 3) इत्याख्यं चिन्तयति ।
पुनः अमीना (x - 3) इति निर्माति ।

तदग्रे सा 3x वदति । तदा सरिता झटिति $\frac{x}{3}$ इति वदति । दत्त प्रतिबन्धान्तर्गतत्वेन किं एते चत्वारः व्यञ्जकाः एव निर्मिताः भवन्ति ?

अधुना एतदग्रे ते y, 3 अपि च 5 इत्येतेषां साहाय्येन व्यञ्जकं निर्मातुं प्रयत्नं कुरुतः । प्रतिबन्धः एषः अस्ति यत् ते योग-व्यवकलनयोः मध्ये एकां तथा च गुणनभाजनयोः मध्ये एकां च सङ्क्रियां चेतुं शक्नुतः । प्रत्येकं व्यञ्जके y भवेद् एव । परीक्षणं कुर्वन्तु यत् तयोः उत्तराणि यानि अधोलिखितानि सन्ति तानि समीचीनानि सन्ति ?

किं ($\frac{y}{3}$ + 5) निर्मातुं शक्यते ?
किं (y + 8) निर्मातुं शक्यते ?
किं 15y निर्मातुं शक्यते ?

$y + 5$, $y + 3$, $y - 5$, $y - 3$,

$3y$, $5y$, $\frac{y}{3}$, $\frac{y}{5}$, $3y + 5$, $3y - 5$, $5y + 3$, $5y - 3$

किं भवन्तः काञ्चन अन्यव्यञ्जकान् निर्मातुं शक्नुवन्ति ?

अभ्यासः 11.3

1. भवन्तः 5, 7 अपि च 8 इत्येताः संख्याः स्वीकृत्य संख्यायुक्तान् यावतः व्यञ्जनान् निर्मातुं शक्नुवन्ति तावतः निर्मान्तु । एकस्याः संख्यायाः प्रयोगः एकवारमेव भवितुं शक्यते । केवलं योगस्य, व्यवकलनस्य अपि च गुणनस्य एव प्रयोगः भवितुम् अर्हति ।

(सङ्केतः- त्रयः सम्भावित-व्यञ्जकाः $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$ अपि च $5 \times 8 + 7$ सन्ति । अन्यव्यञ्जकान् निर्मान्तु ।)

2. अधोलिखितेषु के के व्यञ्जकाः केवलं संख्यायुक्ताः व्यञ्जकाः सन्ति ?

(a) $y + 3$ (b) $7 \times 20 - 8z$

(c) $5 (21 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5

(e) $3x$ (f) $5 - 5n$

(g) $7 \times 20 - 5 \times 10 - 45 + p$

3. अधोलिखितव्यञ्जकानां निर्माणे प्रयुक्तसङ्क्रियाः (योगः, व्यवकलनम्, गुणनम्, विभजनम्)

जानन्तु अपि च वदन्तु यत् एते व्यञ्जकाः केन प्रकारेण निर्मिताः सन्ति ?

(a) $z + 1, z - 1, y + 17, y - 17,$ (b) $17y, \frac{y}{17}, 5z,$

(c) $2y + 17, 2y - 17,$ (d) $7m, -7m + 3, -7m - 3$

4. अधोलिखितानां स्थितीनां कृते व्यञ्जकान् लिखन्तु।

(a) p अपि च 7 इत्यनयोः योगः (b) p इत्यस्मात् 7 इत्यस्य व्यवकलनम्

(c) p अपि च 7 इत्यनयोः गुणनम् (d) p इत्याख्यं 7 इत्यस्मात् विभजनम्

(e) – m इत्यस्मिन् 7 इत्यस्य व्यवकलनम् (f) – p अपि च 5 इत्यनयोः गुणनम्

(g) – p इत्याख्यं 5 इत्यस्मात् विभाजनम् (h) p अपि च - 5 इत्यनयोः गुणनम्

5. अधोलिखितानां स्थितीतां कृते व्यञ्जकं यच्छन्तु।

(a) 2m अपि च 11 इत्यनयोः योगः (b) 2m इत्यस्मात् 11 इत्यस्य व्यवकलनम्

(c) y इत्याख्यं 5 इति संख्यया गुणनं कृत्वा 3 इत्यस्य योगः

(d) y इत्याख्यं 5 इति संख्यया गुणनं कृत्वा तस्मात् 3 इत्यस्य व्यवकलनम्

(e) y अपि च – 8 इत्यनयोः गुणनम्

(f) y अपि च – 8 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा परिणामेन सह 5 इत्यस्य योगः

(g) y अपि च 5 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा परिणामं 16 इत्यस्मात् व्यवकलनम्

(h) y अपि च – 5 इत्यनयोः गुणनं कृत्वा परिणामेन सह 16 इत्यस्य योगः

6. (a) t अपि च 4 इत्यनयोः प्रयोगपुरस्सरं व्यञ्जकं निर्मान्तु। एकस्याः अधिक-संख्या-सङ्क्रियायाः प्रयोगः न कर्तव्यः। प्रत्येकं व्यञ्जके t अवश्यं भवेत्।

(b) y, 2, अपि च 7 एतेषां प्रयोगं कृत्वा व्यञ्जकं निर्मान्तु। प्रत्येकं व्यञ्जके y अवश्यं भवेत्। केवलं द्वयोः संख्यासङ्क्रिययोः प्रयोगं कर्तुं शक्यते। किन्तु ते समाने न स्याताम्।

11.8 व्यावहारिकरूपेण व्यञ्जकानां प्रयोगः

अस्माकं पुरतः काश्चन व्यावहरिकपरिष्ठितयः आगताः सन्ति यत्र व्यञ्जकाः उपयोगिनः भवन्ति। आयान्तु, काश्चन स्मर्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

परिष्ठितयः	चरः	व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्वन्तः कथनम्
1. सरितायाः पार्श्वे अमीनायाः अपेक्षया 10 काचमणयः अधिकाः सन्ति।	भावयन्तु यत् अमीनायः पार्श्वे x काचमणयः सन्ति।	सरितायाः पार्श्वे (x + 10) काचमणयः सन्ति।
2. बालूः राज्वः अपेक्षया 3 वर्षैः कनिष्ठः अस्ति।	भावयन्तु यत् राज्वः आयुः x वर्षः अस्ति।	बाल्वः आयुः (x – 3) वर्षः अस्ति।
3. विकासस्य आयुः राज्वः आयुषः द्विगुणितम् अस्ति।	भावयन्तु यत् राज्वः आयुः x वर्षः अस्ति।	विकासस्य आयुः 2x वर्षः अस्ति।
4. राज्वः पितुः आयुः राज्वः आयुषः त्रिगुणितस्य अपि 2 वर्षः अधिकः अस्ति।	भावयन्तु यत् राज्वः आयुः x वर्षः अस्ति।	राज्वः पितुः आयुः (3x + 2) वर्षः अस्ति।

आयान्तु, एतादृशाः एव अन्य-परिष्ठितयः पश्यामः

परिस्थितयः	चरः	व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्वन्तः कथनम्
5. अद्यारभ्य 5 वर्षानन्तरं सुसानस्य आयुः कियद् भविष्यति ?	भावयन्तु सुसानस्य वर्तमानायुः y वर्षः अस्ति।	अद्यारभ्य 5 वर्षानन्तरं सुसानस्य आयुः (y + 5) भविष्यति।
6. 4 वर्षेभ्यः पूर्वं सुसानस्य आयुः कियद् आसीत् ?	भावयन्तु सुसानस्य वर्तमानायुः y वर्षः अस्ति।	4 वर्षेभ्यः पूर्वं सुसानस्य आयुः (y - 4) आसीत्।
7. गोधूमस्य प्रति कि.ग्रा. मूल्यं तण्डुलस्य प्रति कि.ग्रा. मूल्यस्यापेक्षया 5 रू. न्यूनम् अस्ति।	भावयन्तु तण्डुलस्य प्रति कि.ग्रा. मूल्यं p रू. अस्ति।	गोधूमस्य प्रति कि.ग्रा. मूल्यं (p – 5) अस्ति।
8. प्रति लीटर् तैलस्य मूल्यं प्रति कि.ग्रा. तण्डुलस्य मूल्यात् 5 गुणितम् अस्ति।	भावयन्तु तण्डुलस्य प्रति किग्रा मूल्यं p रू. अस्ति।	प्रति लीटर् तैलस्य मूल्यं 5p रू अस्ति।
9. एकस्य लोकयानस्य वेगः तस्मिन्नेव मार्गे गच्छतः ट्रक्-यानस्य वेगतः 10 कि.मी./ घण्टा अधिकः अस्ति।	भावयन्तु यत् ट्रक्-यानस्य वेगः y कि.मी./ घण्टा अस्ति।	लोकयानस्य वेगः (y + 10) किमी/ घण्टा अस्ति।

एतादृशीः काश्चन अन्यपरिस्थितीः ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु। भवन्तः इदम् अनुभवन्ति यत् साधारणभाषायाम् एतादृशानि अनेकानि कथनानि वर्तन्ते, यानि भवन्तः चरयुक्तव्यञ्जकानां प्रयोगसहितकथनेषु परिवर्तयितुं शक्नुवन्ति। अग्रिम-अनुच्छेदे वयं पश्यामः यत् केन प्रकारेण वयम् एतैः व्यञ्जकैः निर्मितकथनानि स्व-कार्ये प्रयोगं कुर्मः।

अभ्यासः 11.4

1. अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) सरितायाः वर्तमान-आयुः y इति स्वीकुर्वन्तु।

(i) अद्यारभ्य 5 वर्षानन्तरं तस्याः आयुः कियद् भवति ?

(ii) 3 वर्षेभ्यः पूर्वं तस्याः आयुः कियद् आसीत् ?

(iii) सरितायाः पितामहस्य आयुः तस्याः आयुषः षड्गुणितम् अस्ति। तस्याः पितामहस्य आयुः कियद् अस्ति ?

(iv) तस्याः पितामही पितामहात् 2 वर्षाभ्यां कनिष्ठा अस्ति। पितामह्याः आयुः कियद् अस्ति ?

(v) सरितायाः पितुः आयुः सरितायाः आयुषः त्रिगुणितात् 3 वर्षैः अधिकम् अस्ति। तस्याः पितुः आयुः कियद् अस्ति ?

(b) एकस्य आयताकारस्य प्रकोष्ठस्य लम्बः तस्य वैशाल्यस्य त्रिगुणितात् 4 मीटर् न्यूनः अस्ति। यदि वैशाल्यं b मीटर् अस्ति तर्हि लम्बः कियान् भवति ?

(c) एकस्य आयताकार-पेटिकायाः औन्नत्यं h सेमी अस्ति। अस्याः लम्बः औन्नत्यस्य पञ्चगुणितम् अस्ति अपि च वैशाल्यम् लम्बात् 10 सेमी न्यूनम् अस्ति। पेटिकायाः लम्बं तथा च वैशाल्यं औन्नत्यस्य पदेषु व्यक्तीकुर्वन्तु।

(d) मीना, बीना अपि च लीना पर्वतस्य शिखरस्य उपरि गन्तुं सोपानानि आरोहन्त्यः सन्ति। मीना s इति सोपाने अस्ति। बीना मीनातः 8 सोपानैः अग्रे अस्ति अपि च लीना मीनातः 7 सोपानैः पृष्ठे अस्ति। बीना अपि

च लीना कुत्र स्तः ? पर्वतम् आरोढुम् आहस्य सोपानानि मीनया आरूढानाम् आहत्य सोपानानां चतुर्गुणितात् 10 न्यूनानि सन्ति । सोपानानाम् आहत्य संख्यां s इत्यस्य पदेषु व्यक्तीकुर्वन्तु ।

(e) एकं लोकयानम् v किमी प्रतिघण्टा इति वेगेन चलति । एतत् दासपुरतः बीसपुरं गच्छन् अस्ति । यानेन 5 घण्टात्मकं यावत् कालं चलनानन्तरम् अपि बीसपुरं 20 किमी दूरे अस्ति । दासपुरतः बीसपुरं कियति दूरे अस्ति ?

2. व्यञ्जकानां प्रयोगेण रचिताधोलिखित-कथनं साधारणकथनेषु परिवर्तयन्तु ।

(उदाहरणार्थम्, एकस्मिन् क्रिकेट्-प्रतिद्वन्द्वे सलीमः r धावनाङ्कम् आकलितवान् तथा च नलिनः (r + 15) धावनाङ्कम् आकलितवान् । साधारणकथने नलिनः सलीमात् 15 धावनाङ्कम् अधिकतया आकलितवान् ।

(a) एकस्य अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यं p रू अस्ति । एकस्य पुस्तकस्य मूल्यं 3p रू. अस्ति ।

(b) टोनी उत्पीठिकायाः उपरि q काचमणीन् स्थापितवती । तस्याः समीपे 8q काचमणयः अस्ति ।

(c) अस्माकं कक्ष्यायां n छात्राः सन्ति । विद्यालये 20n छात्राः सन्ति ।

(d) जगदीशस्य आयुः z वर्षः अस्ति । तस्य पितृव्यस्य आयुः 4z वर्षः अस्ति अपि च तस्य पितृव्यायाः आयुः (4z – 3) अस्ति ।

(e) बिन्दूनाम् एकस्यां व्यवस्थायां r पङ्क्तयः सन्ति । प्रत्येकं पङ्क्तौ 5 बिन्दवः सन्ति ।

3. (a) मुन्नूः x वर्षीयः इति दत्तः अस्ति । किं भवन्तः अनुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् (x – 2) किं दर्शयति ?

(सङ्केतः- मुन्नू-इत्यस्य अनुजस्य आयुषः विषये चिन्तयन्तु)। किं भवन्तः अनुमातुं शक्नुवन्ति यत् (x + 4) किं दर्शयति अपि च (3x + 7) किं दर्शयति ?

(b) सारायाः वर्तमान-आयुः y वर्षः इति दत्तः अस्ति । तस्याः भविष्यस्य आयुषः अपि च पूर्वतनायुषः विषये चिन्तयन्तु । अधोलिखितः व्यञ्जकः किं सूचयति ?

$y + 7, y - 3, y + 4\frac{1}{2}, y - 2\frac{1}{2}$

(c) दत्तः अस्ति यत् कक्ष्यायाः n छात्राः पादकन्दुक-क्रीडाम् इच्छन्ति । 2n किं दर्शयति ? $\frac{n}{2}$ किं दर्शयितुं शक्नोति ? (सङ्केतः - पादकन्दुकं विना अन्यक्रीडायाः विषये चिन्तयन्तु)।

11.9 एकं समीकरणं किम् अस्ति ?

आयान्तु, आकृतिः 11.1 इत्यत्र शलाकाभिः निर्मिताक्षरस्य L इत्यस्य प्रतिरूपं स्मरन्तु । स्व-सौविध्यर्थं, अस्माभिः अत्र 11.1 इति आकृतिं पुनः निर्मितवन्तः ।

विभिन्नसंख्यासु L निर्मातुम् आवश्यकशलाकानां संख्या सरिणी-1 इत्यत्र दत्ता आसीत् । वयम् इयं सारिणीं पुनः स्मारयामः ।

सारिणी-1

निर्मितस्य L इत्यस्य संख्या	1 2 3	4 5 6 7 8 -
आवश्यक-शलाकानां संख्या	2 4 6	8 10 12 14 16 -

वयं जानीमः यत् आवश्यकशलाकानां संख्या अधोलिखितनियमेन दत्ता भवति।

2n, यदि n निर्मितस्य L इत्यस्य संख्या अस्ति।

अप्पूः सर्वदा पृथक् चिन्तनं करोति। सः पृच्छति, वयं जानीमः यत् L इत्यस्य संख्या यदि दत्ता भवति तर्हि आवश्यकशलाकानां संख्यां केन प्रकारेण ज्ञातुं शक्नुमः। अस्य विपरीतप्रक्रियायाः विषये किं वक्तुं शक्यते ? अग्निशलाकानां संख्या यदि दत्ता भवति चेत् L इत्यस्य संख्यां कथं ज्ञातुं शक्नुमः ?

वयं स्वात्मानमेव एकं निश्चितं प्रश्नं पृच्छामः ।

यदि 10 अग्निशलाकाः दत्ताः भवन्ति तर्हि कतिसंख्याकस्य L इत्यस्य निर्माणं भविष्यति ?

अस्यार्थः अस्ति यत् वयं L इत्यस्य संख्यां (अर्थात् n) ज्ञातुम् इच्छामः, यदि शलाकानां संख्या 2n = 10 (1) दत्ता अस्ति।

अत्र वयम् एकं प्रतिबन्धं प्राप्नुमः, यः चरेण n इत्यनेन सन्तुष्टः भवेत्। एषः प्रतिबन्धः एकस्य समीकरणस्य प्रतिबन्धः अस्ति।

अस्माकं प्रश्नस्य उत्तरं सरिणी-1 इत्याख्यां दृष्ट्वा प्राप्तुं शक्यते। n इत्यस्य विभिन्नमानान् पश्यन्तु। यदि n = 1 अस्ति तर्हि शलाकानां संख्या 2 अस्ति। स्पष्टतया प्रतिबन्धः सन्तुष्टः न अभवत् यतः संख्या 2 संख्या 10 नास्ति। वयं परीक्षणं कर्तुं शक्नुमः।

n	2n	किं प्रतिबन्धः सन्तुष्टः अस्ति ? आम् / न
2	4	न
3	6	न
4	8	न
5	10	आम्
6	12	न
7	14	न

वयं प्राप्नुमः यत् केवलं n = 5 इत्येतदर्थम् उपरि उक्तप्रतिबन्धः सन्तुष्टः भवति। 5 इत्यनेन अतिरिक्तस्य n इत्यस्य यस्य कस्यापि अन्यमानस्य कृते एतत् समीकरणं सन्तुष्टं न भवति।

आयान्तु, एकम् अन्यसमीकरणं पश्यन्तु।

बालूः राज्वः अपेक्षया 3 वर्षैः कनिष्ठः अस्ति। राज्वः आयुः x वर्षः इति स्वीकारेण बालूः (x – 3) वर्षीयः भविष्यति। भावयन्तु यत् बालूः 11 वर्षीयः अस्ति। तदा, आयान्तु द्रक्ष्यामः यत् अस्माकं विधिः केन प्रकारेण राज्वः आयुषं ज्ञातुं साहाय्यमाचरति इति ।

अस्माभिः बाल्वः आयुः, x – 3 = 12 इति (2)

प्राप्तम् अस्ति।

एषः चरः x इत्यस्मिन् एकं समीकरणम् अस्ति। वयं x इत्यस्य विभिन्नमानानां कृते, (x – 3) इत्यस्य

मानानाम् एकां सारिणीं निर्मामः ।

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x -3	0	1	-	-	-	-	-	-	-	9	10	11	12	13	-	-

यानि कोष्ठकानि रिक्तानि सन्ति तानि पूरयन्तु । सारिणीद्वारा वयं जानीमः यत् केवलं $x = 14$ इत्यस्य कृते प्रतिबन्धः $x - 3 = 11$ सन्तुष्टः भवति । अन्यमानानि यथा $x = 16$ अथवा $x = 12$ इत्यनयोः कृते प्रतिबन्धः सन्तुष्टः न भवति । अतः राजूः 14 वर्षीयः अस्ति ।

उपरि उक्तस्य सारः अयमस्ति यत् **एकं समीकरणं चरस्य उपरि एकः प्रतिबन्धः भवति । एषः चरस्य एकस्य निश्चितमानस्य कृते एव सन्तुष्टः भवति** । उदाहरणार्थं, समीकरणं $2n = 10$ इत्याख्यं चरस्य n इत्यस्य केवलं 5 इति मानेन एव सन्तुष्टं भवति ।

ध्यानं ददतु यत् एकस्य समीकरणस्य द्वयोः अपि पक्षयोः मध्ये **समत-चिह्नं** (=) भवति । समीकरणं वदति यत् वामपक्षः दक्षपक्षेन समानः अस्ति । यदि दक्षपक्षः वामपक्षेण समानः न भवति तर्हि अस्माभिः समीकरणं न प्राप्यते ।

उदाहरणार्थं, कथनं $2n$ संख्यया 10 इत्यनया बृहदस्ति , अर्थात् $2n > 10$ इत्येतद् एकं समीकरणं नास्ति । सहैव कथने $(x - 3) > 11$ अपि च $(x - 3) < 11$ द्वे अपि समीकरणे न स्तः ।

आयान्तु, अधुना $8 - 3 = 5$ इत्यस्य उपरि चिचारं कुर्वन्तु ।

अत्रापि वामपक्ष-दक्षपक्षयोः मध्ये समता-चिह्नं (=) अस्ति । द्वयोः पक्षयोः चरः नास्ति किन्तु संख्या अस्ति । वयम् इदं संख्यात्मक-समीकरणम् इति वक्तुं शक्नुमः । सामान्यतः एकः चरः अथवा अधिकाः चराः यदि भवन्ति तर्हि एव समीकरणम् इति शब्दस्य प्रयोगः क्रियते ।

आयान्तु, एकस्य प्रश्नस्य समाधानं कुर्मः ।

वदन्तु, अधोलिखितकथनेषु कतमानि कथनानि समीकरणानि सन्ति ? समीकरणस्य स्थितौ समबद्धचरमपि वदन्ति ।

(a) $x + 20 = 70$ (आम्, x)

(b) $8 \times 3 = 24$ (न, एतद् एकं संख्यात्मकं समीकरणम् अस्ति)

(c) $2p > 30$ (न)

(d) $n - 4 = 100$ (आम्, n)

(e) $20b = 80$ (आम्, b)

(f) $\frac{y}{8} < 50$ (न)

समीकरणानां कानिचन उदाहरणानि अधः दत्तानि सन्ति । (केषुचित् समीकरणेषु समबद्धः चरः अपि दत्तः अस्ति ।)

वाञ्छितानि रिक्तस्थानानि पूरयन्तु ।

$x + 10 = 30$ (चरः x) (3)

$p - 3 = 7$ (चरः p) (4)

$3n = 21$ (चरः _) (5)

$\frac{t}{5} = 4$ (चरः _) (6)

$2l + 3 = 7$ (चरः _) (7)

$2m - 3 = 5$ (चरः _) (8)

11.10 एकस्य समीकरणस्य समाधानम्

वयं पूर्वस्मिन् अनुच्छेदे दृष्टवन्तः यत् समीकरणम्

$2n = 10$ (1)

$n = 5$ इत्यनेन सन्तुष्टमासीत्। n इत्यस्य किमपि अन्यमानम् इदं समीकरणं न तुष्टयति। **समीकरणे चरस्य तत् मानं यत् समीकरणं तुष्टयति, तत् मानं समीकरणस्य एकं समाधानम् इत्युच्यते**। अनेन प्रकारेण $n = 5$ इत्येतत् समीकरणस्य $2n = 10$ इत्यस्य एकं समाधानम् अस्ति।

अवधानेन पश्यन्तु यत् $n = 6$ इत्याख्यं समीकरणस्य $2n = 10$ इत्यस्य समाधानम् नास्ति यतः $n = 6$ इत्येतदर्थं, $2n = 2 \times 6 = 12$ अस्ति अपि च एतत् 10 नास्ति।

सहैव, $n = 4$ इत्यपि समाधानं नास्ति। वदन्तु, किमर्थं नास्ति।

आयान्तु, समीकरणम्

$x - 3 = 11$ (2)

इत्येतत् स्वीकुर्मः। एतत् समीकरणं $x = 14$ इत्यनेन सन्तुष्टं भवति, यतः $x = 14$ इत्यस्य कृते, समीकरणस्य वामपक्षः $= 14 - 3 = 11$ = दक्षपक्षः अस्ति। एतत् समीकरणं $x = 16$ इत्यनेन सन्तुष्टं न भवति, यतः $x = 16$ इत्यस्य कृते समीकरणस्य वामपक्षः $= 16 - 3 = 13$ अस्ति, यत् दक्षपक्षेण समानः नास्ति।

अनेन प्रकारेण, $x = 14$ समीकरणस्य $x - 3 = 11$ इत्यस्य समाधानम् अस्ति, परन्तु $x = 16$ अस्य समीकरणस्य समाधानं नास्ति। सहैव, $x = 12$ इत्यपि अस्य समीकरणस्य समाधानं नास्ति।

स्पष्टीकुर्वन्तु किमर्थं नास्ति। अधुना अधोलिखितसारिण्याः रिक्तकोष्ठकानि पूरयन्तु अपि च स्पष्टीकुर्वन्तु यत् भवन्तः उत्तरम् आम् अथवा न इति किमर्थम् उक्तवन्तः इति

	समीकरणम्	चरस्य नाम	समाधानम् (आम् / न)
1.	$x + 10 = 30$	$x = 10$	न
2.	$x + 10 = 30$	$x = 30$	न
3.	$x + 10 = 30$	$x = 20$	आम्
4.	$p - 3 = 7$	$p = 5$	न
5.	$p - 3 = 7$	$p = 15$	--
6.	$p - 3 = 7$	$p = 10$	--
7.	$3n = 21$	$n = 9$	--
8.	$3n = 21$	$n = 7$	--
9.	$\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	--

10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	--
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	--
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	--
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	--

समीकरणस्य $2n = 10$ इत्यस्य समाधानं कर्तुं वयं n इत्यस्य विभिन्नमानस्य एकां सारिणीं निर्मितवन्तः आस्म अपि च पुनः अनया सरिण्या n इत्यस्य तत् मानं स्वीकृतवन्तः यत् समीकरणस्य समाधानम् असीत्। वयं यं कृतवन्तः सः एकः **प्रयत्न-त्रुटि-सिद्धान्तः** आसीत्। समाधानं ज्ञातुम् एषः **प्रत्यक्षः अथवा व्यावहारिकः सिद्धान्तः** नास्ति। अधुना वयं समीकरणस्य समाधानार्थम् एकं सरलं विधिं स्वायत्तीकुर्मः। वयं तु अग्रिमवर्षे एव समीकरणस्य समाधानार्थं क्रमबद्धविधीन् पठिष्यामः।

बीजगणितस्य प्रारम्भः

इदं कथनं प्रसिद्धम् अस्ति यत् गणितस्य एकस्याः शाखायाः रूपेण बीजगणितस्य प्रारम्भः प्रायः क्रिस्तोः पूर्वं 1550 तमे वर्षे एव अर्थात् अद्यारभ्य 3500 वर्षेभ्यः पूर्वम् अभूत् यदा ईजिप्ट्-वासिनः अज्ञातसंख्याः व्यक्तीकर्तुं सङ्केतानां प्रयोगं कर्तुं प्रारम्भं कृतवन्तः आसन्।

क्रिस्तोः पूर्वं 300 तमे वर्षे भारते अज्ञातसंख्याः अक्षरेषु व्यक्तीकरणम् अपि च व्यञ्जकानां निर्माणं सामान्यविषयः आसीत्। अनेके महान्तः भारतीयगणितज्ञाः यथा आर्यभट्टः(जन्म-क्रि.श. 476), ब्रह्मगुप्तः (जन्म – क्रि.श. 598) , महावीरः (जन्म – क्रि.श. 850), भास्करः II (जन्म - 1114) इत्यादयः बीजगणितस्य अध्ययने बहु-योगदानं दत्तवन्तः। ते अज्ञातसंख्यानां कृते बीजः, वर्णः इत्यादीनि नामानि दत्तवन्तः अपि च तान् व्यक्तीकर्तुं वर्णानां नाम्नः प्रथमाक्षरस्य प्रयोगं कृतवन्तः (यथा कृष्णवर्णेन 'क' इति नीलवर्णेन 'नी' इति)।'अल्जीब्रा' (Algebra) इत्येतदर्थं भारतीयनाम बीजगणितम् इति एतेषां प्राचीनभारतीय-गणितज्ञानां कालादेव अस्ति।

'अल्जीब्रा' (Algebra) इति शब्दः प्रायः क्रि.श. 825 तमे वर्षे बाग्दाद्-नगरस्य एकः अरबगणितज्ञः इबन्-अल्-कोवारिज्मी-इत्याख्येन लिखितस्य " अलजिबार्-वाल्-अलमुगाबालाह् " इत्यस्य पुस्तकस्य शीर्षकेन स्वीकृतः वर्तते।

अभ्यासः 11.5

1. वदन्तु यत् अधोलिखितेषु कतमानि कथनानि समीकरणानि सन्ति ? सकारणम् उत्तरं ददतु। समीकरणेषु समबद्धचरमपि लिखन्तु।

(a) $17 = x + 17$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 + 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$ (o) $7 - x = 5$

2. सारिण्याः तृतीयस्तम्भस्थानि रिक्तस्थानानि पूरयन्तु।

क्रम सं.	समीकरण	चर का मान	समीकरण संतुष्ट : हाँ/नहीं
(a)	$10y = 80$	$y =$	10
(b)	$10y = 80$	$y =$	8
(c)	$10y = 80$	$y =$	5
(d)	$4l = 20$	$l =$	20
(e)	$4l = 20$	$l =$	80
(f)	$4l = 20$	$l =$	5
(g)	$b + 5 = 9$	$b =$	5
(h)	$b + 5 = 9$	$b =$	9
(i)	$b + 5 = 9$	$b =$	4
(j)	$h - 8 = 5$	$h =$	8
(k)	$h - 8 = 5$	$h =$	0
(l)	$h - 8 = 5$	$h =$	3
(m)	$p + 3 = 1$	$p =$	3
(n)	$p + 3 = 1$	$p =$	1
(o)	$p + 3 = 1$	$p =$	0
(p)	$p + 3 = 1$	$p =$	-1
(q)	$p + 3 = 1$	$p =$	-2

3. प्रत्येकं समीकरणस्य सम्मुखप्रकोष्ठेषु दत्तमानेषु समीकरणस्य समाधानं चिन्वन्तु । दर्शयन्तु यत् अन्यमानं समीकरणं न सन्तुष्टयति।

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, -5)

(d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)

(e) $r - 4 = 0$ (4, -4, 8, 0)

(f) $x + 4 = 2$ (-2, 0, 2, 4)

4. (a) अधोदत्तसारिणीं पूरयन्तु अपि च इदं समीकरणं दृष्ट्वा एव समीकरणस्य $m + 10 = 16$ इत्यस्य समाधानं जानन्तु।

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-	-	-
m + 10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(b) अधोदत्तसारिणीं पूरयन्तु एवम् इमां सारिणीं दृष्ट्वा समीकरणं $5t = 35$ इत्यस्य समाधानं जानन्तु।

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	-	-	-	-	-
5t	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(c) सारिणीं पूरयन्तु अपि च समीकरणं $\frac{z}{3} = 4$ इत्यस्य समाधानं जानन्तु।

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	-	-	-
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(d) सारिणीं पूरयन्तु अपि च समीकरणं $m - 7 = 3$ इत्यस्य समाधानं जानन्तु।

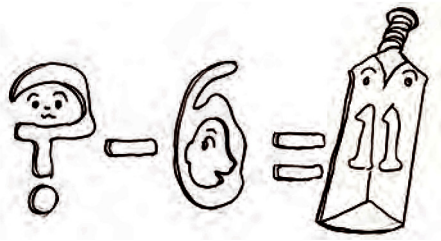
m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	-	-
m - 7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5. अधोलिखितानां प्रहेलिकानां समाधानं कुर्वन्तु। भवन्तः एतादृश्यः प्रहेलिकाः स्वयमपि कर्तुं शक्नुवन्ति।

(i) एकस्य वर्गस्य अनिदिशि गच्छन्तु।
प्रत्येकं कोणं त्रिवारं गणयित्वा मयि
योजयित्वा चतुस्त्रिंशत् प्राप्नुवन्तु।

(iii) सप्ताहस्य प्रत्येकं दिनस्य कृते
मत् उपरि गणयन्तु।
यदि भवन्तः कमपि दोषं न कुर्वन्ति
तर्हि भवन्तः त्रयोविंशतिं प्राप्नुवन्ति।

(ii) अहम् एका विशिष्टा संख्या अस्मि।
मत् षड् निष्कासयन्तु अपि च
क्रिकेट्-प्रतिद्वन्द्वस्य एकं समूहं निर्मान्तु।



(iv) वदन्तु, अहं का अस्मि ?
अहम् एकं सन्दरं सङ्केतं ददामि।
भवन्तः मां पुनः प्राप्स्यन्ति, यदि यदि मां
द्वाविंशतौ निष्कासयन्ति।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. वयं शलाकानां प्रयोगं कृत्वा अक्षराणां तथा च अन्याकाराणां निर्माणार्थं प्रतिरूपं दृष्टवन्तः । वयं कमपि आकारम् इच्छितसंख्यायां निर्मातुं आवश्यक-शलाकानां संख्यार्थं व्यापकनियमं लेखितुं ज्ञातवन्तः । सः आकारः यया निर्मितः भवति, कतिवारं निर्मितः भवति सा संख्या परिवर्तयन्ती भवति । अस्याः मानं 1, 2, 3, … भवितुं शक्यते । एषः एकः चरः अस्ति यः केनापि अक्षरेण यथा n इत्यनेन व्यक्तीक्रियते ।

2. एकः चरः विभिन्नमानं स्वीकरोति । अस्य मानं स्थिरं न भवति । एकस्य वर्गस्य लम्बस्य मानं किमपि भवितुं शक्नोति । एषः एकः चरः अस्ति । परन्तु कस्यापि त्रिभुजस्य कोणानां संख्या 3 इति निश्चिता अस्ति । एषः एकः चरः नास्ति ।

3. वयम् एकं चरं दर्शयितुं n, l, m, p, x, y, z इत्यादिकस्य कस्यापि अक्षरस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ।

4. व्यावहारिकस्थितिषु वयं चराणां साहाय्येन विभिन्नसम्बन्धान् व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः ।

5. चराः संख्याः एव भवन्ति, यद्यपि एतेषां मानं निश्चितं तथा च स्थिरं नास्ति । वयं संख्यानाम् इव एतेषाम् उपरि योगं, व्यवकलनं, गुणनं तथा विभाजनं कर्तुं शक्नुमः । विभिन्नसङ्क्रियाणां प्रयोगं कृत्वा वयं चरयुक्तान् व्यञ्जकान् यथा $x - 3$, $x + 3$, $2n$, $5m$, $\frac{p}{3}$, $2y + 3$, $3l - 5$ इत्यादीन् कर्तुं शक्नुमः ।

6. चरः अस्मान्, ज्यामितेः अपि च अङ्कगणितस्य सामान्यनियमान् व्यापकरूपेण व्यक्तीकर्तुं समर्थान् करोति । उदाहरणार्थं, केनापि क्रमेण द्वयोः संख्ययोः योजनं कुर्मः चेदपि योगः समानः भवति इति नियमं वयं, $a + b = b + a$ इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्नुमः । अत्र चरौ a, b इत्याख्यौ कासाम् अपि संख्यानां 1, 32, 1000, - 7, - 20 इत्यादीनां मानं स्वीकर्तुं शक्नुतः ।

7. समीकरणं, चरस्य उपरि एकः प्रतिबन्धः भवति । अमुम् एकं चरयुक्तं व्यञ्जकमिव स्थिरसंख्यायाः रूपे अपि स्वीकर्तुं शक्यते, यथा $x - 3 = 10$ ।

8. एकस्य समीकरणस्य पक्षद्वयं भवति, वामपक्षः अपि च दक्षपक्षः । एतयोः द्वयोः मध्ये समताचिह्नं (=) भवति ।

9. समीकरणे समबद्धचरस्य एकस्य निश्चितमानस्य कृते एव समीकरणस्य वामपक्षः समीकरणस्य दक्षपक्षेण समानः भवति । वयं वदामः यत् चरस्य तत् निश्चितं मानं समीकरणं सन्तुष्टयति । स्वयं एतत् मानं समीकरणस्य समाधानम् इत्युच्यते ।

10. समाधानं प्राप्तुम् एकः विधिः प्रयत्न-त्रुटि-विधिः अस्ति । अस्मिन् विधौ वयं चरस्य कृते एकं मानं दत्त्वा एतत् परीक्षणं कुर्मः यत् एतत् समाधानं समीकरणं तुष्टयति उत न इति । चरस्य कृते वयम् एतादृशं विभिन्नं मानं तावत्पर्यन्तं दद्मः यत् यावत्पर्यन्तं वयं चरस्य तत् मानं न प्राप्नुम यत् समीकरणं सन्तुष्टं करोति ।

अनुपातः समानुपातः च

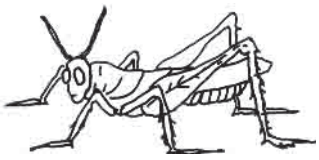
अध्यायः 12

12.1 भूमिका

अस्माकं दैनिकजीवने अनेकवारम् अस्माभिः द्वयोः सदृशराश्योः तुलना करणीया भवति । उदाहरणार्थम् अवनी अपि च शैरी स्व-चित्रपुस्तकस्य कृते पुष्पाणां सङ्ग्रहं कुरुतः । अवनी 30 अपि च शैरी 45 पुष्पाणि सङ्गृहीतवत्यौ ।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् शैरी अवनीतः 45 - 30 = 15 पुष्पाणि अधिकतया सङ्गृहीतवती ।

तथा च, रहीमस्य औन्नत्यं 150 से.मी. अपि च अवन्याः औन्नत्यं 140 से.मी. अस्ति । अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् रहीमस्य औन्नत्यं अवनीतः 150 – 140 = 10 से.मी. अधिकमस्ति ।



एषः अन्तरद्वारा तुलनायाः एकः विधिः अस्ति । यदि वयं पिपीलिका-शलभयोः लम्बस्य तुलनां कर्तुम् इच्छामः तर्हि अन्तरद्वारा अस्य तुलनायाः प्रदर्शनं समुचितं न भवति । शलभस्य लम्बः 4 इत्यतः 5 सेमी भवति यः पिपीलिकायाः लम्बात् बह्वधिकः अस्ति यतः पिपीलिकायाः लम्बः कतिचन मिमी एव भवति । तुलना अधिकतया समीचीना भविष्यति यदि शलभस्य लम्बेन समानाम्, एकस्याः पृष्ठतः एका इव पिपीलिकायाः पङ्क्तिः निर्मिता भवेत् । अनेन वयम् एतत् वक्तुं शक्नुमः यत् 20 अथवा 30 पिपीलिकायाः लम्बः एकस्य शलभस्य लम्बेन समानं भवति इति ।

अग्रिम-उदाहरणं स्वीकुर्मः, एकस्य कार्-यानस्य मूल्यं 2,50,000 रू. अस्ति अपि च एकस्याः द्विचक्रिकायाः मूल्यं 50,000 रू अस्ति । यदि वयं द्वयोः यानयोः मध्यस्थम् अन्तरं स्वीकुर्मः चेत् तत् 2,00,000 भवति । यदि वयं तुलनां भागद्वारा कुर्मः चेत् इत्थं भवति -

$$\frac{2,50,000}{50,000} = \frac{5}{1}$$

वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कार्-यानस्य मूल्यं द्विचक्रिकातः पञ्चगुणितम् अस्ति । अपि च च कासुचित् स्थितिषु भागद्वारा तुलनाम्, अन्तरद्वारा तोलनात् उपयोगि इति सिद्धं भवति । भागद्वारा तुलनामेव अनुपातः इत्युच्यते । अग्रिमभागे वयम् अनुपातस्य विषये इतोऽपि अधिकतया अध्ययनं कुर्मः ।

12.2 अनुपातः

अधस्थं पश्यन्तु ।

ईशायाः भारः 25 किग्रा अस्ति अपि च तस्य पितोः भारः 75 कि.ग्रा. अस्ति । पितुः भारः पुत्र्याः भारात् कियद्गुणितम् अस्ति । एतत् त्रिगुणितम् अस्ति ।

एकस्याः लेखन्याः मूल्यं 10 रू. अस्ति अपि च एकस्याः अङ्कस्याः मूल्यं 2 रू. अस्ति । लेखन्याः मूल्यं अङ्कस्याः मूल्यात् कियद्गुणितम् अस्ति ? स्पष्टम् अस्ति यत् पञ्चगुणितम् ।

उपरि उक्त-उदाहरणेषु वयं द्वयोः राश्योः कियद्गुणितस्य रूपेण तुलनां कृतवन्तः । एषा तुलना अनुपातः इत्युच्यते । वयम् अनुपातं " : " चिह्नद्वारा प्रदर्शयामः ।

पूर्वतन-उदाहरणं पुनः स्वीकुर्मः । वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

पितुः भारस्य पुत्र्याः भारेण सह अनुमातः $= \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3 : 1$

लेखन्याः मूल्यस्य अङ्कन्याः मूल्येन सह अनुपातः $= \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5 : 1$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालकाः अपि च 40 बालिकाः सन्ति । बालकानां संख्यायाः बालिकानां संख्यया सह कः अनुपातः अस्ति ?
2. रविः एकस्यां होरायां 6 किमी चलति अपरं च रोशनः एकस्यां होरायां 4 कि.मी. चलति । रविद्वारा क्रमितदूरस्य रोशनेन क्रमित दूरेण सह कः अनुपातः अस्ति ?

इमां समस्यां पश्यन्तु ।

एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालकाः अपि च च 40 बालिकाः सन्ति । अनुपातं जानन्तु

(a) बालिकानां संख्यायाः आहत्य छात्रैः सह

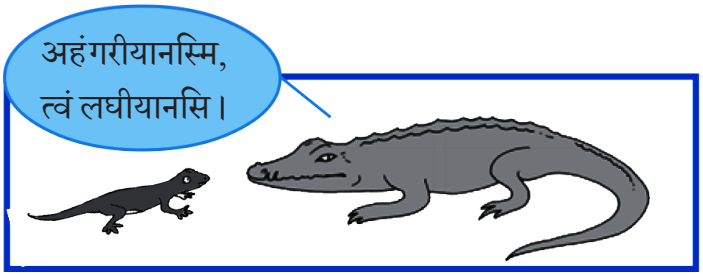
(b) बालकानां संख्यायाःआहस्य छात्रैः सह

प्रथमतया अस्माकं कृते छात्राणाम् आहत्य संख्यायाः आवश्यकता वर्तते या इत्थम् अस्ति ।

बालिकानां संख्या + बालकानां संख्या = 20 + 40 = 60

तदा बालिकानां संख्यायाः आहत्य छात्राणां संख्यया सह अनुपातः $= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

भागस्य (b) इत्यस्य समाधानम् इत्थं जानन्तु ।



अधोलिखितम् उदाहरणं स्वीकुर्मः ।

गृहे विद्यमान-गोधिकायाः लम्बः 20 सेमी अस्ति अपि च मकरस्य लम्बः 4 मीटर् अस्ति।

"अहं भवतः पञ्चगुणिता अस्मि" इति गोधिका अवदत् । यथा वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् एतत् निःसंशयम् असमीचीनम् अस्ति। एकस्याः गोधिकायाः लम्बः एकस्य मकरस्य लम्बात् पञ्चगुणितः भवितुं न शक्नोति । तर्हि दोषः कुत्र अस्ति ? अवधानेन पश्यन्तु यत् गोधिकायाः लम्बः से.मी-मध्ये अस्ति तथा च मकरस्य लम्बः मीटर्-मध्ये अस्ति। अतः अस्माभिः तयोः लम्बं सदृशे घटके परिवर्तनीयं भविष्यति।

मकरस्य लम्बः = 4 मी = 4 X 100 = 400 सेमी

अतः मकरस्य लम्बस्य गोधिकायाः लम्बेन सह अनुपातः इत्थम् अस्ति

$$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20 : 1$$

द्वयोः राश्योः तुलनां तदा एव भवितुं शक्यते यत् यदा तौ द्वौ अपि एकस्मिन् एव घटके भवेताम्।

गोधिकायाः लम्बस्य मकरस्य लम्बेन सह अनुपातः कः भवेत् ?

एषः भविष्यति $\frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1 : 20$

ध्यानं यच्छन्तु यत् 1 : 20 अपि च 20 : 1 द्वौ अपि एकः अपरात् भिन्नः अस्ति। अनुपातः 1 : 20 गोधिकायाः मकरलम्बेन सह अपि च 20 : 1 मकरस्य गोधिकालम्बेन सह अस्ति।

एकम् अन्यम् उदाहरणं पश्यामः ।

अङ्कन्याः लम्बः 18 से.मी. अस्ति अपि च अस्य व्यासः 8 मि.मी. अस्ति। अङ्कस्याः व्यासस्य तस्याः लम्बेन सह अनुपातः कः भविष्यति ? व्यास-लम्बयोः धटकः पृथक्तया दत्तः अस्ति अतः तयोः समानघटके परिवर्तनम् अपेक्षते।

अङ्कन्याः लम्बः = 18 से.मी. = 18 X 10 मि.मी. = 180 मि.मी.

अङ्कन्याः व्यासस्य तस्याः लम्बेन सह अनुपातः

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2 : 45$$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. सौरभः गृहात् विद्यालयं प्राप्तुं 15 निमेषान् स्वीकरोति अपि च सचिनः एकां होरां स्वीकरोति। सौरभेन स्वीकृतसमयस्य अपि च सचिनद्वारा स्वीकृतसमयस्य च अनुपातं जानन्तु।
2. एकस्य लधुमधुरगोलस्य मूल्यं मूल्यं 50 पणकम् अस्ति तथा एकस्य चाकलेहस्य मूल्यं 10 रूप्यकाणि। लघुमधुरगोलस्य चाकलेहस्य मूल्येन सह अनुपातं जानन्तु।
3. एकस्मिन् विद्यालये एकस्मिन् वर्षे 73 विरामाः भवन्ति। विरामानां वर्षस्य आहत्य दिनैः सह अनुपातं जानन्तु।

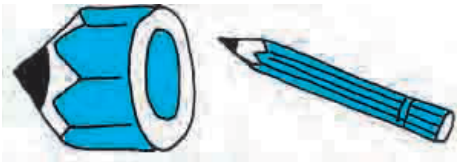
कासाञ्चन एतदृशस्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यत्र भवद्भिः द्वयोः समानराश्योः तुलना करणीया भवति तथा द्वयोः राश्योः अपि घटकः भिन्नः अस्ति।

A B

दैनिकजीवनस्य बह्वीषु स्थितिषु वयम् अज्ञात्वा एव अनुपातस्य सङ्कल्पनायाः प्रयोगं कुर्मः।

आकृत्योः A अपि च B इत्यनयोः तुलनां कुर्मः। आकृतिः A , आकृतिः B इत्यतः अधिकतया स्पष्टा अस्ति। किमर्थम् ?

आकृतिः A इत्यत्र पादौ शरीरस्य अन्यभागेभ्यः लम्बौ वर्तेते। एतदर्थम् एवमुच्यते यत् वयं पादयोः शरीरस्य अन्यभागैः सह तुलनायाम् एकं निश्चितानुपातम् आशास्महे।



चित्रे दर्शित द्वयोः अङ्कन्योः तुलनां कुर्वन्तु। किं प्रथमाङ्कनीं द्रष्टुं पूर्णाङ्कनीवत् दृश्यते ? न। किमर्थं न ? कारणम् एतत् अस्ति यत् अङ्कन्याः पीनत्वे अपि च लम्बत्वे समुचितः अनुपातः नास्ति।

वयं भिन्नस्थितिषु सदृशानुपातान् पश्यामः।

एकस्य प्रकोष्ठस्य लम्बः 30 मी अपि च तस्य वैशाल्यं 20 मी अस्ति। अतः प्रकोष्ठस्य लम्बस्य वैशाल्येन सह अनुपातः $= \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3 : 2$

एकस्मिन् चारणे 24 तथा च 16 बालकाः गच्छन्तः सन्ति। बालिकानां संख्यायाः बालकानां संख्यया सह अनुपातः $= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3 : 2$

न्यूनतमरूपेण 30 : 20 अपि च 24 : 16 अनुपातौ समानौ स्तः अपि च तौ 3 : 2 इत्यनेन समानौ स्तः। एतौ तुल्यानुपातौ इत्युच्येते। किं भवन्तः केषाञ्चन अन्य-उदाहरणानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यानि न्यूनतमरूपेण 3 : 2 इत्यनेन समानानि सन्ति ? एतादृशस्थितयः लिख्यन्तां याभिः एकः निश्चितानुपातः लभ्येत, याः रुचिकराः अपि सन्ति।

उदाहरणार्थम् एकां तादृशीं स्थितिं लिखन्तु यस्याम् अनुपातः 2 : 3 अस्ति।

- उत्पीठिकायाः वैशाल्यस्य लम्बेन अनुपातः 2 : 3 अस्ति।
- शीनायाः समीपे 2 काचमणी स्तः अपि च तस्याः सख्याः शबनमायाः समीपे 3 काचमणयः सन्ति, शीना-शबनमयोः काचमणयोः अनुपातः 2 : 3 अस्ति।

किं भवन्तः कानिचन तादृशानि उदाहरणानि लेखितुं शक्नुवन्ति येषु एषः एव अनुपातः आगच्छेत् । स्व-मित्राणां कृते काञ्चन अनुपातान् दत्वा तैः अनुपाताधारितानि कानिचन उदाहरणानि निर्मापयन्तु ।

रविः अपि च रानी एकस्य व्यापारस्य प्रारम्भं कृतवन्तः अपि च 2 : 3 अनुपाते धनस्य निवेशं कृतवत्यौ, एकस्य वर्षस्य अनन्तरं लाभः 40,000 रू. आसीत् ।

रविः उक्तवान् यत् वयम् अमुं लाभं समानविभागं कुर्मः । रानी उत्तरं दत्तवती यत्, " अहम् अधिकम् इच्छामि यतः अहम् अधिकं निवेशं कृतवती" ।

तदा एषः निर्णयः स्वीकृतः यत् निवेशस्य अनुपातानुगुणमेव लाभः विभज्यते ।

अत्र 2 : 3 इत्यस्य अनुपाते 2 अपि च 3 द्वौ एव राशी स्तः ।

एतेषां राशीनां योगः = 2 + 3 = 5

अस्य कः अर्थः ?

अस्यार्थः अस्ति यत् यदि 5 रू. लाभः अस्ति तर्हि रविना 2 रूप्यकम् अपि च रान्या 3 रूप्यकं प्राप्तव्यम् ।

तथा च वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 5 भागेषु भागद्वयं रवये भागत्रयं च रान्यै लभ्यते ।

अनेन अभिप्रायः भवति यत् रवेः कृते आहत्य लाभस्य $\frac{2}{5}$ भागः अपि च रान्याः कृते $\frac{3}{5}$ भागः लभ्यते ।

यदि आहत्य लाभः 500 रू भवति तर्हि

रवये लभ्यते $\frac{2}{5}$ X 500 = 200 रू

रान्यै लभ्यते $\frac{3}{5}$ X 500 = 300 रू

अधुना यदि आहत्यलाभः 40,000 रू. अस्ति तर्हि प्रत्येकं प्रति कियान् भागः लभ्यते ?

रवेः भागः = $\frac{2}{5}$ X 40,000 रू = 16,000 रू

रान्याः भागः = $\frac{3}{5}$ X 40,000 रू = 24,000 रू

किं भवन्तः केषाञ्चन अन्य-उदाहरणानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् येषु कानिचन वस्तूनि भवद्भिः एकस्मिन् अनिपाते विभज्य वितरणीयानि भवन्ति ? तिस्रः एतादृशसमस्याः निर्मान्तु अपि च स्व-मित्रैः समाधानं कारयन्तु ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. स्व-स्यूते स्थापितटिप्पणीपुस्तकानां पाठ्यपुस्तकैः सह अनुपातं जानन्तु ।
2. स्व-कक्ष्यायाः, आहत्य उत्पीठिकानां संख्यायाः आहत्य आसन्दानां संख्यया सह अनुपातं जानन्तु ।

3. स्व-कक्ष्यायां तेषां छात्राणां संख्यां जानन्तु येषाम् आयुः 12 वर्षेभ्यः उपरि वर्तते । अधुना 12 वर्षेभ्यः उपरि आयुर्युक्तानां छात्राणां संख्यायाः कक्ष्यायाः अन्यच्छात्राणां संख्यया सह अनुपातं जानन्तु ।
4. स्व-कक्ष्यायाः द्वाराणां संख्यायाः गवाक्षाणां संख्यया सह अनुपातं जानन्तु ।
5. एकम् आयतं निर्मान्तु । तस्य लम्बस्य वैशाल्येन सह अनुपातं जानन्तु ।

अधुना पर्यन्तं यादृशसमस्यानां समाधानं कर्तुं वयम् अधीतवन्तः ताः पश्यामः ।

उदाहरणम् 1 : एकस्य आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य लम्बः तथा च वैशाल्यं 50 मी. अपि च 15 मी. अस्ति । क्रीडाक्षेत्रस्य लम्बस्य वैशाल्येन सह अनुपातं जानन्तु ।

समाधानम् : आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य लम्बः = 50 मी

आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य वैशाल्यम् = 15 मी

लम्बस्य वैशाल्येन सह अनुपातः = 50 : 15

अनुपातम् अनेन प्रकारेण लेखितुं शक्नुमः $\frac{50}{15} = \frac{50 \div 5}{15 \div 5} = \frac{10}{3}$ =10 : 3

अतः अनुपातः भवति 10 : 3

उदाहरणम् 2 : 90 से.मी. अपि च 1.5 मी इत्यनयोः अनुपातं जानन्तु ।

समाधानम् : द्वौ अपि राशी एकस्मिन्नेव घटके न स्तः । अतः तौ समाने घटके परिवर्तनानन्तरं

1.5 मी. = 1.5 X 100 से.मी. = 150 से.मी.

अतः वाञ्छितानुपातः अस्ति

$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \div 30}{150 \div 30} = \frac{3}{5}$

अतः वाञ्छितानुपातः 3 : 5

उदाहरणम् 3 : एकस्मिन् कार्यालये 45 कर्मचारिणः कार्यं कुर्वन्ति । महिलानां संख्या 25 अस्ति, अन्ये पुरुषाः सन्ति । अनुपातं जानन्तु ।

(a) महिलानां संख्यायाः पुरुषस्य संख्यया सह

(b) पुरुषाणां संख्ययाः महिलानां संख्यया सह

समाधानम् : महिलानां संख्या = 25

कर्मचारिणाम् आहस्य संख्या = 45

पुरुषाणां संख्या = 45 – 25 = 20

अतः महिलानां संख्यायाः पुरुषाणां संख्यया सह अनुपातः

= 25 : 20 = 5 : 4

अपि च पुरुषाणां संख्यायाः महिलानां संख्यया सह अनुपातः

= 20 : 25 = 4 : 5

(ध्यानेन पश्यन्तु यत् 5 : 4 अपि च 4 : 5 इत्यनयोः मध्ये भिन्नता अस्ति ।)

उदाहरणम् 4 : 6 : 4 इत्यस्य तुल्य-अनुपातद्वयं लिखन्तु ।

समाधानम् : अनुपातः $6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \text{ X } 2}{4 \text{ X } 2} = \frac{12}{8}$

अतः, 12 : 8 अपि च 6 : 4 तुल्य-अनुपातौ स्तः।

$6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{2}{3}$

एवमेव वयं कस्यापि अनुपातस्य अंशम् अपि च भाजकम् एकया समानसंख्यया गुणनेन अथवा विभजनेन तुल्यानुपातं प्राप्नुमः।

6 : 4 इत्यस्य इतोऽपि द्वौ अनुपातौ जानन्तु।

उदाहरणम् 5 : रिक्तस्थानानि पूरयन्तु ।

$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$

समाधानम् : प्रथमरिक्तस्थानं पूरयितुं वयं 21 = 3 X 7 तथ्यस्य प्रयोगं करिष्यामः। अर्थात् 21 इत्याख्यं 7 इत्यनेन विभाजनेन 3 प्राप्यते। एतत् दर्शयति यत् अन्यानुपातस्य रिक्तस्थानं पूरयितुं 14 इत्याख्यं 7 इत्यनेन विभाजनीयं भवति। तदा 14 ÷ 7 = 2

अतः द्वितीयानुपातः $\frac{2}{3}$ अस्ति।

अपि च तृतीयानुपातार्थं द्वितीयानुपातस्य द्वौ अपि राशी 3 इत्यनेन गुणनं कर्तव्यं भवति। (किमर्थम् ?)

अतः तृतीयानुपातः $\frac{6}{9}$ अस्ति।

अपि च $\frac{14}{21} = \frac{\boxed{2}}{3} = \frac{6}{\boxed{9}}$ [एते सर्वे अपि तुल्यानुपाताः सन्ति।]

उदाहरणम् 6 : मेर्याः गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरस्य, जोनस्य गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरेण सह अनुपातः 2 : 1 अस्ति।

(a) विद्यालयस्य बहुसमीपे कः निवसति ?

(b) अधोदत्तसारिणीं पूरयन्तु या कानिचन सम्भवनीयदूराणि दर्शयति यत्र मेरी अपि च जानौ वसितुं शक्नुतः।

मेर्याः गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (कि.मी.)	10		4		
जानस्य गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (किमी)	5	4	2	3	1

(c) यदि मेर्याः गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरस्य, कलामस्य गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरेण सह अनुपातः 1 : 2 भवति चेत् विद्यालयस्य बहुसमीपे कः निवसति ?

समाधानम् : (a) जोनः विद्यालयात् बहु समीपे निवसति (यतः अनुपातः 2 : 1 अस्ति)।

(b)

मेर्याः गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (कि.मी.)	10	8	4	6	2
कलामस्य गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (कि.मी.)	5	4	2	3	1

(c) यतो हि अनुपातः 1 : 2 अस्ति अतः मेरी विद्यालयस्य बहुसमीपे निवसति।

उदाहरणम् 7 : कृतिकिरणयोः मध्ये 60 रूप्यकाणि 1 : 2 इत्यस्मिन् विभाज्य वितरन्तु।

समाधानम् : अनुपातस्य द्वौ भागौ 1 अपि च 2 स्तः।

अतः द्वयोः भागयोः योगः = 1 + 2 = 3

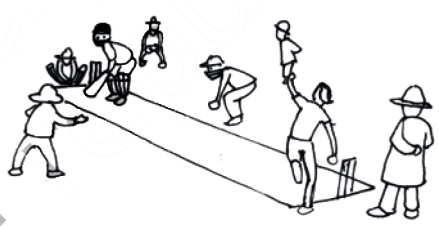
अस्यार्थः अस्ति यत् यदि 3 रू. अस्ति चेत् तर्हि कृत्या 1 रू. अपि च किरणेन 2 रू. प्राप्यते।

अतः कृत्याः भागः = $\frac{1}{3}$ 60 = 20 रू. अस्ति।

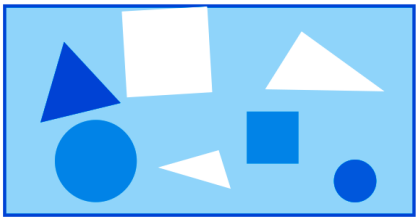
किरणस्य भागः = $\frac{2}{3}$ 60 = 40 रू. अस्ति।

अभ्यासः 12.1

1. एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालिकाः अपि च 15 बालकाः सन्ति। अनुपातं जानन्तु।
   (a) बालिकानां संख्यायाः बालकानां संख्यया सह।
   (b) बालिकानां संख्यायाः आहस्य छात्राणां संख्यया सह।
2. 30 छात्राणां कक्ष्यायां 6 छात्राः पादकन्दुकम्, 12 छात्राः क्रिकेट्-क्रीडाम्, अन्ये च टेनिस्-क्रीडाम् इच्छन्ति। अनुपातं जानन्तु।



   (a) पादकन्दुक-क्रीडा-इच्छुकानां संख्यायाः टेनिस्-क्रीडा इच्छुकानां संख्यया सह।
   (b) क्रिकेट्-क्रीडा-इच्छुकानां संख्यायाः आहत्य छात्राणां संख्यया सह।
3. आकृतिं दृष्ट्वा अनुपातं जानन्तु।



   (a) आयतान्तः विद्यमानानां सर्वेषां त्रिभुजानां संख्यायाः वृत्तानां संख्यया सह।
   (b) सर्वेषां वर्गाणां संख्यायाः सर्वासाम् आकृतीनां संख्यया सह।
   (c) वृत्तसंख्यायाः सर्वासाम् आकृतीनां संख्यया सह।
4. हमीदः एवम् अक्तरः एकस्यां होरायां क्रमशः 9 कि.मी. अपि च 12 कि.मी. दूरं क्रमितवन्तौ। हमीद-अक्तरयोः क्रमणस्य अनुपातं जानन्तु।
5. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

   $\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ (किम् एते तुल्यानुपाताः सन्ति ?)
6. अनुपातं जानन्तु।
   (a) 81 इति संख्यायाः 108 इति संख्यया सह
   (b) 98 इति संख्यायाः 63 इति संख्यया सह
   (c) 33 किमी इत्यस्य 121 किमी इत्यनया सह
   (d) 30 निमेषाणां 45 निमेषैः सह

7. अनुपातं जानन्तु।

(a) 30 निमेषाणां 1.5 होराभिः सह (b) 40 सेमी इत्यस्य 1.5 मी इत्यनेन सह

(c) 55 पणकानां 1 रूप्यकेण सह (d) 500 मि.ली. इत्यस्य 2 लीटर्. इत्यनेन सह

8. एकस्मिन् वर्षे सीमा 1,50,000 रू. अर्जयति अपि च 50,000 रू इत्यस्य संरक्षणं करोति। अधोलिखितानाम् अनुपातं जानन्तु।

(a) सीमया कृतस्य व्ययस्य तस्याः संरक्षित-धनेन सह

(b) सीमया संरक्षितधनस्य तया कृतव्ययेन सह

9. एकस्मिन् विद्यालये 3300 छात्राः 102 अध्यापकाः सन्ति। अध्यापकसंख्यायाः छात्राणां संख्यया सह अनुपातं जानन्तु।

10. एकस्मिन् महाविद्यालये 4320 छात्रेषु 2300 बालिकाः सन्ति। अनुपातं जानन्तु

(a) बालिकानाम् एवम् आहत्यच्छात्राणां संख्यायाः

(b) बालकबालिकयोः संख्यायाः

(c) बालकानां तथा आहत्यच्छात्राणां संख्यायाः

11. एकस्य विद्यालयस्य 1800 छात्रेषु 750 छात्राः बास्केट्-बाल्, 800 छात्राः क्रिकेट्, अन्ये च टेबल्-टेनिस् इत्याख्यां क्रीडां च इच्छन्ति। यदि एकः छात्रः एकाम् एव क्रीडां चिनोति चेत् अनुपातं जानन्तु –

(a) बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम् अपि च टेबल्-टेनिस् क्रीडकाणाम्

(b) क्रिकेट् क्रीडकानाम् अपि च बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम्

(c) बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम् एवम् आहत्य छात्राणाम्

12. द्वादश-विशिष्टलेखनीनां मूल्यं 180 रू अस्ति अपि च 8 सामान्य-लेखनीनां मूल्यं 56 रू अस्ति। विशिष्टलेखनीनां सामान्यलेखनीभिः सह अनुपातं जानन्तु।

13. कथनं पश्यामः– एकस्य प्रकोष्ठस्य वैशाल्यस्य अपि च लम्बस्य अनुपातः 2 : 5 अस्ति। अधोलिखितसरिणीं पूरयन्तु यत्र प्रकोष्ठस्य केचन सम्भवनीयवैशाल्य-लम्बाः दत्ताः सन्ति।

14. शीला-सङ्गीतयोः मध्ये 20 लेखनीः 3 : 2 इत्यस्मिन् विभज्य वितरन्तु।

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यम् (मी)	10		40
प्रकोष्ठस्य लम्बः (मी)	25	50	

15. एका माता स्वपुत्रीभ्यां श्रेया-भूमिकाभ्यां 36 रूप्यकाणि तयोः आयुषः अनुपाते दातुम् इच्छति। यदि श्रेया 15 वर्षीया भूमिका 12 वर्षीया अस्ति तर्हि प्रत्येकं पुत्र्याः कृते कियद् धनं लप्स्यते ?

16. पिता 42 वर्षीयः अस्ति अपि च तस्य पुत्रः 14 वर्षीयः अस्ति। अनुपातं जानन्तु।

(a) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह।

(b) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह यदा पुत्रः 12 वर्षीयः आसीत्।

(c) 10 वर्षेभ्यः अनन्तरं पितुः आयुषः 10 वर्षेभ्यः अनन्तरस्य पुत्रस्य आयुषा सह।

(d) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह यदा पिता 30 वर्षीयः आसीत् ।

12.3 समानुपातः

इमां स्थितिं पश्यामः –

राजूः रक्ताङ्गं क्रेतुं विपणीं गच्छति । एकः आपणिकः उक्तवान् यत् 5 कि.ग्रा. रक्ताङ्गस्य मूल्यं 40 रू. अस्ति । अपरः आपणिकः उक्तवान् यत् 6 कि.ग्रा. रक्ताङ्गस्य मूल्यं 42 रू. अस्ति । इदानीं राजू-इत्यनेन किं करणीयम् अस्ति ? प्रथमेन आपणिकेन रक्ताङ्गः क्रेतव्यः अथवा द्वितीयेन आपणिकेन ? निर्णयं स्वीकर्तुं किम् अन्तरं स्वीकृत्य तुलनायां साहाय्यं करिष्यति ? न । किमर्थं न ?

तस्य साहाय्यार्थं कमपि मार्गं चिन्तयन्तु । स्व-मित्रैः सह विमर्शं कुर्वन्तु । एकम् अन्यम् उदाहरणं स्वीकुर्मः ।

भाविकायाः पार्श्वे 28 काचमणयः सन्ति अपि च विनि इत्यस्याः पार्श्वे 180 पुष्पाणि सन्ति । ते द्वे अपि परस्परं वितरितुम् इच्छतः । भाविका 14 मणीन् विनि इत्यस्यै दत्तवती अपि च विनिः 90 पुष्पाणि भाविकायै दत्तवती । परन्तु विनिः सन्तुष्टा न अभवत् । सा चिन्तितवती यत् सा भाविकायै अधिकानि पुष्पाणि दत्तवती अपरं च भाविका तस्यै न्यूनान् काचमणीन् दत्तवती ।

किं भवन्तः चिन्तयन्ति ? किं विनिः सम्यक् चिन्तयति ? द्वे अपि समस्यायाः समाधानार्थं विन्याः मातुः पूजायाः समीपे गतवत्यौ ।

पूजा बोधितवती यत् 28 काचमणिषु भाविका 14 काचमणीन् विनि इत्यस्यै दत्तवती ।

अतः अनुपातः अस्ति यत् 14 : 28 = 1 : 2

अपि च 180 पुष्पेषु 90 पुष्पाणि विनिः भाविकायै दत्तवती ।

अतः अनुपातः अस्ति यत् 90 : 180 = 1 : 2

यतः द्वौ अपि अनुपातौ समानौ वर्तेते अतः वितरणं सम्यक् अस्ति ।

आशमा अपि च पङ्खुरी केशसन्दंशिकां (हेर्-क्लिप्) क्रेतुम् आपणं गतवत्यौ । ते 30 रूप्यकेषु 20 सन्दंशिकां क्रीतवत्यौ । आशमा 12 दत्तवती अपि च पङ्खुरी 18 रू दत्तवती । गृहं प्रति आगमनानन्तरं आशमा पङ्खुरीं 10 सन्दंशिकाः दातुम् उक्तवती । तदा पङ्खुरी उक्तवती यत् "अहम् अधिकं धनं दत्तवती अतः मया अधिकसन्दंशिकाः प्राप्तव्याः इति" । पङ्खुर्याः अनुसारं आशमया 8 अपि च तया 12 च सन्दंशिकाः प्राप्तव्याः ।

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् आशमापङ्खुर्योः मध्ये का समीचीनं वदति ? किमर्थम् ?

आशमया दत्तधनस्य पङ्खुर्या दत्तधनस्य च अनुपातः = 12 : 18 = 2 : 3 अस्ति । आशमायाः वचनानुसारम्,

आशमायाः केशसन्दंशिकानां संख्यायाः अपि च पङ्खुर्याः केशसन्दंशिकानां संख्यायाः अनुपातः 10 : 10 = 1 : 1

पङ्खुर्याः वचनानुसारम्,

आशमायाः केशसन्दशिकानां संख्यायाः अपि च पङ्खुर्याः केशसन्दंशिकानां संख्यायाः च अनुपातः = 8 : 12 = 2 : 3 अस्ति।

आशमया कृतवितरणानुसारं सन्दंशिकानां संख्यायाः अनुपातः, दत्तानुपातातेन समानः नास्ति, यः भवितव्यः आसीत्। अपरं च पङ्खुर्या कृतवितरणे द्वयोः अपि स्थित्योः अनुपातः समानः अस्ति। अतः पङ्खुरी समानवितरणं कृतवती।

अनुपातवितरणस्य कोऽपि अर्थः अस्ति

अधस्थ-उदाहरणानि पश्यामः –

- राजा 15 रूप्यकेषु 3 लेखनीं क्रीतवान् एवम् अनुः 50 रूप्यकेषु 10 लेखनीं क्रीतवती। कस्य लेखनी महार्घा आसीत् ? राज्ञा क्रीतलेखनीनां संख्या एवम् अनुना क्रीतलेखनीनां संख्यायाः अनुपातः = 3 : 10।

  तासां मूल्यानाम् अनुपातः = 15 : 50 = 3 : 10

  3 : 10 अपि च 15 : 50 समानौ स्तः।

- रहीमः 60 रूप्यकेषु 2 किग्रा सेवं विक्रीतवान् अपि च रोशनः 120 रूप्यकेषु 4 कि.ग्रा. विक्रीतवान्। कः महार्घेण सेवं विक्रीतवान् ?

  सेवफलानां भारयोः अनुपातः 2 कि.ग्रा : 4 किग्रा = 1 : 2

  मूल्ययोः अनुपातः = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

  अपि च सेवानां भारयोः अनुपातः = मूल्ययोः अनुपातः

यतः द्वयोः अपि अनुपातः समानः अस्त्ति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमह् यत् एतौ समानुपाते स्तः। तौ द्वौ अपि समानमूल्येषु सेवविक्रयणं कुर्वन्तौ आस्ताम्।

यदि द्वौ अनुपातौ समानौ भवतः तर्हि तौ द्वौ अपि समानुपाते स्तः अपि च तौ समानौ कर्तुं '::' अथवा '=' चिह्नस्य प्रयोगः क्रियते।

प्रथम-उदाहरणार्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 3, 10, 15 अपि च 20 एताः संख्याः समानुपाते सन्ति याः वयं 3 : 10 :: 15 : 50 इति रूपे अपि लेखितुं शक्नुमः। अपि च 3 अनुपातः 10 समः 15 अनुपातः 50 इति पठामः।

द्वितीय-उदाहरणे 2, 4, 60 अपि च 120 एताः संख्याः समानुपाते सन्ति याः वयं 2 : 4 :: 60 : 120 इति लेखिष्यामः अपि च 2 अनुपातः 4 समः 60 अनुपातः 120 इति पठिष्यामः।

आयान्तु, अन्यानि उदाहरणानि स्वीकुर्मः –

एकः होराद्वये 35 कि.मी. चलति । किम् एतावता वेगेन एषः 4 होरासु 70 कि.मी. चलितुं शक्नोति ?

द्वयोः चलितदूरयोः अनुपातः = 35 : 70 = 1 : 2

द्वयोः स्वीकृतसमययोः अनुपातः = 2 : 4 = 1 : 2

इत्थम्, द्वौ अपि अनुपातौ समानौ स्तः। अर्थात् 35 : 70 = 2 : 4

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् चतस्रः संख्याः 35, 70, 2 अपि च 4 समानुपाते सन्ति।

इत्थं वयं लेखितुं शक्नुमः यत् 35 : 70 :: 2 : 4 एवम् इदम् अपि च पठामः यत् 35 अनुपातः 70 समः 2 अनुपातः 4 इति। अतः सः 4 होरासु 70 किमी तेनैव वेगेन चलितुं शक्नोति।

अधुना तत् उदाहरणं स्वीकुर्मः

2 किग्रा सेवस्य मूल्यं 60 रू अस्ति अपि च 5 किग्रा दृढबीजस्य मूल्यं 15 रू अस्ति।

द्वयोः भारयोः अनुपातः = 2 : 5 अस्ति।

द्वयोः मूल्ययोः अनुपातः = 60 : 15 = 4 : 1

अत्र 2 : 5 अपि च 60 : 15 एतत् द्वयं समानं नास्ति।

अर्थात् $2 : 5 \neq 60 : 15$

इत्थं 2, 5, 60 अपि च 15 एते चत्वारः अपि राशयः समानुपाते न सन्ति।

यदि द्वौ अनुपातौ समानुपाते न भवतः तर्हि ते राशयः समानुपाते न सन्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षणं कुर्वन्तु यत् दत्तानुपाताः समानाः सन्ति अर्थात् ते समानुपाते सन्ति। यदि आम्, तर्हि तान् समीचीनतया लिखन्तु।

1. 1 : 5 अपि च 3 : 15
2. 2 : 9 अपि च 18 : 81
3. 15 : 45 अपि च 5 : 25
4. 4 : 12 अपि च 9 : 27
5. 10 रूप्यकाणां 15 रूप्यकैः सह अपि च 4 इत्यस्य 6 इत्यनेन सह

समानुपातस्य कथने क्रमे स्वीकृताः चत्वारः राशयः पदानि इत्युच्यन्ते। प्रथमचतुर्थपदे चरमपदे इत्युच्येते। द्वितीयतृतीयपदे मध्यपदे इत्युचेते।

उदाहरणार्थं 35 : 70 :: 2 : 4

35 , 70, 2 अपि च 4 चत्वारि पदानि सन्ति। येषु 35 अपि च 4 चरमपदे स्तः। 70 अपि च 2 मध्यपदे स्तः।

उदाहरणम् 8 : किम्, अनुपातः 25 ग्रा : 30 ग्रा. अपि च 40 किग्रा : 48 कि.ग्रा. समानुपातः अस्ति ?

समाधानम् : 25 ग्रा : 30 ग्रा. $= \frac{25}{30} = 5 : 6$

40 किग्रा : 48 कि.ग्रा. $= \frac{40}{48} = 5 : 6$

अतः 25 : 30 = 40 : 48

अतः अनुपातः 25 ग्रा : 30 ग्रा अपि च 40 कि.ग्रा : 48 किग्रा समानुपातः अस्ति

अर्थात् 25 : 30 :: 40 : 48

एतेषु 25,48 चरमपदे स्तः अपि च 30,40 मध्यपदे स्तः।

उदाहरणम् 9 : किं 30, 40, 45 अपि च 60 समानुपाताः सन्ति ?

समाधानम् : 30 अपि च 40 इत्यनयोः अनुपातः = $\frac{30}{40}$ = 3 : 4

45 अपि च 60 इत्यनयोः अनुपातः $\frac{45}{60}$ = 3 : 4

यतः 30 : 40 = 45 : 60

अतः 30, 40, 45, 60 समानुपाते सन्ति।

उदाहरणम् 10 : किं 15 सेमी इत्यस्य 2 मी इत्यनेन सह अपि च 10 क्षणानां 3 निमेषैः सह अनुपातः एकः समानुपातः भवति ?

समाधानम् : 15 से.मी. इत्यस्य 2 मी. इत्यनेन सह अनुपातः

= 15 : 2 X 100 (1 मी = 100 सेमी)

= 3 : 40

10 क्षणानां 3 निमिषैः सह अनुपातः

= 10: 3 X 60 (1 निमेषः = 60 क्षणाः)

= 1 : 18

यतः 3 : 40 $\neq$ 1 : 18, अतः दत्तानुपातः, समानुपातः न भवति।

अभ्यासः 12.2

1. किम् अधोलिखितराशयः समानुपाते सन्ति ?
   (a) 15, 45, 40, 120 (b) 33, 121, 9, 96 (c) 24, 28, 36, 48
   (d) 32, 48, 70, 210 (e) 4, 6, 8, 12 (f) 33, 44, 75, 100
2. अधोलिखितकथनानाम् अग्रे सत्यम् अथवा असत्यम् इति लिखन्तु।
   (a) 16 : 24 :: 20 : 30 (b) 21 : 6 :: 35 : 10 (c) 12 : 18 :: 28 : 12
   (d) 8 : 9 :: 24 : 27 (e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4 (f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4
3. किम् अधोलिखितकथनानि सत्यमस्ति ?
   (a) 40 जनाः : 200 जनाः :: 15 रू : 75 रू
   (b) 7.5 ली : 15 ली :: 5 किग्रा : 10 किग्रा
   (c) 99 किग्रा : 45 किग्रा :: 44 रू : 20 रू
   (d) 32 मी : 64 मी :: 6 क्षणाः : 12 क्षणाः
   (e) 45 किमी : 60 किमी :: 12 होराः : 15 होराः
4. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् अधोलिखितानुपाताः समानुपातान् निर्मान्ति। यदि समानुपाताः भवन्ति तर्हि चरमपदम् अपि च मध्यपदं लिखन्तु।
   (a) 25 से.मी. : 1 मी :: 40 रू. : 160 रू.
   (b) 39 ली. : 65 ली. :: 6 कूप्यः : 10 कूप्यः
   (c) 2 किग्रा : 80 कि.ग्रा. :: 25 ग्रा. : 625 ग्रा.
   (d) 200 मि.ली. : 2.5 ली :: 4 रू. : 50 रू.

12.4 घटकीकरणविधिः

प्रदत्तस्थितीः पश्यन्तु।

- रेशमा अपि च सीमा अभ्यासपुस्तकं क्रेतुं आपणं गच्छतः। रेशमा 24 रूप्यकेषु 2 अभ्यासपुस्तकं क्रीतवती। एकस्य अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यं जानन्तु।
- 80 कि.मी. दूरं क्रमितुं द्विचक्रिकायाः कृते 2 लीटर् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते। 1 कि.मी. दूरं क्रमितुं कियत् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते ?

भवन्तः कथम् एतयोः समाधानं कुर्वन्ति ?

प्रथमोदाहरणं पुनः स्वीकुर्म।

2 अभ्यासपुस्तकयोः मूल्यं = 24 रू.

अतः 1 अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यं = 24 रू. ÷ 2 = 12 रू.

यदि भवन्तः 5 एतादृशाभ्यासपुस्तकानां मूल्यं ज्ञातुं उच्यते चेत् इत्थं भवति 12 रू. X 5 = 60 रू. भविष्यति।

अन्यम् उदाहरणमपि पुनः स्वीकुर्म।

वयं ज्ञातुम् इच्छामः यत् 1 कि.मी. गमने कियत्-पेट्रोल् अपेक्षते इति।

80 कि.मी. गमनार्थं पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते = 2 लीटर्

1 कि.मी. गमनार्थं पेट्रोल-तैलम् अपेक्षते $= \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ लीटर्

अधुना पुनः भवन्तः पृच्छन्ते यत् 120 किमी गमनार्थं कियत् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते इति चेत्,

तदा आवशकपेट्रोल्-तैलम् $= \frac{1}{40} \times 120 = 3$ लीटर्

यस्य साहाय्येन वयं एकस्य घटकस्य मानं जानीमः अपि च पुनः यावतां घटकानां मानं ज्ञातुम् उच्यामहे, तान् वयं जानीमः सः विधिः घटकीकरणविधिः इत्युच्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. पञ्च एतादृशसमास्याः निर्मान्तु अपि च स्वमित्रैः समाधानं कारयन्तु।
2. अधोलिखितसारिणीं पठित्वा पूरयन्तु।

समयः	करणेन क्रमितदूरम्	कृत्या क्रमितदूरम्
2 होरा	8 किमी	6 किमी
1 होरा	4 किमी	
4 होरा		

करणेन 1 होरायां क्रमितदूरं $= \frac{8}{2}$ कि.मी. = 4 किमी

अतः करणेन 4 होरासु क्रमितदूरं = 4 X 4 = 16 कि.मी.

इत्थम्, कृत्या एकस्मिन् होरायां क्रमितदोरं ज्ञात्वा, 4 होरासु क्रमितदूरं ज्ञातुं शक्यते।

उदाहरणम् 11 : यदि 6 फलरसकूपीनां मूल्यम् 210 रू. भवति चेत् 4 कूपीनां मूल्यं जानन्तु।

समाधानम् : 6 फलरसकूपीनां मूल्यम् = 210 रू

अतः, फलरसस्य 1 कूप्याः मूल्यम् $= \frac{210}{6}$ = 35 रू.

अतः फलरसस्य 4 कूपीनां मूल्यम् = 35 रू. X 4 = 140 रू.

इत्थम्, फलरसस्य 4 कूपीनां मूल्यम् 140 रू. भविष्यति।

उदाहरणम् 12 : एकया द्विचक्रिकया 220 कि.मी. दूरं क्रमितुं 5 लीटर् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते चेत् तर्हि 1.5 ली पेट्रोल्-तैले कियद्दूरं क्रमितुं शक्यते ?

समाधानम् : 5 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम् = 220 कि.मी.

1 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम् = $\frac{220}{5}$ कि.मी.

1.5 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम्

$\frac{220}{5}$ X 1.5 = $\frac{220}{5}$ X $\frac{15}{10}$ कि.मी. = 66 कि.मी.

उदाहरणम् 13 : द्वादश स्नानफेनकानाम् एकस्याः पेटिकाः मूल्यम् 153.60 रू. अस्ति। एवमेव 15 स्नानफेनकानां पेटिकायाः मूल्यं जानन्तु।

समाधानम् : द्वादश स्नानफेनकानाम् एकस्याः पेटिकायाः मूल्यम् = 153.60 रू

अतः, एकस्य स्नानफेनकस्य मूल्यम् $= \frac{153.60}{12}$ = 12.80 रू

अतः, 15 स्नानफेनकानां मूल्यम् = 12.80 रू. X 15 = 192 रू

इत्थम्, 15 स्नानफेनकानां पेटिकायाः मूल्यम् 192 रू.

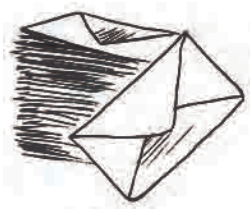
उदाहरणम् 14 : 105 पिहितपत्राणां मूल्यम् 35 रू. अस्ति। 15 रूप्यकेषु कियन्ति पत्राणि क्रेतुं शक्यते ?

समाधानम् : 35 रूप्यकेषु क्रेष्यमाणपिहितपत्राणां संख्या = 105

अतः, 1 रूप्यके क्रेष्यमाणपत्राणां संख्या $= \frac{105}{35}$

अतः, 10 रूप्यकेषु क्रेष्यमाणपिहितपत्राणां संख्या = $\frac{105}{35}$ X 10 = 30

इत्थम्, 10 रूप्यकेषु 30 पिहितपत्राणि क्रेतुं शक्यते।



उदाहरणम् 15 : एकं कार्-यानं $2\frac{1}{2}$ होरायां 90 कि.मी. चलितुं शक्नोति।

(a) तेनैव वेगेन 30 किमी चलितुं कियान् समयः अपेक्षते ?

(b) तेनैव वेगेन 2 होरायां कियद्दूरं गमिष्यति ?

समाधानम् : (a) प्रथम-स्थित्यां दूरं ज्ञातम् अस्ति समयः अज्ञातः अस्ति। अतः वयम् इत्थं कुर्मः।

$2\frac{1}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ X 60 निमेषाः = 150 निमेषाः

90 कि.मी. क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = 150 निमेषाः

अतः, 1 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = $\frac{150}{90}$ निमेषाः

अतः, 30 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = $\frac{150}{90}$ X 30 निमेषाः

= 50 निमेषाः

इत्थम्, 30 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः 50 निमेषाः भविष्यति।

(b) अस्यां द्वितीयस्थित्यां दूरम् अज्ञातम् अस्ति तथा च समयः ज्ञातः अस्ति। अतः एवमग्रे

$2\frac{1}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ होरा

$\frac{5}{2}$ होरासु क्रमितदूरत्वम् = 90 किमी

अतः, 1 होरायां क्रमितदूरत्वम् = 90 ÷ $\frac{5}{2}$ किमी

= 90 X $\frac{2}{5}$ किमी = 36 किमी

अतः, 2 होरायां क्रमितदूरत्वम् = 36 X 2 = 72 किमी

इत्थम्, 2 होरायां 72 कि,मी. दूरं क्रमितमस्ति।

अभ्यासः 12.3

1. यदि 7 मी वस्त्रस्य मूल्यं 294 रू. भवेत् तर्हि 5 मी वस्त्रस्य मूल्यं जानन्तु।
2. एकाता 10 दिनेषु 1500 रू. अर्जयति। 30 दिनेषु सा कियद्धनम् अर्जयति ?
3. यदि गतदिनत्रयेषु 276 मि.मी. वृष्टिः अभविष्यत तर्हि एकस्मिन् सप्ताहे (7) कियत् से.मी. वृष्टिः भविष्यति ? परिगणयन्तु यत् वृष्ट्याः गतिः समाना अस्ति।

4. 5 कि.ग्रा. गोधूमस्य मूल्यं 30.50 रू. अस्ति।
   (a) 8 किग्रा गोधूमस्य मूल्यं कियद्भवति ?
   (b) 61 रूप्यकेषु कियत् गोधूमं क्रेतुं शक्यते ?
5. गत 30 दिनेभ्यः तापमानं $15^{\circ}C$ अस्ति। यदि तापमानम् एवमेव अग्रे अपि भवेत् चेत् अग्रिमेषु 10 दिनेषु तापमानं कति डिग्री भविष्यति ?
6. शैना 3 मासानां भाटकार्थं 7500 रू. ददति। यदि सम्पूर्णवर्षस्य भाटकं समानं भवेत् तर्हि एकस्य वर्षस्य भाटकं कियद् भवति ?
7. 4 दर्जनस्य (dozen) कदलीफलानां मूल्यं 60 रू. अस्ति। 12.50 रूप्यकेषु कियन्ति कदलीफलानि क्रेतुं शक्यते ?
8. 72 पुस्तकानां भारः 9 कि.ग्रा. अस्ति। एतादृशानां 40 पुस्तकानां भारः कियान् भवति ?
9. एकस्मिन् ट्रक्-यानेन 594 किमी चलितुं 108 लीटर् डीसल्-तैलम् अपेक्षते। 1650 कि.मी. दूरं क्रमितुं कियत् लीटर् शिलातैलम् अपेक्षते ?
10. राजूः 150 रूप्यकेषु 10 लेखनीम् क्रीतवान् अपि च मनीषः 84 रूप्यकेषु 7 लेखनीं क्रीतवान्। जानन्तु यत् कः न्यूनार्घेण लीखनीं क्रीतवान् ?
11. अनीशः 6 ओवर् (over) इत्यस्मिन् 42 धावनाङ्कम् आकलयत्। अनूपः 7 ओवर् इत्यस्मिन् 63 धावनाङ्कम् आकलयत्। एकस्मिन् ओवर्-मध्ये कः अधिकधावनाङ्कानाम् आकलनं कृतवान् ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. सदृशराशीनां तोलनं कर्तुं वयं साधारणतया अन्तरद्वारा तोलनं कुर्मः।
2. अधिकस्थितिषु विभजनद्वारा तुलना अधिकसमीचीना भवति। अर्थात् एकः राशिः अपरराशेः कियद्गुणितः अस्ति। अमुं विधिं विभजनद्वारा तोलनम् इति वदामः। उदाहरणार्थम्, ईशायाः भारः 25 कि.ग्रा., तस्याः पितुः भारः 75 कि.ग्रा. अस्ति। वयं वदामः यत् पितुः भारस्य ईशायाः भारेण सह अनुपातः 3 : 1 अस्ति।
3. अनुपातद्वारा तोलने द्वयोः राश्योः तोलनं समानं भवेत्। यदि तौ समानौ न स्यात् तर्हि अनुपातस्वीकारात् पूर्वं तौ समानौ कर्तव्यौ।
4. पृथक्-स्थितिषु अनुपातः समानः भवितुं शक्नोति।
5. अनुपातौ 3 : 2 अपि च 2 : 3 इत्येतौ परस्परं भिन्नौ स्तः। इत्थम्, येन क्रमेण राशयः स्वीकृताः सन्ति सः क्रमः महत्त्वपूर्णः भवति।
6. एकम् अनुपातं भिन्नः इत्यपि मन्तुं शक्यते, अतः $10 : 3 = \frac{10}{3}$ अस्ति।
7. द्वौ अनुपातौ समानौ भविष्यतः, यदि तयोः सङ्गतभिन्नः अपि समानः भवेत्। अतः 3 : 2 इति 6 : 4 अथवा 12 : 8 इत्यस्य समानः अस्ति ।

8. अनुपातं न्यूनतमरूपे परिवर्तयितुं शक्यते । उदाहरणार्थम्, अनुपातः 50 : 15 इत्याख्यं $\frac{50}{15}$ इत्यपि लेखितुं शक्यते । अपि च न्यूनतमरूपेण $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ अस्ति । इत्थम्, न्यूनतमरूपेण 50 : 15 = 10 : 3 अस्ति ।

9. यदि प्रथम-द्वितीयराश्योः अनुपातः तृतीय-चतुर्थराश्योः अनुपातेन समानः भवेत् तर्हि चत्वारः राशयः समानुपाते सन्ति इति कथ्यते । इत्थम्, 3, 10, 15, 50 समानुपाते सन्ति यतो हि $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$ अस्ति । वयं समानुपातं 3 : 10 :: 15 : 50 इत्यनेन रूपेण दर्शिष्यामः तथा 3 अनुपातः 10 समः 15 अनुपातः 50 इति रूपेण पठिष्यामः । उपरि लिखितसमानुपाते 3 अपि च 50 चरमपदे स्तः । तथा 10 अपि च 15 मध्यपदे स्तः ।

10. समानुपाते क्रमः महत्त्वपूर्णः अस्ति । 3, 10, 15, 50 समानुपाते सन्ति किन्तु 3, 10, 50, 15 समानुपाते न सन्ति । यतो हि $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$ अस्ति ।

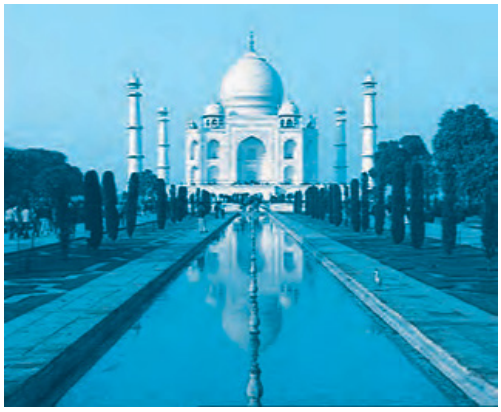
11. येन विधिना वयम् एकं घटकस्य मानं जानीमः तदनन्तरं वाञ्छितघटकानां मानं जानीमः तं विधिं घटकीकरणविधिः इति निर्दिशामः । भावयन्तु यत् 6 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं 210 रू. अस्ति । 4 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं घटकीकरणविधिना ज्ञातुं पूर्वं वयम् एकस्य सङ्ग्राहकस्य मूल्यं ज्ञास्यामः यत् $\frac{210}{6}$ रू. अथवा 35 रू. भविष्यति । अनेन वयं 4 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं 35 रू. X 4 अथवा 140 रू. इति प्राप्स्यामः ।

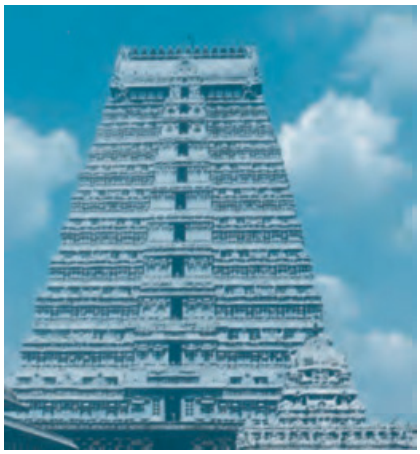
सममितिः

अध्यायः 13

13.1 भूमिका

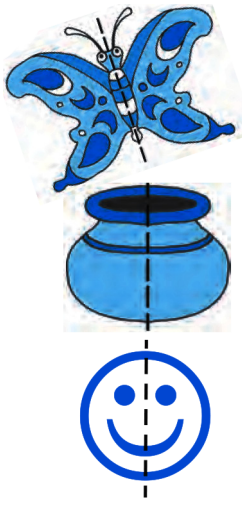
सममितिः अस्माकं दैनिकजीवने प्रयोक्ष्यमाणः एकः सामान्यशब्दः अस्ति । यदा वयम् एतादृशीः आकृतीः द्रक्ष्यामः याः समानानुपाते स्युः तदा वयं वदामः, **"एताः सममिति-आकृतयः सन्ति"** ।





स्व-सममिति-आकार-कारणतः एताः पुरातत्त्वीय-आकृतयः अद्भुतं स्थापत्यं निर्मीतवत्यः ।

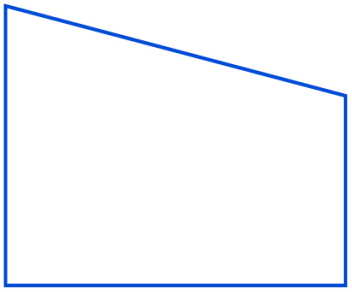
कल्पयन्तु, वयम् एकाम् आकृतिम् इत्थं पुटीकुर्मः यत् तस्याः वामभागार्धः दक्षभागार्धः च पूर्णतया परस्परं सम्मिलेतां तदा वयं वक्ष्यामः यत् आकृतौ सममितिरेखा अस्ति । वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् एकः अपरस्य प्रतिबिम्बः अस्ति । यदि वयम् आकृतिं पुटीकरणस्थाने एकं दर्पणं स्थापयेम तर्हि आकृत्याः एकस्यभागस्य प्रतिबिम्बः द्वितीयभागस्य प्रतिबिम्बं पूर्णतया आवृणोति । अपि च यदा कदापि सम्भवति तर्हि कृत-पुटचिह्नं या दर्पणरेखा अस्ति सा सममितिरेखा इत्युच्यते ।



आकृति 13.1

अत्र भवन्तः यं कमपि आकारं पश्यन्तः सन्ति सर्वे आकाराः सममिति-आकाराः सन्ति अथवा सममिति-आकृतयः सन्ति। किमर्थम् ?

यदि भवन्तः एताः आकृतीः बिन्दु-अङ्कितरेखायाः समक्षं पुटीकुर्वन्ति तर्हि एकस्याः भागः द्वितीयभागं पूर्णतया आवृणोति। अस्याम् आकृत्यां बिन्दु-अङ्कितरेखायाः कृते भवन्तः किं नाम प्रदास्यन्ति ? भवन्तः आकृत्यां दर्पणं कस्मिन् स्थाने स्थापयन्ति येन प्रतिबिम्बः आकृत्याः अपरं भागम् आवृणोत् ?



आकृति 13.2

आकृतिः 13.2 इत्यत्र सममिति-आकृतिः नास्ति।

किम्, वक्तुं शक्नुवन्ति किमर्थं न इति ?

13.2 सममिति-आकृतीनां निर्माणम् : मशिजनितः भूतः (Ink-Blot Devils)

एतत् कुर्वन्तु

कर्गदस्य एकं भागं स्वीकुर्वन्तु पुटीकुर्वन्तु च। मशेः बिन्दून् मध्ये स्थापयन्तु अपि च भागार्धद्वयं नोदयन्तु।

भवन्तः किं द्रक्ष्यन्ति ?

किं प्राप्ताकृतिः सममिति-आकृतिरस्ति ? यदि अस्ति तर्हि वदन्तु यत् सममिति-रेखा कुत्र अस्ति ? किं काचन अन्यरेखा अपि अस्ति यस्याः पुटीकरणेन समानभागद्वयं प्राप्स्यते ? एतादृशानि अन्यप्रतिरूपाणि निर्मातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

मशि-सूत्र-प्रतिरूपम्

एकं कर्गदम् अर्धेन पुटीकुर्वन्तु। तस्य भागार्धे मश्यां निमग्नसूत्रं स्थापयन्तु। अधुना भागार्धद्वयम् एकीकृत्य नोदयन्तु। प्राप्ताकृत्याः अध्ययनं कुर्वन्तु। किमेषा एका सममिति-आकृतिः अस्ति ? कर्गजम् इतोऽपि कथं पुटीकर्तुं शक्यते यथा द्वौ समानौ भागौ लभ्येयाताम् ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

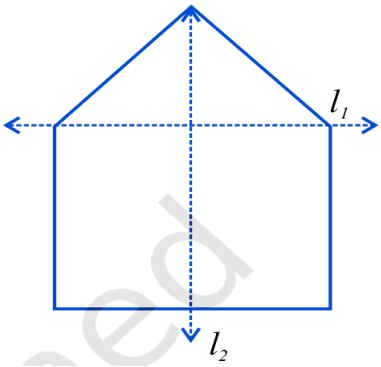
भवतां ज्यामिति-पेटिकायां वर्गमापिकाद्वयम् अस्ति। किम् एतद्द्वयं सममिति-आकृतिः अस्ति ?

स्व-कक्ष्यायाम् उपलब्धवस्तूनां सूचिकां निर्मान्तु यथा श्यामफलकम्, उत्पीठिका, द्वारम्, पाठ्यपुस्तकम् इत्यादि। एतेषु कतमं वस्तु सममितौ अस्ति ? अपि च कतमं वस्तु सममितौ नास्ति ? किं भवन्तः सममिति-वस्तूनां मध्ये सममिति-रेखां परिज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

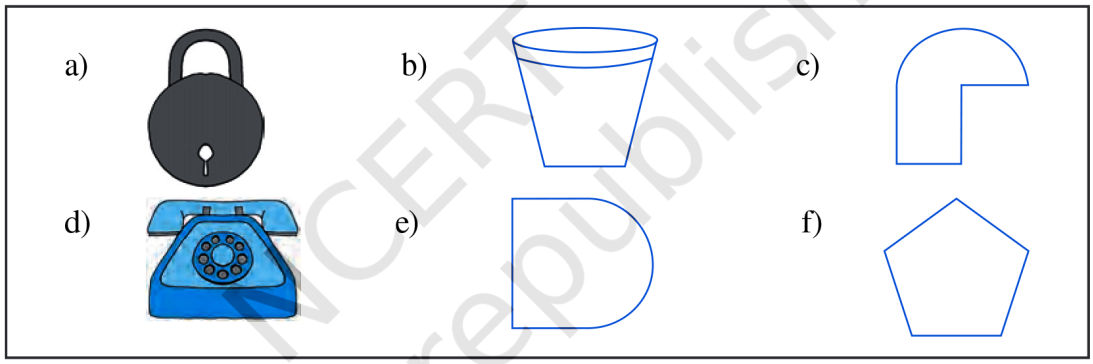
अभ्यासः 13.1

1. स्व-गृहे अथवा विद्यालये विद्यमानानां तादृशवस्तूनां सूचिकां निर्मान्तु यानि सममितौ सन्ति।

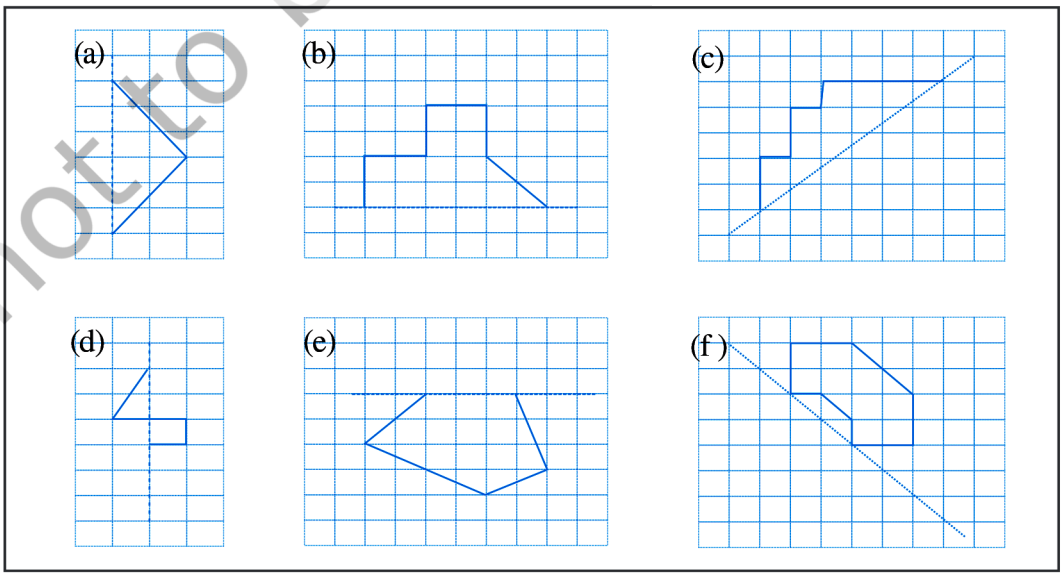
2. दत्ताकृतौ कतरा दर्पणरेखा अथवा समामिति-रेखा अस्ति, l_1 अथवा l_2 ?



3. अधोदत्ताकृतीः जानन्तु। परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किम् एताः अकृतयः सममितौ सन्ति अथवा न इति ? तासां सममिति-रेखामपि आलिखन्तु।

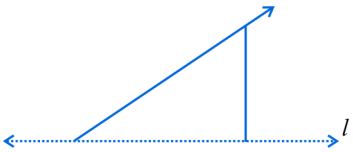


4. अधोदत्ताकृतीः वर्गाङ्कितकर्गदे निर्मान्तु। भवन्तः प्रगतकक्ष्यासु अङ्कगणिताभ्यासपुस्तके वर्गाङ्कितकर्गदस्य प्रयोगं कृतवन्तः स्युः। एताः आकृतयः इत्थं पूरयन्तु यत् बिन्दु-अङ्कित-रेखा एव सममिति-रेखा स्यात्।

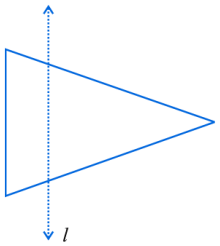


© NCERT not to be republished

5. संलग्नाकृतौ l सममिति-रेखा अस्ति। इमाम् आकृतिं पूरयन्तु येन एषा सममिति-आकृतिः भवेत्।



6. संलग्नाकृतौ 1 सममिति-रेखा अस्ति । त्रिभुजस्य प्रतिबिम्बम् आलिखन्तु अपि च इमाम् आकृतिं पूरयन्तु येन इयं सममिति-आकृतिः भवेत्।



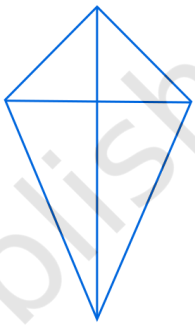
13.3 आकृतयः, यस्मासु सममिति-रेखाद्वयं भवेत्

एतत् कुर्वन्तु

एकः पतङ्गः

भवतां ज्यामितिपेटिकायां 30°, 60°, 90° इति कोणानां वर्गमापिका अस्ति।

एवमेव इतोऽपि एतादृश-मापिकाद्वयं स्वीकुर्वन्तु। ताः परस्परं मेलयित्वा स्थापयन्तु, एकस्य पतङ्गस्य निर्माणं कुर्वन्तु यथा चित्रे दर्शितमस्ति।

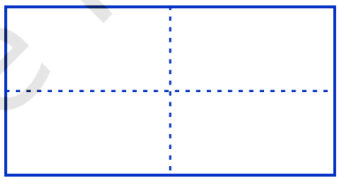


अस्याम् आकृतौ कति कममिति-रेखाः सन्ति ? किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् कासुचित् आकृतिषु एकस्याः अधिकसममिति-रेखाः भवन्ति ?

एकः आयतः

एकम् आयताकारं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु । इदम् एकवारं लम्बाभिमुखं पुटीकुर्वन्तु यथा एकम् अर्धं द्वितीयभागः आवृणोत्। किम् एतत् पुटम् एका सममिति-रेखा अस्ति ? किमर्थम् ?

प्रथमपुटम्



द्वितीयं पुटम्

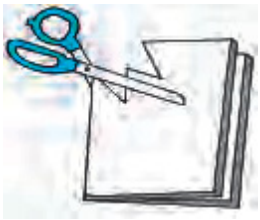
किं भवन्तः अनुमिन्वन्ति यत् एते द्वे रेखे, सममिति-रेखे स्तः ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

द्वित्राः वर्गमापिकाः मेलयित्वा भवन्तः यावतीः आकृतीः निर्मातुं शक्नुवन्ति तावतीः आकृतीः निर्मान्तु। एताः वर्गाङ्कित-कर्गदे निर्मान्तु तथा च एतासां सममिति-रेखाः निर्मान्तु।

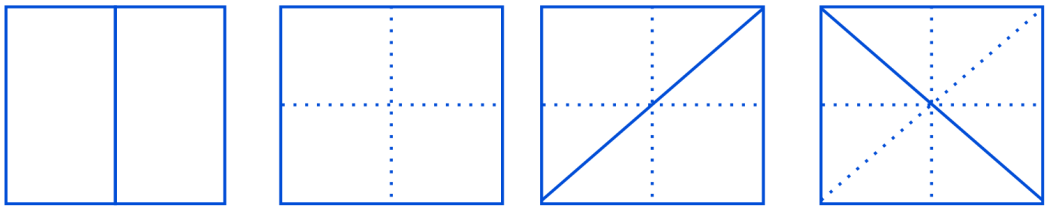
द्विपुटीकृतात् कर्गदात् कर्तिताकृतिः

एकस्य आयताकारस्य कर्गदस्य भागं स्वीकुर्वन्तु। एतत् एकवारं पुटीकुर्वन्तु पुनः एववारं पुटीकुर्वन्तु च। काश्चन आकृतीः निर्मान्तु यथा दर्शितमस्ति। या आकृतिः निर्मिता अस्ति तां कर्तयन्तु एवम् उद्घाटयन्तु। (उद्घाटनात् पूर्वम् अनुमिन्वन्तु यत् याम् आकृतिं भवन्तः प्राप्नुवन्ति।)

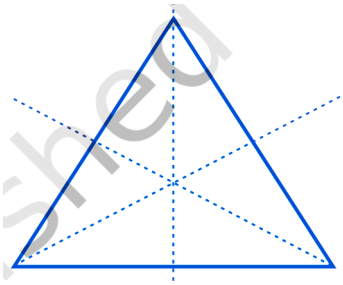


या आकृतिः कर्तिता अस्ति तस्यां कति सममिति-रेखाः सन्ति ? एवमेव अन्याः काश्चन आकृतयः निर्मान्तु।

13.4 अनेकसममिति-रेखायुक्ताः आकृतयः



एकस्य वर्गाकारकर्गदस्य भागं स्वीकुर्वन्तु । एतत् ऊर्ध्वाधरं पुटीकुर्वन्तु पुनः क्षैतिजात् अर्धं पुटीकुर्वन्तु। एतत् उद्घाट्य पुनः तृतीयवारम् अर्धात् पुटीकुर्वन्तु। उद्घाट्य पुनः चतुर्थवारम् अर्धात् पुटीकुर्वन्तु यथा चित्रे दर्शितमस्ति। पुनः एतत् उद्घाटयन्तु वदन्तु च।

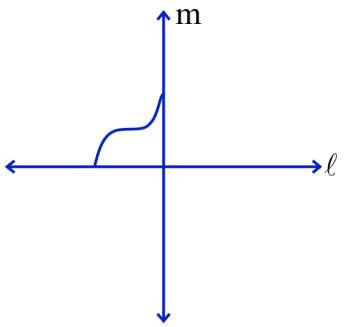


समबाहुत्रिभुजस्य 3 सममिति-रेखाः

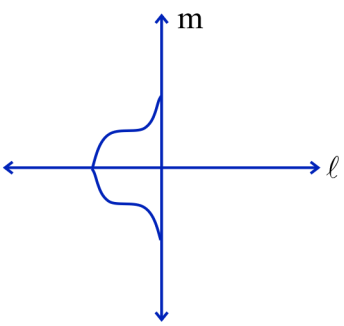
अस्याम् आकृतौ कति सममितिरेखाः सन्ति ? वयं सममिति-रेखाद्वययुक्त-आकृत्याः रचनां कर्तुं तेनैव प्रकारेण ज्ञातुं शक्नुमः यथा वयं अभ्यासः 13.1 इत्यस्य 4 प्रश्ने एकस्याः सममितिरेखायुक्ताकृत्याः कृते कञ्चन लघुभागं स्वीकृत्य कृतवन्तः आस्म।

1. भावयन्तु अस्माकं पार्श्वे दक्षिणाभिमुख्याकृतिः अस्ति यथा चित्रे दर्शितम् अस्ति।

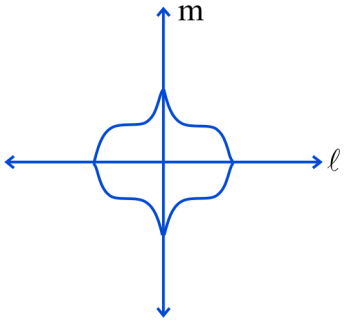
2. वयम् इमाम् आकृतिम् अनेन प्रकारेण पूरयितुम् इच्छामः यत् सममितिरेखाद्वय-युक्ताकृतिः प्राप्ता भवेत् । भावयन्तु द्वे सममितिरेखे l अपि च m स्तः।



3. वयम् एकं भागम् आकृतौ दर्शितरीत्या निर्मामः यथा रेखा l सममितिरेखा भवेत्।



4. आकृतिं पूरयितुम् अस्माभिः 1 इति रेखां परितः सममितिभागः निर्मितः भवेत् । आकृतौ दर्शितरीत्या आकृत्याः शिष्टं भागं निर्मान्तु ।

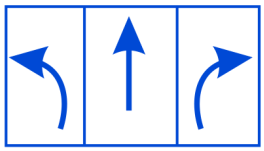


अस्याः आकृत्याः द्वे सममितिरेखे l अपि च m स्तः ।

कासुचित् आकृतिषु केवलम् एका एव सममिति-रेखा भवति । कासुचित् द्वे, कासुचित् तिस्रः, कासुचित् इतोऽपि अधिकसममितिरेखाः भवन्ति । किं भवन्तः एकाम् एतादृशीम् आकृतिं चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् यस्यां 6 सममितिरेखाः स्युः ?

सममितिः, समपितिः प्रत्येकं स्थानस्य उपरि

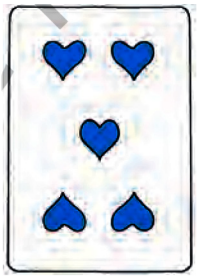
- भवन्तः प्रतिदिनम् एतादृशानि बहूनि मार्गसूचक-चिह्नानि पश्यन्ति येषु सममितिरेखाः भवन्ति । अत्र

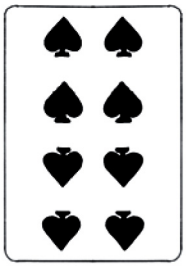


तादृशाः एव कानिचन चिह्नानि दत्तानि सन्ति : एवमेव कानिचन मार्गसूचकचिह्नानि अवगच्छन्तु अपि च निर्मान्तु । सममिति-रेखानां व्यक्तीकरणं न विस्मरन्तु ।

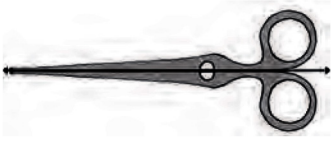
- प्रकृत्यां बहूनि वस्तूनि एवमेव सन्ति येषाम् आकृतयः सममितयः सन्ति ।

- द्यूतपत्राणाम् आकृतौ सममितिरेखाः भवन्ति । दत्त-द्यूतपत्रेषु ताः रेखाः जानन्तु ।



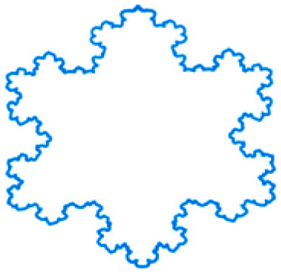


- अत्र कर्तर्याः युग्मः अस्ति । अस्मिन् कति सममितिरेखाः सन्ति ?



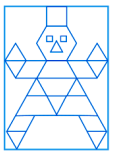
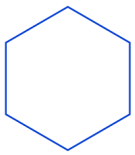
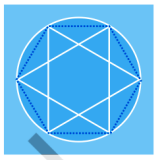
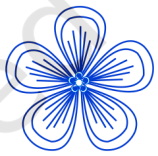
- अस्याः सन्दर-आकृत्याः निरीक्षणं कुर्वन्तु ।

एषः एकः सममिति-प्रारूपः अस्ति । यः कोच्स स्नोफ्लेक् (Koch's Snowflake) इति कथ्यते । (यदि भवतां पार्श्वे सङ्गणकमस्ति, तर्हि भवन्तः Fractals इति विषये browse इति कुर्वन्तु । एवमेव भवतां कृते बह्व्यः सुन्दर-आकृतयः द्रष्टुं लभ्यन्ते ।) एतासु आकृतिषु सममिति-रेखाः जानन्तु ।

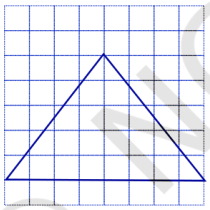
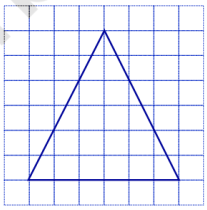
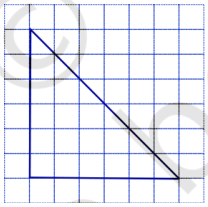
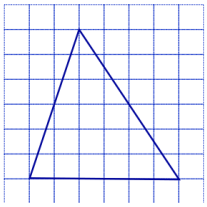


अभ्यासः 13.2

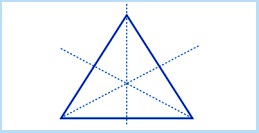
1. अधोदत्तासु प्रत्येकं आकृत्याः सममिति-रेखायाः संख्यां जानन्तु।

(a)
(b)
(c)
(d) 
(e) 
(f) 
(g)
(h)
(i) 

2. अधोदत्तासु प्रत्येकम् आकृतिषु त्रिभुजम् एकस्मिन् वर्गाङ्कितकर्गदे निर्मान्तु। प्रत्येकं त्रिभुजे यदि सन्ति चेत् तर्हि ताः सममितिरेखाः आलिखन्तु। अपि च त्रिभुजस्य प्राकारान् जानन्तु। (भवद्भ्यः कासाञ्चन आकृतीनाम् अनुरेखणं रोचते। प्रथमकर्गदं पुटीकरण-विधिना प्रयत्नं कुर्वन्तु।)

(a) 
(b) 
(c) 
(d) 

3. अधोदत्तं कोष्ठकं पूरयन्तु।

आकारः	आकृत्याः रूपम्	सममिति-रेखानां संख्या
समबाहुत्रिभुजः		3
वर्गः		
आयतः		
समद्विबाहुत्रिभुजः		
समचतुर्भुजः		
वृत्तः		

4. किं भवन्तः एतादृशम् एकं त्रिभुजं निर्मातुं शक्नुवन्ति यत् यस्मिन्

(a) केवलम् एका एव सममितिरेखा स्यात् ?

(b) केवलं द्वे सममितिरेखे स्याताम् ?

(c) तिस्रः सममितिरेखाः स्युः ?

(d) कापि सममितिरेखा न स्यात्।

प्रत्येकं सन्दर्भे आकृत्याः रूपरेखां निर्मान्तु।

5. एकस्मिन् वर्गाङ्कित-कर्गदे अधोदत्तरीत्या आकृतीः निर्मान्तु।

(a) एकः त्रिभुजः यस्मिन् क्षैतिजसममिति-रेखा स्यात् किन्तु ऊर्ध्वाधरसममितिरेखा न स्यात्।

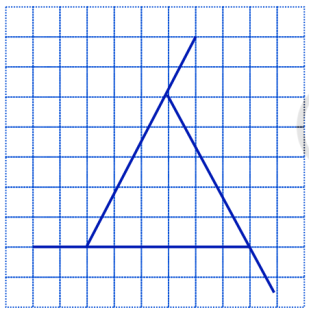
(b) एकः चतुर्भुजः यस्मिन् क्षैतिजरेखाः अपि च ऊर्ध्वाधररेखाः सममितयः स्युः।

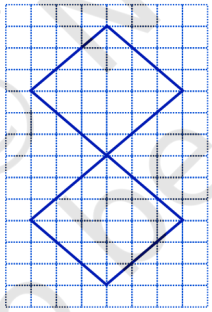
(c) एकः चतुर्भुजः यस्मिन् क्षैतिजसममिति-रेखा स्यात् किन्तु ऊर्ध्वाधरसममितिरेखा न स्यात्।

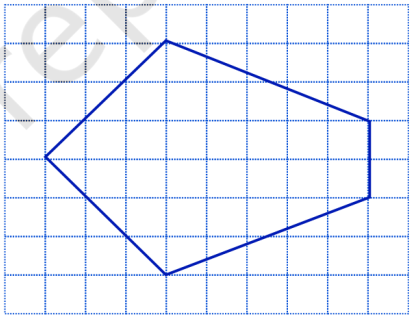
(d) एकः षड्भुजः यस्मिन् केवलं द्वे एव सममितिरेखे स्याताम्।

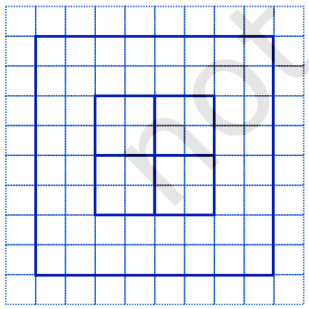
(e) एकः षड्भुजः यस्मिन् 6 सममितिरेखाः स्युः।

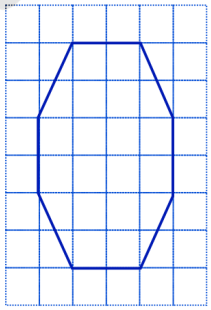
6. प्रत्येकम् आकृत्याः अनुरेखणं कुर्वन्तु अपि च सममितिरेखाः अपि आलिखन्तु।

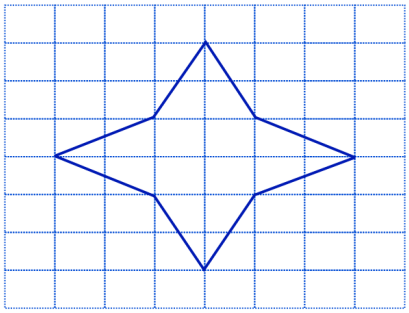
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

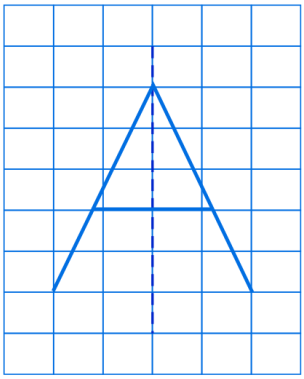
7. आङ्ग्लवर्णमालायाः A इत्यतः Z पर्यन्तं सर्वेषाम् अक्षराणां विषये विचारं कुर्वन्तु। एतेषु तेषाम् अक्षराणां सूचिकां निर्मान्तु येषु

© NCERT not to be republished

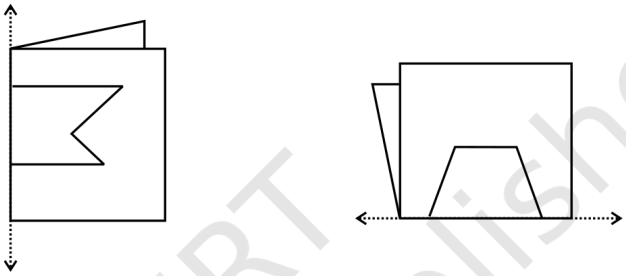
(a) ऊर्ध्वाधरसममितिरेखाः स्युः (यथा A)

(b) क्षैतिजसमापितरेखाः स्युः (यथा B)

(c) समापितरेखाः न स्युः (यथा Q)



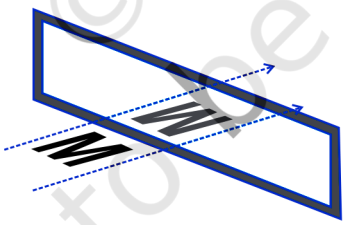
8. अत्र काश्चन पुटीकृताकृतयः दत्ताः सन्ति यासां तले आकृतयः निर्मिताः सन्ति। प्रत्येकम् आकृतौ पूर्णाकृतेः रूपरेखाम् आलिखन्तु या आकृत्याः कर्तनानन्तरं दृश्यते।

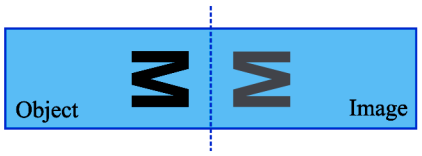


13.5 प्रतिबिम्बः सममितिश्च

सममितिरेखाः अपि च दर्पणप्रतिबिम्बाः परस्परं प्राकृतिकरूपेण सम्बन्धिताः सन्ति ।

अत्र एका आकृतिः दत्ता अस्ति यस्याम् आङ्ग्लाक्षरस्य M इत्यस्य प्रतिबिम्बः दर्शितः अस्ति। भवन्तः कल्पयन्तु यत् दर्पणः अदृश्यः अस्ति तथा च भवन्तः केवलम् अक्षरस्य M इत्यस्य तथा तस्य छायाम् अथवा प्रतिबिम्बं द्रष्टुं शक्नुवन्ति।

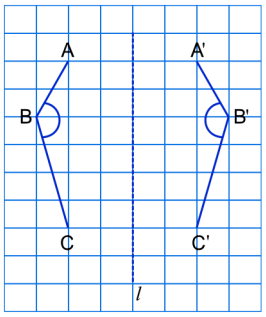




वस्तु अपि च तस्य प्रतिबिम्बः परस्परं दर्पणरेखायाः सन्दर्भे सममिती स्तः। यदा एकः कर्गदः पुटीक्रियते तदा दर्पणरेखा सममितिरेखा भवति। तदा वयं वदामः यत् प्रतिबिम्बदर्पणरेखायां वस्तुनः प्रतिबिम्बः अस्ति। भवन्तः एतदपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यदा वस्तु परावर्तितं भवति तर्हि तस्य लम्बेषु अपि च कोणेषु किञ्चिदपि परिवर्तनं न भवति, अर्थात् वस्तुनः लम्बः अपि च कोणः तथा च छायायाः लम्बः अपि च कोणः समानः भवति। यद्यपि एकस्मिन् पार्श्वे परिवर्तितम् अपि भवति अर्थात् एकं वस्तु तथा च तस्य छायायाम् अन्तरं भवत्येव। किं भवन्तः कल्पयितुं शक्नुवन्ति यत् एतत् अन्तरं किम् अस्ति ?

(सङ्केतः - स्वात्मानमेव दर्पणे पश्यन्तु।)

एतत् कुर्वन्तु



एकस्य वर्गाङ्कित-कर्गजस्योपरि एकाम् आकृतिं निर्मान्तु ABC इति नामनिर्देशनं कुर्वन्तु। अस्य दर्पणरेखा l इत्यस्मिन् A'B'C' जानन्तु।

AB अपि च A'B'; BC अपि च B'C'; AC अपि च A'C'; एतेषां लम्बानां तुलनां कुर्वन्तु।

किं एते पृथक् सन्ति ?

किं प्रतिबिम्बः एकस्य रेखाखण्डस्य लम्बं परिवर्तयति ? ABC अपि च A'B'C' इत्यनयोः कोणानां मापानां तुलनां कुर्वन्तु। (कोणमापिकायाः साहाय्येन मापनं कुर्वन्तु)। किं प्रतिबिम्बः कोणानाम् आकारं परिवर्तयति ?

AA', BB' अपि च CC' इत्येतान् मेलयन्तु। कोणमापिकायाः साहाय्येन l अपि च AA`, l अपि च BB`, l अपि च CC` एतेषां मध्ये निर्मितकोणान् मापयन्तु।

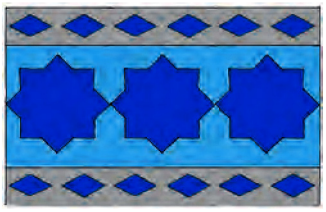
दर्पणरेखा l, कोऽपि बिन्दुः, तस्य प्रतिबिम्बः इति एतेषां मेलनेन निर्मित-रेखा-खण्डानां मध्ये विद्यमान-कोणानां विषये भवन्तः किं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

यदि भवन्तः दर्पणस्य पुरतः 100 से.मी. दूरे सन्ति तर्हि भवतां प्रतिबिम्बः कुत्र भविष्यति ? यदि भवन्तः दर्पणं प्रति गच्छन्ति तर्हि भवतां प्रतिबिम्बः केन प्रकारेण चलति ?

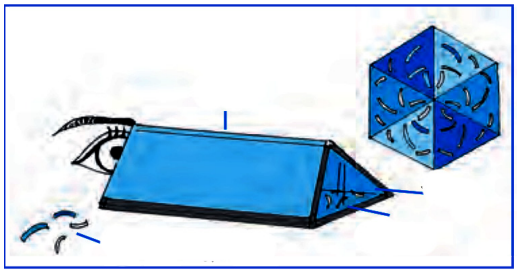
एतत् कुर्वन्तु

कर्गदानां द्वारा प्रतिचित्रम्



एकम् आयताकारं वर्णयुक्तं कृशकर्गदं स्वीकुर्वन्तु। एतत् अनेकवारं पुटीकुर्वन्तु अपि च कर्गदे कतिचन जटिलानि प्रतिरूपाणि निर्मान्तु यथा आकृतौ दर्शितमस्ति। वारं वारम् आगमिष्यमाणेषु प्रतिचित्रेषु सममितिरेखाः जानन्तु। पर्वसु इत्थं कर्तित-कर्गदानां प्रयोगं कुर्वन्तु।

बहुरूपदर्शकः

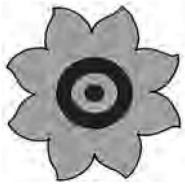
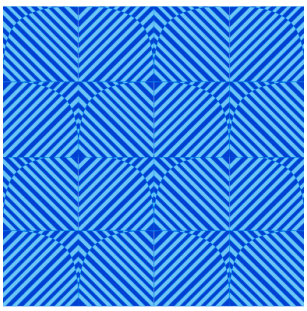


अनेकदर्पणयुक्ते बहुरूपदर्शके अनेके प्रतिबिम्बाः भवन्ति यथा चित्रे दर्शितमस्ति। प्रायः दर्पणद्वयम् V इत्याकारे स्थापयित्वा प्रयोगः क्रियते। दर्पणानां मध्ये जनितकोणाः सममितिरेखानां संख्यां वदन्ति।

एकं बहुरूपदर्शकं निर्मान्तु अपि च अनेन निर्मितसममिति-आकृतीनाम् अन्यविषयान् ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

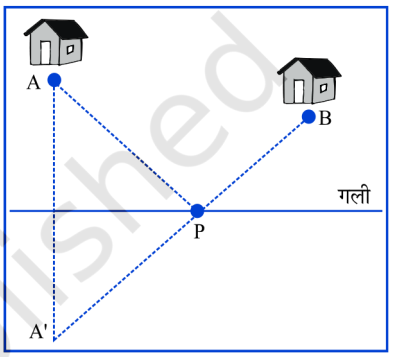
चित्राधारः

सममिति-प्रतिचित्राणि एकत्रीकृत्य एकं चित्राधारं निर्मान्तु । अत्र कानिचन प्रतिरूपाणि दत्तानि सन्ति ।

परावर्तीय-सममित्याः उपयोगः

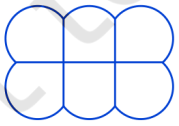
एकः पत्रिकावितरकः बालकः स्व-द्विचक्रिकाम् एकस्मिन् बिन्दौ 'P' इत्यत्र स्थापयति एवं A अपि च B इति गृहाभ्यां पत्रिकायाः वितरणं करोति। तेन स्व-द्विचक्रिका कुत्र स्थापनीया येन AP + BP इत्यनयोः दूरं न्यूनतमं स्यात् ?



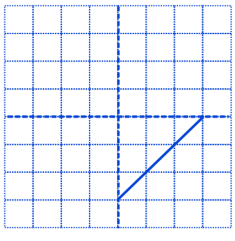
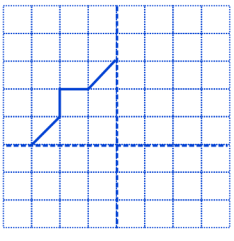
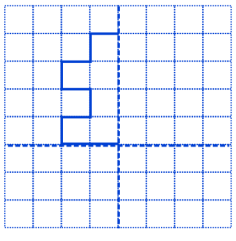
भवन्तः अत्र परावर्तीय-सममित्याः प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति । मार्गस्य दर्पण-रेखा-स्वीकारेण, भावयन्तु A इत्यस्य प्रतिबिम्बः A' प्राप्यते । तदा वयं वक्ष्यामः यत् बिन्दुः P इति द्विचक्रिकां स्थापयितुम् उपयुक्तं स्थानम् अस्ति। (यत्र दर्पणरेखा A', B इत्यस्य कर्तनं करोति।) किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति किमर्थमिति ?

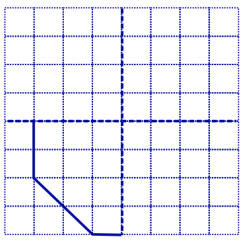
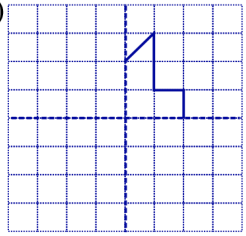
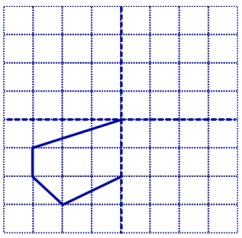
अभ्यासः 13.3

1. अधोदत्ताकृतिषु सममिति-रेखानां संख्यां जानन्तु । भवन्तः भवताम् उत्तरस्य परीक्षणं केन प्रकारेण कुर्वन्ति ?

(a)
(b)
(c)
(d) 
(e)
(f)

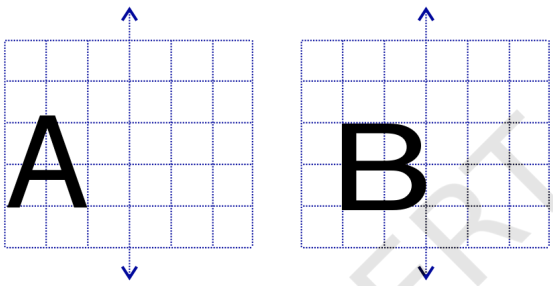
2. अधोदत्तानि आरेखणानि वर्गाङ्कितकर्गदे निर्मान्तु । प्रत्येकमपि पूरयन्तु येन प्राप्ताकृतौ द्वे बिन्दु-अङ्कितरेखे द्वयोः सममिति-रेखयोः रूपेण स्याताम् ।

(a) 
(b) 
(c) 

(d)  (e)  (f) 

भवन्तः एताः आकृतीः कथं पूरितवन्तः ।

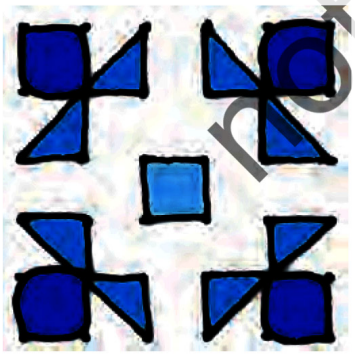
3. अधोदत्तेषु प्रत्येकम् आकृतिषु आङ्ग्लवर्णमालायाः एकम् अक्षरम् ऊर्ध्वाधररेखया सह दर्शितम् अस्ति । अस्य अक्षरस्य दत्तदर्पणरेखायां प्रतिबिम्बं स्वीकुर्वन्तु । वदन्तु कतमम् अक्षरं परिवर्तनानन्तरं समानं भवति ? अपि च कतमं न भवति ? किं भवन्तः कल्पनां कर्तुं शक्नुवन्ति ?

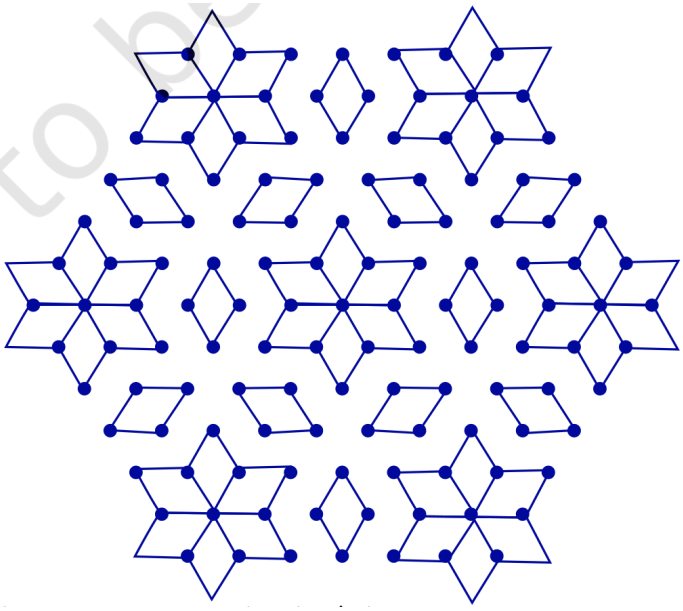


O E M N P H L T S V X इत्येतेषां कृते प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

रङ्गवल्ली-प्रतिरूपम्

स्तम्भाकृतयः अपि च रङ्गवल्यः अस्माकं देशे बहुप्रसिद्धाः सन्ति । कानिचन प्रतिरूपाणि अत्र दत्तनि सन्ति । तेषु सममित्याः प्रयोगस्य उपरि अवधानं यच्छन्तु । यावन्ति शक्यन्ते तावन्ति प्रतिरूपाणि एकत्रीकुर्वन्तु एवम् एकं चित्राधारं निर्मान्तु ।





एतेषु प्रतिरूपेषु सममितिरेखाभिः सह सममिति-भागानाम् अन्वेषणं कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु ।

© NCERT not to be republished

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. एकस्याम् आकृतौ सममितिरेखा भवति, यदि एका आलेखितरेखा आकृतिं द्वयोः समानभागयोः मध्ये विभाजयति तर्हि सा रेखा एव सममितिरेखा इत्युच्यते ।

2. एकस्याम् आकृतौ कापि सममितिरेखा भवितुं न शक्यते, केवलम् एका सममितिरेखा, द्वे सममितिरेखे अथवा अनेकाः सममितिरेखाः भवितुं शक्नुवन्ति । अत्र कानिचन उदाहरणानि दत्तनि सन्ति ।

सममित्याः रेखानां संख्या	उदाहरणम्
कापि सममितिरेखा नास्ति	एकः विषमबाहु-त्रिभुजः
केवलम् एका सममितिरेखा	एकः समद्विबाहु-त्रिभुजः
द्वे सममितिरेखे	एकः आयतः
तिस्रः सममितिरेखाः	एकः समबाहुत्रिभुजः
अनेकाः सममितिरेखाः	एकः वृत्तः

3. रैखिक-सममितिः परावर्तनेन सम्बन्धिता भवति । यदा वयं परावर्तनस्य विषये चर्चां कुर्मः, तदा अस्माभिः वामे दक्षे च अभिमुखाः भवितुं ध्यानं दातव्यम् ।
अस्माकं दैनिकजीवने बहुत्र सममित्याः उपयोगाः सन्ति, यथा कलासु, शिल्पविद्यायाम्, वस्त्रोद्योगे, प्रतिचित्रनिर्माणे, ज्यामितीय-तर्के,स्तम्भेषु, रङ्गवल्लीषु ।

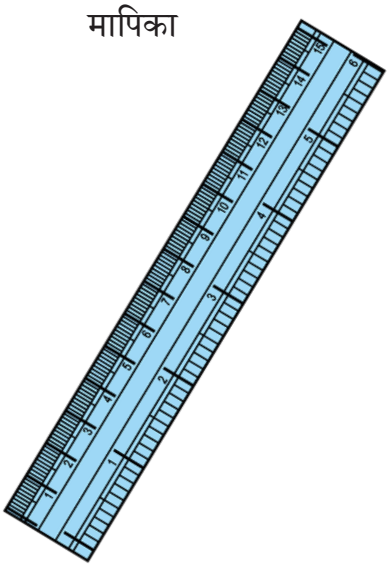
प्रायोगिक-ज्यामितिः

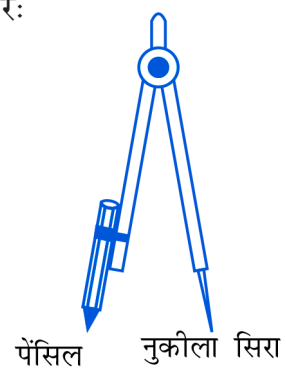
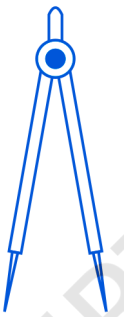
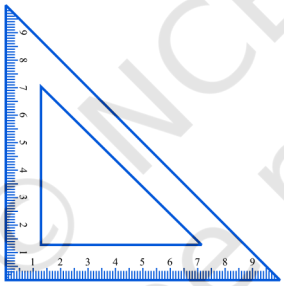
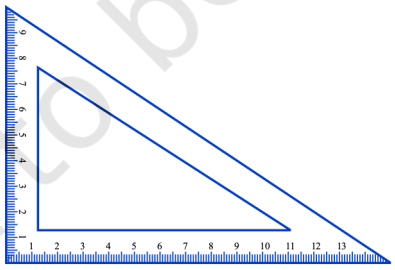
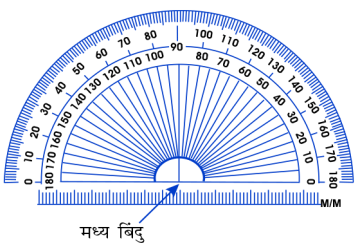
अध्यायः 14

14.1 भूमिका

वयम् अनेकप्रकारकान् आकारान् पश्यामः, यैः वयं परिचिताः स्मः । वयं बहुचित्राणि रचयामः । तेषु चित्रेषु विभिन्नाः आकाराः निहिताः भवन्ति । वयम् एतेषु आकारेषु केषाञ्चन आकाराणां विषये पूराध्यायेषु पठिताः अपि स्मः । भवन्तः एतेषाम् आकाराणाम् एकां सूचीं निर्मान्तु यत् एते येन प्रकारेण प्रकटिताः भवन्ति ।

अस्मिन् अध्याये वयम् एतान् आकारान् निर्मातुं शिक्षामः । एतान् निर्मातुं अस्माभिः यन्त्राणां विषये ज्ञातव्यं भवति । आयान्तु, एतान् पश्यामः तथा तेषां नाम अपि च प्रयोगस्य विषये ज्ञानं प्राप्स्यामः ।

क्र.सं.	नाम	आकृतिः	विवरणम्	प्रयोगः
1.	मापिका		सैद्धान्तिक-रूपेण एकस्यांमापिकायां किमपि चिह्नं न भवति । परन्तु भवतां ज्यामिति-पेटिकायाः मापिकायां एकस्मिन् प्रान्तभागे सेण्टीमीटर् इत्यस्मिन् चिह्नानि भवन्ति । (तथा अपरस्मिन् भागे चिह्नानि इञ्च् (inch) मध्ये भवन्ति ।)	रेखाखण्डानाम् आलेखनं तथा च तेषां लम्बानां मापनम्

2.	परकारः		अस्य शीर्षद्वयं भवति। एकं शीर्षं तीक्ष्णं भवति। अपरे च अङ्कनी-स्थापनस्थानं भवति।	समानलम्बान् अङ्कितुं किन्तु मापनं कर्तुं नास्ति। अर्धवृत्तम् अपि च वृत्तम् आलेखितुम् अस्य उपयोगं कुर्मः।
3.	विभाजनी		अस्य तीक्ष्णं शीर्षद्वयं भवति।	लम्बानां तोलनं कर्तुम् अस्य उपयोगं कुर्मः।
4.	वर्गमापिका	 	त्रिभुजाकारवस्तुद्वयम् अस्ति। एकस्मिन् कोणाः 45°, 45°, 90° सन्ति। अपरे कोणाः 30°, 60°, 90° सन्ति।	लम्बरेखाणां तथा समानान्तररेखाणाम् आलेखनम्।
5.	चान्द्रिका		एकम् अर्धवृत्ताकारं वस्तु अस्ति यस्योपरि 180 भागाः चिह्निताः भवन्ति। एतत् मापनं दक्षिणतः 0° इत्यतः आरभ्य 180° पर्यन्तं भवति अपि च दक्षिणतः 0° इत्यतः आरभ्य 180° पर्यन्तं भवति।	कोणानाम् आलेखनं तथा मापनम्।

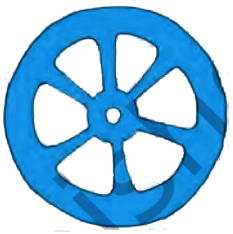
वयं **मापिकायाः परकरस्य च रचनायाः** उपरि विचारं कर्तुं गच्छन्तः स्मः । एतयोः केवलं रेखानाम् आलेखने मापिकायां प्रयोगं तथैव केवलं अर्धवृत्तस्य आलेखने परकरस्य प्रयोगं कुर्मः । एतासां रचनानां निर्माणसमये पूर्णम् अवधानं ददतु । अत्र भवतां साहाय्यार्थं काश्चन सूचनाः दीयमानाः सन्ति ।

(a) पूर्वं रेखाः आलिखन्तु अपि च सधारणबिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु ।

(b) स्वस्य मापकानि तीक्ष्णशीर्षाणि कृशप्रान्तभागानि च निर्माय स्थापयन्तु ।

(c) स्वपेटिकायां अङ्कनीद्वयं स्थापयन्तु । एका परकारे योजयितुम् अन्या च रेखायाः, अर्धवृत्तस्य आलेखने अथवा बिन्दूनाम् अङ्कनार्थम् उपयुज्येते ।

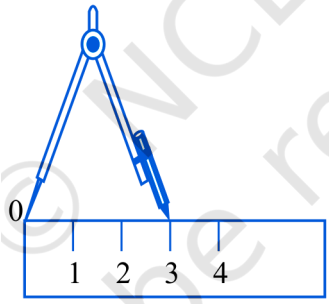
14.2 वृत्तः

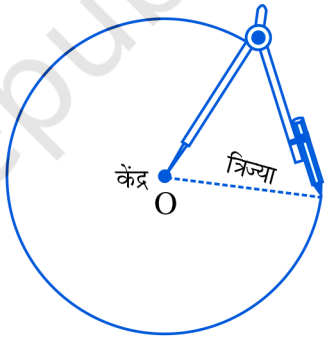


दर्शितानि चक्राणि पश्यन्तु । अस्य परिसीमायाः उपरि स्थितः प्रत्येकं बिन्दुः अस्य केन्द्रात् समाने दूरे अस्ति । किं भवन्तः इतोऽपि अन्यवस्तूनि वक्तुं शक्नुवन्ति तथा तेषाम् आलेखनं कर्तुं शक्नुवन्ति ? एतादृशपञ्चवस्तूनां विषये चिन्तयन्तु यानि एतदकारकाणि स्युः ।

14.2.1 यदा वृत्तस्य त्रिज्या ज्ञाता भवेत् तदा तस्य आलेखनम् ।

भावयन्तु वयं 3 सेमी त्रिज्यायाः एकं वृत्तम् आलेखितुम् इच्छामः इति । अस्माभिः अत्र परकारस्य प्रयोगः कर्तव्यः । वयम् अधोलिखित-सोपानानाम् अनुसरणं कर्तुं शक्नुमः ।





सोपानम् 1 : परिकरं 3 सेमी वाञ्छितत्रिज्यायाः कृते उद्धाटयन्तु ।

सोपानम् 2 : एकस्याः तीक्ष्णाङ्कन्याः तं बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु यं वयं वृत्तस्य केन्द्रं कर्तुम् इच्छामः । तं बिन्दुं O इति नामनिर्देशनं कुर्वन्तु ।

सोपानम् 3 : परकारस्य तीक्ष्णशीर्षं बिन्दोः O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु ।

सोपानम् 4 : वृत्तम् आलेखितुं परकारं मन्दं मन्दं भ्रामयन्तु । ध्यानं भवतु यत् वृत्तम् एकवारमेव पूर्णं भवेत् ।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु ।

किं भवन्तः केन्द्रं O इति, एकं बिन्दुं P इति च स्वीकृत्य कति वृत्तान् आलेखितुं शक्नुवन्ति ?

अभ्यासः 14.1

1. 3.2 से.मी. त्रिज्यायाः एकं वृत्तम् आलिखन्तु ।

2. एकमेव केन्द्रं O स्वीकृत्य 4 सेमी अपि च 2.5 सेमी त्रिज्यायाः वृत्तद्वयम् आलिखन्तु।
3. एकं वृत्तम् अपि च च तस्य व्यासद्वयम् आलिखन्तु । यदि भवन्तः एतयोः व्यासयोः शीर्षाणि योजयेयुः, तर्हि कीदृशी आकृतिः प्राप्यते ? यदि व्यासः परस्परं लम्बः भवेत् तर्हि आकृतिः कीदृशी भवति ? भवन्तः स्वस्य उत्तरस्य परीक्षणं केन प्रकारेण कुर्वन्ति ?
4. एकं वृत्तम् आलिखन्तु तथा च बिन्दून् A,B,C अनेन प्रकारेण अङ्कितान् कुर्वन्तु यत्
   (a) A वृत्तस्य उपरि स्थितः स्यात्।
   (b) B वृत्तस्य अभ्यन्तरे स्थितः स्यात्।
   (c) C वृत्तस्य बहिर्भागे स्थितः स्यात्।
5. भावयन्तु A अपि च B द्वयोः वृत्तयोः समान-त्रिज्या-युक्तौ केन्द्रौ स्तः । एतौ अनेन प्रकारेण आलिखन्तु यथा एकः वृत्तः अपरवृत्तस्य केन्द्रं स्पृष्ट्वा गच्छेत्। एतौ C अपि च D इत्यनयोः उपरि प्रतिच्छेदं कर्तुं त्यजन्तु। $\overline{AB}$ अपि च $\overline{CD}$ परस्परं समकोणस्य उपरि एव स्तः वा इति परीक्षणं कुर्वन्तु।

14.3 एकः रेखाखण्डः

स्मरन्तु यत् एकस्मिन् रेखाखण्डे द्वौ अन्त्यबिन्दू भवतः। अतः एव वयम् अस्य लम्बं मापिकया मापनं कर्तुं शक्नुमः। यदि अस्माभिः कस्यापि रेखाखण्डस्य लम्बः ज्ञातः स्यात् तर्हि एतम् एकया आकृतिना निरूपणं कर्तुं शक्नुमः। आयान्तु, पश्याम यत् वयम् इत्थं कथं कुर्मः इति।

14.3.1 एकस्य दत्तलम्बस्य रेखाखण्डस्य संरचना

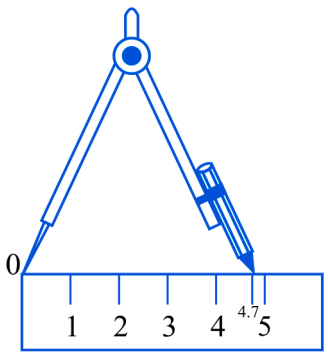
भावयन्तु यत् वयं 4.7 से.मी. लम्बस्य एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुम् इच्छामः। वयं मापिकायाः प्रयोगं कृत्वा 4.7 से.मी. दूरे बिन्दुद्वयं A अपि च B इति अङ्कितं कुर्मः। A अपि च B इत्यनयोः मेलनं कुर्मः चेत् अस्माभिः रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इति प्राप्यते। बिन्दुं A अपि च B इत्यस्य अङ्कनसमये अस्माभिः मापिकायाः उपरि साक्षात् अधः द्रष्टव्यम्। अन्यथा अस्माभिः समीचीनम् उत्तरं न प्राप्यते।

मापिका तथा च परकार इति यन्त्रस्य प्रयोगः

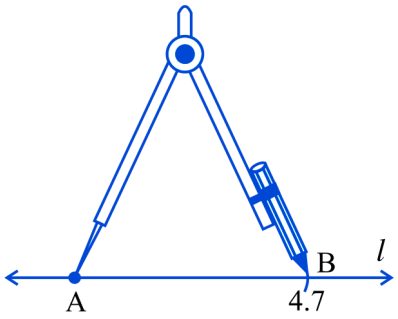
एकः समुचितविधिः एषः भवति यत् दत्तलम्बस्य एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुं परकार इति यन्त्रस्य प्रयोगः कर्तव्यः।

सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि एकं बिन्दुं A इत्याख्यम् अङ्कयन्तु।

सोपानम् 2 : परकारस्य तीक्ष्णप्रान्तभागं मापिकायाः शून्यस्य उपरि स्थापयन्तु। परकारम् एवम् उद्घाटयन्तु यत् अङ्कनीसहितप्रान्तः 4.7 से.मी. चिह्नस्य उपरि आगच्छेत्।



सोपानम् 3 : परकारस्य विस्तरणे किमपि परिवर्तनं न स्यात्, तस्य तीक्ष्णं प्रान्तं A इत्यस्मिन् बिन्दौ स्थापयन्तु अपि च 1 इत्याख्यं B इत्यस्य उपरि कर्तयन्तः एकम् अर्धवृत्तं स्थापयन्तु।



सोपानम् 4 : $\overline{}$ वाञ्छितलम्बस्य 4.7 से.मी. मापस्य एकः रेखाखण्डः अस्ति।

अभ्यासः 14.2

1. मापिकायाः प्रयोगं कृत्वा 7.3 लम्बस्य एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।
2. मापिकायाः अपि च परकारस्य प्रयोगं कुर्वन्तः 5.6 से.मी. लम्बस्य एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।
3. 7.8 से.मी. लम्बस्य AB इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु। अस्मिन् AC कर्तयन्तु यस्य लम्बः 4.7 से.मी. भवेत्। BC इत्यस्य मापनं कुर्वन्तु।
4. 3.9 से.मी. लम्बस्य एकः रेखाखण्डः AB दत्तः अस्ति। एकं रेखाखण्डं PQ आलिखन्तु यः AB इत्यस्य द्विगुणितः स्यात्। मापयित्वा परीक्षणं कुर्वन्तु।

(सङ्केतः – $\overline{AB}$ इत्यनेन समानं $\overline{PX}$ रेखाखण्डं निर्मान्तु ; अनन्तरं पुनः $\overline{AB}$ इत्यनेन समानं $\overline{XQ}$ इत्यस्य कर्तनं कुर्वन्तु।)

5. 7.3 से.मी. लम्बस्य AB रेखाखण्डः तथा च 3.4 से.मी. लम्बस्य CD रेखाखण्डश्च दत्तः अस्ति। एकं रेखाखण्डं XY आलिखन्तु यतः XY इत्यस्य लम्बः AB अपि च CD इत्यनयोः लम्बयोः अन्तरेण समानः अस्ति।

14.3.2 एकेन रेखाखण्डेन समानरेखाखण्डस्य संरचना

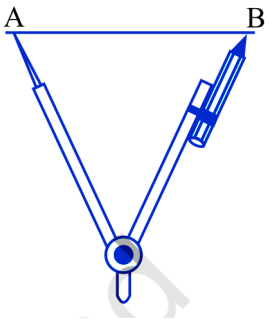
भावयन्तु यत् भवन्तः एतादृशस्य एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुम् इच्छन्ति यत् यस्य लम्बः दत्तस्य एकस्य रेखाखण्डस्य $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बेन समानं स्यात्।

एकः शीघ्रविधिः अपि च स्वाभाविकविधिः एषः भविष्यति यत् भवन्तः मापिकायाः प्रयोगं कुर्युः। (यस्योपरि सेण्टी.मीटर् अपि च मिलीमीटर् इत्यनयोः चिह्नानि अङ्कितानि स्युः।) तया $\overline{AB}$ इत्यस्य मापनं कृतं स्यात् अपि च पुनः तस्य एव लम्बस्य प्रयोगं कृत्वा एकः रेखाखण्डः $\overline{CD}$ इत्याख्यः आलिखितः स्यात्। एकः अपरः विधिः एषः भविष्यति यत् एकस्य पारदर्शक-कर्गदस्य प्रयोगं कृत्वा $\overline{AB}$ इत्याख्यं कर्गदस्य अन्यस्मिन् भागे अभिलेखः कृतः भवेत्। परन्तु एतैः विधिभिः सर्वदा समीचीनः एव परिणामः न प्राप्यते।

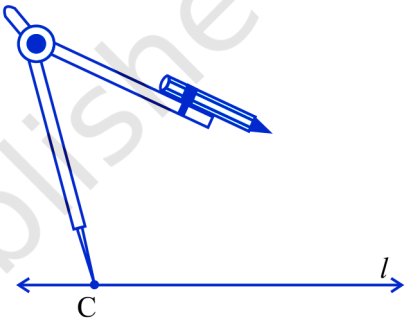
एकः इतोऽपि समुचितविधिः भवति यत् रचनार्थं मापिका अपि च परकार इत्यस्य प्रयोगः कृतः स्यात्। $\overline{AB}$ इत्यस्य रचनार्थम् अधोलिखितानि सोपानानि अनुसरामः।

सोपानम् 1 : रेखाखण्डः $\overline{AB}$ दत्तः अस्ति, यस्य लम्बः ज्ञातः नास्ति।

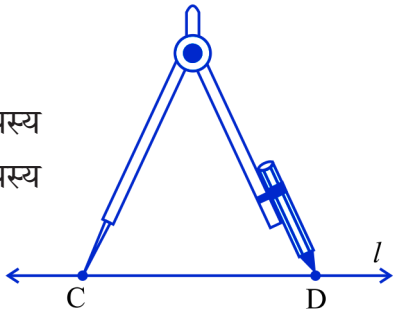
सोपानम् 2 : परकार इत्यस्य तीक्ष्णप्रान्तं A इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु एवम् अङ्कनीं B इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। परकार इत्यस्य उद्घाटितभागः $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बं वदति।



सोपानम् 3 : कामपि रेखां l आलिखन्तु। l इत्यस्य उपरि कमपि C इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। परकारस्य विस्तरणे किमपि परिवर्तनं विना तस्य तीक्ष्णप्रान्तं C इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु।



सोपानम् 4 : एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः l इत्याख्यं D इत्यस्य उपरि कर्तयेत्। अधुना $\overline{CD}$ एव $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बेन समानः रेखाखण्डः अस्ति।



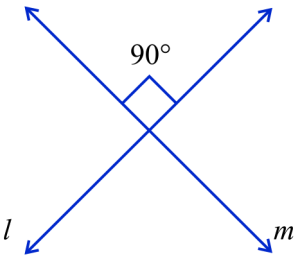
अभ्यासः 14.3

1 कमपि रेखाखण्डं $\overline{PQ}$ आलिखन्तु। मापनम् अकृत्वैव $\overline{PQ}$ इत्यनेन समानम् एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।

2. रेखाखण्डः $\overline{AB}$ दत्तः अस्ति यस्य लम्बः ज्ञातः नास्ति। एकस्य रेखाखण्डस्य $\overline{PQ}$ इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य लम्बः $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बस्य द्विगुणितः अस्ति।

14.4 लम्बरेखाः

भवन्तः जानन्ति यत् द्वे रेखे परस्परं लम्बरेखे इत्युच्येते यदि ते इत्थं प्रतिच्छेदं कुरुतः यत् तयोः मध्यस्थकोणः समकोणः स्यात्। संलग्नाकृतौ l अपि च m परस्परं लम्बरेखे स्तः। एकं पूर्णकर्गदम्

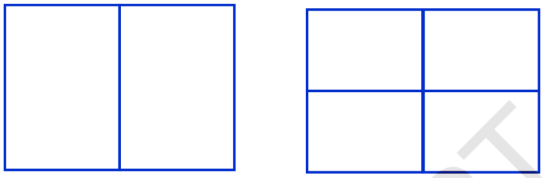


अथवा अभ्यास-पुस्तकस्य प्रान्तभागः दर्शयति यत् द्वे रेखे परस्परं समकोणे स्तः ।

एतत् कुर्वन्तु

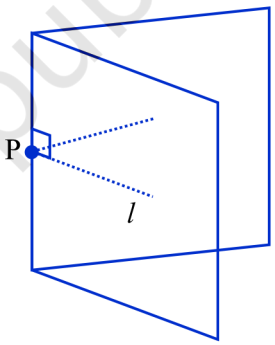
भवन्तः स्वपरिवेशे कुत्र कुत्र लम्बरेखाः पश्यन्ति ?

एकं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु अपि च तन्मध्ये पुटीकुर्वन्तु तथा पुटचिह्नं निर्मान्तु । एतदेव कर्गदं मध्ये अन्यस्मिन् दिशि पुटीकुर्वन्तु । पुटचिह्नं निर्मान्तु अपि च कर्गदम् उद्घाटयन्तु । द्वे अपि पुटचिह्ने परस्परं लम्बौ स्तः ।



14.4.1 एकस्याः दत्तरेखायाः उपरि स्थितबिन्दोः लम्बालेखनम्

एका रेखा l कर्गदस्य उपरि आलिखिता अस्ति अपि च P इति तस्य उपरि स्थितः एकः बिन्दुः अस्ति । l इत्यस्य उपरि P इत्यस्मात् लम्बालेखनं सरलम् अस्ति ।



वयं कर्गदं केवलम् इत्थं पुटीकर्तुं शक्नुमः यत् पुटचिह्नस्य द्वितीयपार्श्वे स्थितस्य l इत्यस्य भागः परस्परं आच्छादयेत् । वर्गाङ्कितकर्गदम् अथवा पारदर्शकं कर्गदं क्रियाकलापाय सम्यक् भवति । आयान्तु, एकं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु अपि च तस्योपरि l आलिखन्तु । अधुना l इत्यस्य उपरि कमपि बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु ।

अधुना कर्गदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् l स्वस्योपरि एव परावर्तिता भवेत् । अर्थात् स्वस्य उपरि पतेत् । पुटचिह्नम् इत्थं समायोजितं कुर्वन्तु यत् तत् P इत्यस्मात् गच्छेत् । कर्गदम् उद्घाटयन्तु । पुटचिह्नं P इत्यस्मात् गच्छत् रेखायाः l इत्यस्य उपरि लम्बः अस्ति ।

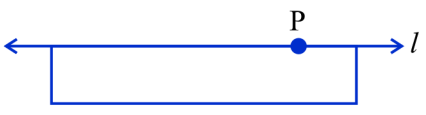
चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु च

भवन्तः अस्य परीक्षणं कथं कुर्वन्ति यत् एषा रेखा l इत्यस्य उपरि लम्बः अस्ति ? ध्यानं ददातु यत् रेखा P इत्यस्मात् गच्छति ।

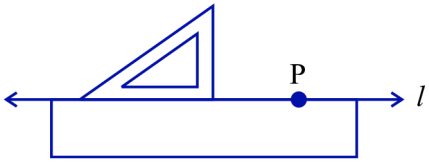
एकम् आह्वानम् : मापिकायाः अपि च च वर्गमापिकायाः साहाय्येन लम्बालेखनम् (एकः ऐच्छिकः क्रियाकलापः) ।

सोपानम् 1 : एका रेखा l एवम् एकः बिन्दुः P दत्तः अस्ति । ध्यानं ददतु यत् P इति बिन्दुः l इति रेखायाः उपरि अस्ति ।

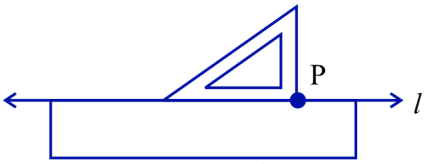
सोपानम् 2 : मापिकायाः एकं प्रान्तभागं रेखायाः l इत्यस्याः अनुदिशं स्थापयन्तु अपि च दृढतया गृह्णन्तु ।



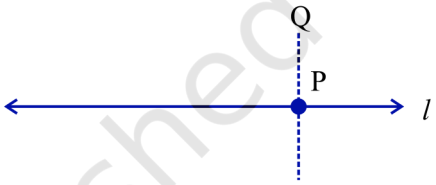
सोपानम् 3 : एकां वर्गमापिकाम् इत्थं रेखायाः l इत्यस्याः उपरि स्थापयन्तु यत् तस्याः समकोणं निर्मीयमाणः एकः प्रान्तः मापिकायाः तस्य प्रान्तभागस्य अनुदिशि भवेत् या रेखा l इत्यनया रेखया सह युक्ता अस्ति तथा वर्गमापिकायाः समकोणयुक्तकोणः अपि मापिकायाः स्पर्शनं कुर्यात्।



सोपानम् 4 : वर्गमापिकां मापिकायाः अनुदिशि तावत् पर्यन्तम् अपसारयन्तु यावत् पर्यन्तं तस्याः समकोणयुक्तः कोणः P इति बिन्दोः उपरि नागच्छेत्।



सोपानम् 5 : अस्यां स्थितौ वर्गमापिकां दृढतया गृहीत्वा तिष्ठन्तु। वर्गमापिकायाः समकोणस्य अपरप्रान्तस्य अनुदिशि $\overline{PQ}$ आलिखन्तु।



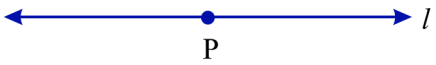
$\overline{PQ}$ रेखायाः l इत्यस्याः उपरि लम्बः अस्ति। (भवन्तः एतत् दर्शयितुं संकेतं $\perp$ इदं कथं प्रयोगं कुर्वन्ति ?)

P इति बिन्दोः उपरि सम्भूतकोणं मापयित्वा रचनायाः अस्याः परीक्षणं कुर्वन्तु। किं वयं मापिकायाः स्थानस्य उपरि रचनायाः अस्याः कृते अपरवर्गमापिकायाः प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ? अस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

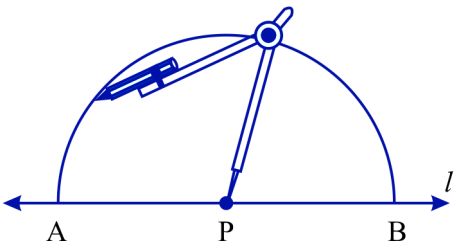
मापिकायाः अपि च परकारस्य विधिः

ज्यामित्यां लम्बम् आलेखितुं यस्य विधेः कृते प्राथम्यं दीयते सः एव मापिका-परिकारविधिः अस्ति। इमां रचनाम् अधः प्रस्तुतीकुर्मः।

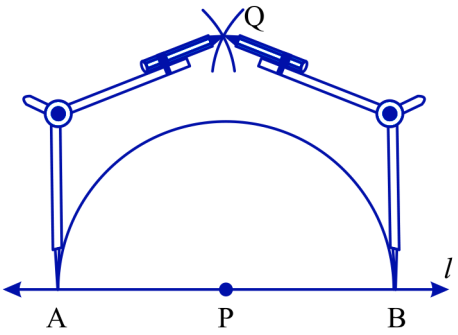
सोपानम् 1 : एकस्याः रेखायाः l इत्यस्याः उपरि P इति बिन्दुः दत्तः अस्ति।



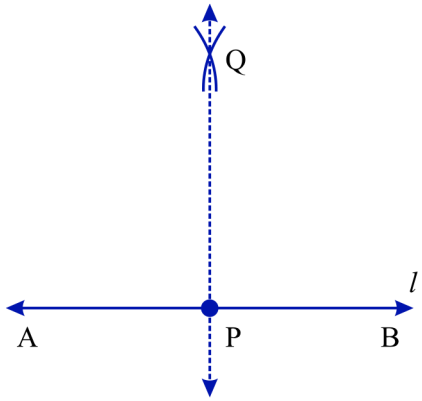
सोपानम् 2 : P इत्याख्यं बिन्दुं केन्द्रः इति मत्वा तथा च एकां सौविध्यदायकं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः l इत्याख्यं A अपि च B इति बिन्दुद्वये प्रतिच्छेदयेत्।



सोपानम् 3 : A अपि च B एतद् द्वयं केन्द्रौ इति मत्वा अपि च AP इत्यस्मात् अधिकत्रिज्यां स्वीकृत्य द्वयोः अर्धवृत्तयोः रचनां कुर्वन्तु यौ परस्परं Q इत्यस्य उपरि कर्तयेताम्।



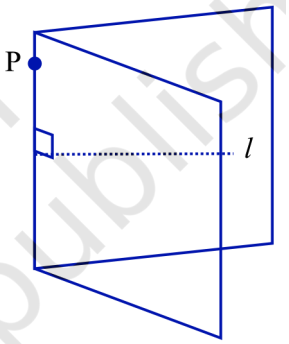
सोपानम् 4 : PQ इत्याख्यं योजयन्तु तदा $\overleftrightarrow{PQ}$ एव l इत्यस्याः उपरि लम्बः अस्ति। वयम् इदं $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ इति लिखामः।



14.4.2 एकस्याः रेखायाः उपरि तस्मात् बिन्दोः लम्बः यः तस्याः उपरि स्थितः नास्ति

एतत् कुर्वन्तु

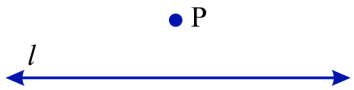
यदि अस्माकं कृते l इति लम्बः दत्तः अस्ति एवम् एकः तादृशः बिन्दुः दत्तः अस्ति यः रेखायाः l इत्यस्याः उपरि स्थितः नास्ति तर्हि P इत्यस्मात् चलन्तं रेखायाः l इत्यस्याः उपरि लम्बम् आलेखितुं वयं पूर्वं कर्गदपुटीकरणस्य सरलं क्रियाकलापं कर्तुं शक्नुमः।



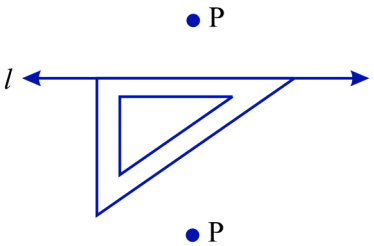
एकं कर्गदं स्वीकुर्वन्तु (पारदर्शकं स्यात्)। तस्योपरि एकां रेखां l इति आलिखन्तु अपि च कमपि बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु यः l इत्यस्याः उपरि स्थितः न स्यात्। कर्गदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् पुटस्य चिह्नं P इत्यस्मात् गच्छेत् तथा रेखायाः l इत्यस्याः एकः भागः तस्याः अपरे भागे तिष्ठेत्। कर्गदम् उद्घाटयन्तु। पुटस्य चिह्नं l इत्यस्याः उपरि लम्बम् अस्ति अपि च P इत्यस्मात् गच्छति।

मापिकायाः अपि च वर्गमापिकायाः विधिः (एकः ऐच्छिकः क्रियाकलापः)

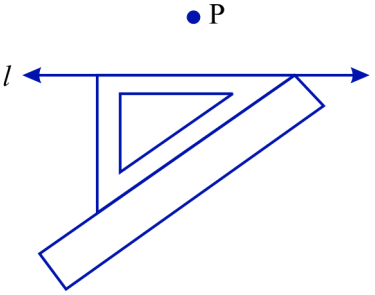
सोपानम् 1 : भावयन्तु यत् l एका रेखा अस्ति अपि च P तस्याः बहिः स्थितः एकः बिन्दुः अस्ति।



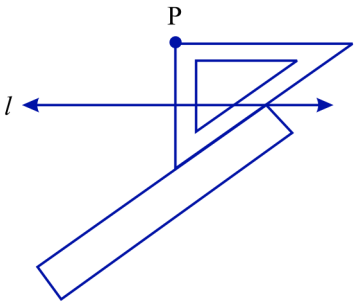
सोपानम् 2 : एकां वर्गमापिकां l इत्यस्याः उपरि इत्थं स्थापयन्तु यत् तस्याः समकोणस्य एकः प्रान्तः l इत्यस्याः अनुदिशि भवेत्।



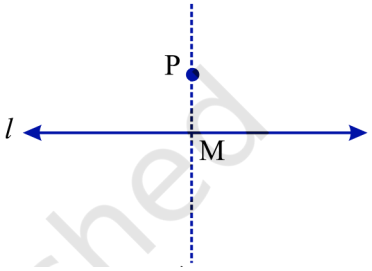
सोपानम् 3 : वर्गमापिकायाः समकोणानां सम्मुखप्रान्तस्य अनुदिशि एकां मापिकां स्थापयन्तु।



सोपानम् 4 : मापिकां दृढतया गृह्णन्तु अपि च वर्गमापिकां मापिकायाः अनुदिशि तावत् पर्यन्तम् अपसारयन्तु यावत् पर्यन्तं P समकोण-निर्मातारम् अपरं प्रान्तभागं न स्पर्शति।

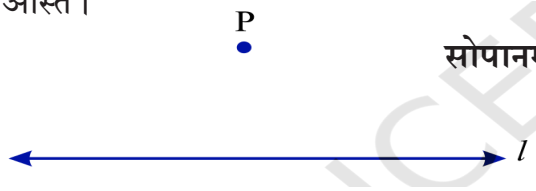


सोपानम् 5 : वर्गमापिकायाः अस्य प्रान्तभागस्य अनुदिशि P इत्यस्मात् रेखाम् आलिखन्तु या l इत्याख्यं M इत्यत्र कर्तयति। अधुना रेखा PM ⊥ l अस्ति।



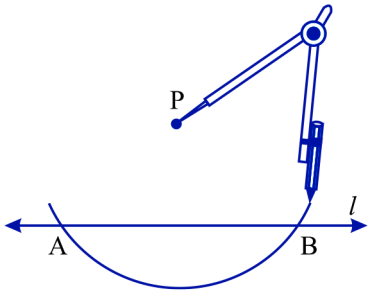
मापिकायाः अपि च परकारस्य विधिः

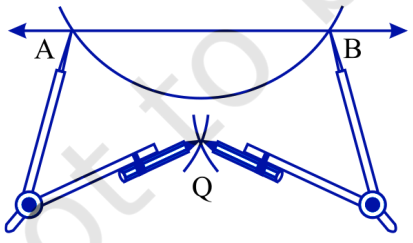
निस्संशयं मापिकायाः तथा परकारस्य प्रयोगं कृत्वा यः विधिः उपयुज्यते सः एव विधिः उत्तमविधिः अस्ति।



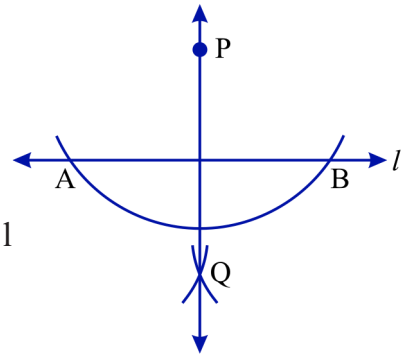
सोपानम् 1 : रेखा l तथा बिन्दुः P दत्तः अस्ति यः l इत्यस्याः उपरि स्थितः नास्ति।

सोपानम् 2 : P इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा एकां सौविद्ध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः l इति रेखां द्वयोः बिन्द्वोः A अपि च B इत्यनयोः उपरि कर्तयेत्।





सोपानम् 3 : समानत्रिज्यायाः प्रयोगेण A अपि च B इत्येतौ केन्द्रौ इति मत्वा अर्धवृत्तद्वयम् आलिखन्तु यौ परस्परं P इत्यस्य अन्यपार्श्वे Q इत्यस्य उपरि कर्तयेताम्।



सोपानम् 4 : PQ इत्याख्यं योजयन्तु। तदा PQ एव रेखायाः l इत्यस्याः उपरि लम्बः अस्ति।

अभ्यास: 14.4

1. एकं रेखाखण्डम् $\overline{AB}$ आलिखन्तु। एतस्य उपरि कमपि M इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु। मापिकायां अपि च वर्गमापिकायाः साहाय्येन M इत्यस्मात् $\overline{AB}$ इत्यस्योपरि लम्बम् आरचयन्तु।
2. एकं रेखाखण्डम् $\overline{PQ}$ आलिखन्तु। कमपि R इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु यः $\overline{PQ}$ इत्यस्य उपरि न भवेत्। R इत्यस्मात् $\overline{PQ}$ इत्यस्य उपरि एकं लम्बम् आलिखन्तु। (मापिकायाः तथा वर्गमापिकायाः साहाय्येन)
3. एकां रेखां 1 आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि स्थितात् एकस्मात् X इति बिन्दोः रेखायाः 1 इत्यस्याः उपरि एकं लम्बं रेखाखण्डं $\overline{XY}$ इति आलिखन्तु।
   अधुना मापिकायाः तथा परकार इत्यस्य साहाय्येन Y इत्यस्मात् $\overline{XY}$ इत्यस्याः उपरि लम्बम् आलिखन्तु।

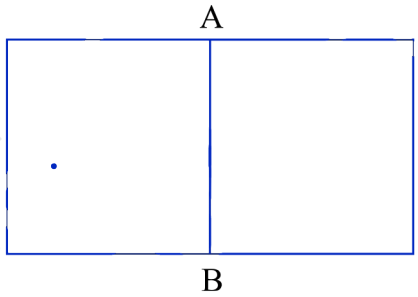
14.4.3 एकस्य रेखाखण्डस्य लम्ब-समद्विभाजकः

एतत् कुर्वन्तु

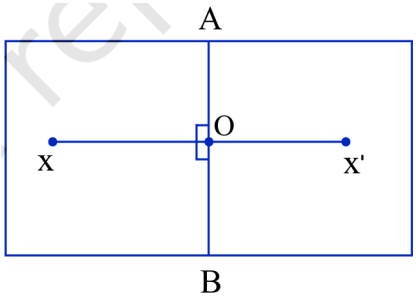
एकं कर्गदं पुटीकुर्वन्तु। भावयन्तु यत् $\overline{AB}$ पुटचिह्नम् अस्ति। मशिं स्वीकृत्य कुत्रापि एकं X इति बिन्दुम् आलिखन्तु।

$\overline{AB}$ इत्याख्यं दर्पणरेखा इति मत्वा X इत्यस्य प्रतिबिम्बं X'इत्याख्यं जानन्तु।

भावयन्तु यत् $\overline{AB}$ अपि च $\overline{XX'}$ परस्परं O इत्यस्य उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः। किं OX = OX' अस्ति ?



अस्यार्थः अस्ति यत् $\overline{AB}$ रेखाखण्डः $\overline{XX'}$ इत्याख्यं द्वाभ्यां समान-लम्ब-भागाभ्यां विभाजनं करोति। $\overline{AB}$ रेखाखण्डः $\overline{XX'}$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति। एतदपि ध्यायन्तु यत् $\angle AOX$ अपि च $\angle BOX$ समकोणौ भवतः। किमर्थम् ? अतः रेखा $\overline{AB}$ रेखाखण्डस्य $\overline{XX'}$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति। आकृतौ वयं $\overline{AB}$ इत्यस्याः रेखायाः केवलम् एकमेव भागं पश्यामः। द्वे बिन्दू संयुज्यमान-रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः तस्य सममिति-अक्षः अपि अस्ति।

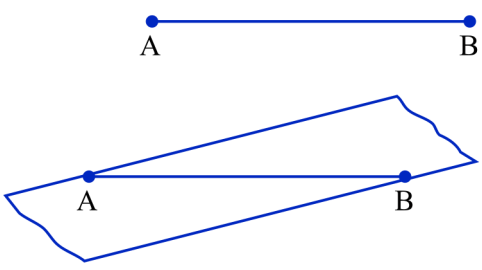


एतत् कुर्वन्तु

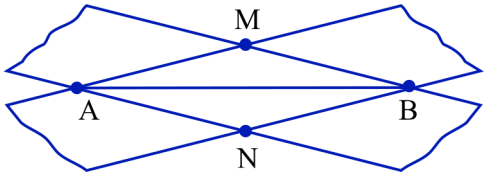
(पारदर्शकमापिका-पट्टिका)

सोपानम् 1 : एकं AB इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु।

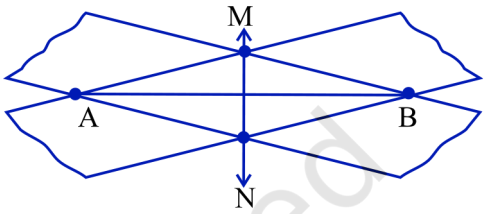
सोपानम् 2 : यथा चित्रे दर्शितं तथा च एकाम् आयताकार-पारदर्शक-मापिका-पट्टिकां AB इत्यस्याः रेखायाः विकर्णतः इत्थं स्थापयन्तु यत् अस्य प्रान्तभागौ बिन्द्वोः AB इत्यस्य उपरि स्याताम्।



सोपानम् 3 : इमामेव प्रक्रियाम् एकाम् अन्यां पट्टिकां स्वीकृत्य इत्थम् अग्रेसारयन्तु यत् द्वितीया पट्टिका प्रथमां पट्टिकां A अपि च B इत्यनयोः उपरि कर्तयेत् । भावयन्तु यत् द्वे अपि पट्टिके M अपि च N इत्यनयोः उपरि अपि कर्तयतः ।



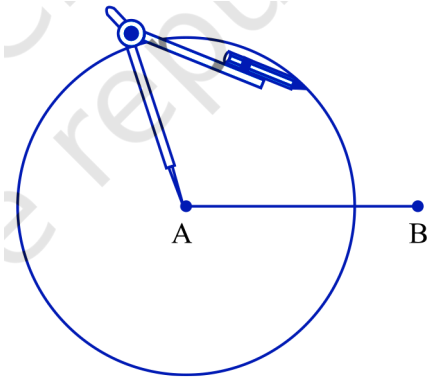
सोपानम् 4 : M अपि च N इत्यनयोः समायोजनं कुर्वन्तु । किं $\overline{MN}$ रेखाखण्डस्य समद्विभाजकः अस्ति ? मापयित्वा परीक्षणं कुर्वन्तु । किं एषः $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बसमद्विभाजकः अपि वर्तते ? $\overline{AB}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः कुत्र अस्ति ?



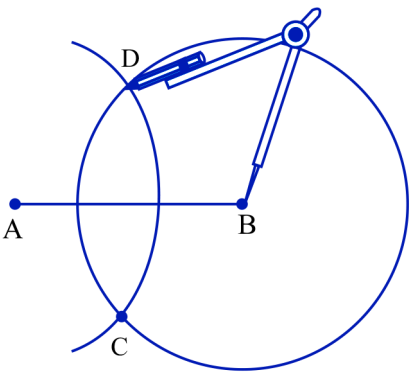
मापिकायाः तथा परकारस्य साहाय्येन रचना

सोपानम् 1 : एकं $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु ।

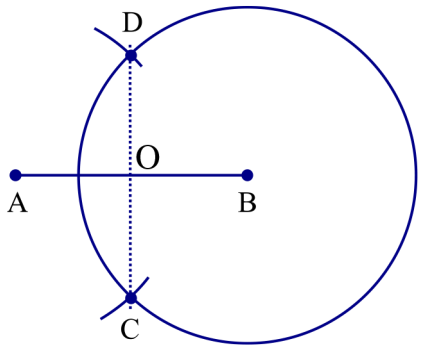
सोपानम् 2 : A इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा परकारस्य साहाय्येन एकं वृत्तम् आलिखन्तु । भवतां वृत्तस्य त्रिज्या, $\overline{AB}$ इत्यस्य अर्धात् अपि अधिका भवेत् ।



सोपानम् 3 : B इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा अपि च द्वितीयसोपाने कथित-त्रिज्यां स्वीकृत्य परकरस्य साहाय्येन एकम् अन्यं वृत्तम् आलिखन्तु । भावयन्तु सः वृत्तः पूर्वतनं वृत्तं बिन्द्वोः C अपि च D इत्यनयोः उपरि कर्तयेत् ।



सोपानम् 4 : CD इत्याख्यं मेलयन्तु। एषः रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इत्याख्यं O इत्यत्र कर्तयति। स्वस्य विभजन्याः प्रयोगं कृत्वा परीक्षणं कुर्वन्तु यत् O इति बिन्दुः, रेखाखण्डस्य $\overline{AB}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। सहैव एतदपि परीक्षन्तु यत् $\angle COA$ अपि च $\angle COB$ समकोणौ स्तः। अतः $\overline{CD}$ इति रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभजकः अस्ति।



उपर्युक्तरचनायाम् अस्माभिः $\overline{CD}$ इत्याख्यं निर्धारयितुं द्वयोः बिन्द्वोः आवश्यकता आसीत्। किं एतौ ज्ञातुं पूर्णवृत्तालेखनस्य आवश्यकता अस्ति ? किम् एतत् पर्याप्तं नास्ति यत् एतौ बिन्दू ज्ञातुं एतयोः वृत्तयोः अर्धवृत्तद्वयम् एव आलिखितं स्यात्। वस्तवे तु व्यावहारिक-रूपेण वयम् इदमेव कुर्मः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

मापिकायाः तथा च परकारस्य साहाय्येन रचनायाः द्वितीये सोपाने, यदि वयं त्रिज्यां $\overline{AB}$ इत्यस्य अर्धादपि न्यूनां स्वीकुर्म तर्हि किं भविष्यति ?

अभ्यासः 14.5

1. 7.3 सेण्टीमीटर् लम्बस्य एकं $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च तस्य सममिति-अक्षं जानन्तु।
2. 9.5 से.मी. लम्बस्य एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च तस्य लम्ब-समद्विभाजकम् आलिखन्तु।
3. एकस्य $\overline{XY}$ इत्यस्य रेखाखण्डस्य लम्ब-सम-द्विभाजकम् आलिखन्तु यस्य लम्बः 10.3 से.मी. भवेत्।
   (a) अस्य लम्बसमद्विभाजकस्य उपरि कमपि P इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। परीक्षणं कुर्वन्तु यत् PX = PY अस्ति वा इति।
   (b) यदि M इति, रेखाखण्डस्य $\overline{XY}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति तर्हि MX अपि च XY इत्यनयोः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?
4. 12.8 से.मी. लम्बस्य एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु। मापिकायाः अपि च परकार इत्यस्य साहाय्येन अमुं समानेषु चतुर्षु भागेषु विभजन्तु। मापनद्वारा स्व-रचनायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।
5. 6.1 सेमी लम्बस्य एकं $\overline{PQ}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च पुनः $\overline{PQ}$ इत्याख्यं व्यासः इति मत्वा एकं वृत्तम् आलिखन्तु।

6. केन्द्रं C इति अपि च त्रिज्यां 3.4 से.मी. स्वीकृत्य एकं वृत्तम् आलिखन्तु। अस्य कामपि जीवरेखां $\overline{AB}$ आलिखन्तु। $\overline{AB}$ इत्यस्याः जीवरेखायाः लम्बसम-द्विभाजकम् आलिखन्तु। परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किम् एषः वृत्तस्य केन्द्रात् गच्छति वा इति ?

7. प्रश्नं 6 इत्याख्यं तादृशस्थित्यर्थं पुनः कुर्वन्तु यदा $\overline{AB}$ इत्येकः व्यासः अस्ति।

8. 4 से.मी. त्रिज्यायुक्तम् एकं वृत्तम् आलिखन्तु । अस्य द्वे जीवरेखे आलिखन्तु । एतयोः लम्बसमद्विभाजकम् आलिखन्तु। एते कुत्र मिलतः ?

9. शीर्षम् O इति युक्तं कोणम् आलिखन्तु। अस्य एकस्य भुजस्य उपरि एकं बिन्दुं A इति द्वितीयभुजे एकं अपरं बिन्दुं B इति इत्थं स्वीकुर्वन्तु यत् OA = OB अस्ति। $\overline{OA}$ अपि च $\overline{OB}$ इत्यनयोः लम्बसमद्विभाजकम् आलिखन्तु । भावयन्तु यत् एतौ P इत्यस्य उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः इति। किं PA = PB अस्ति ?

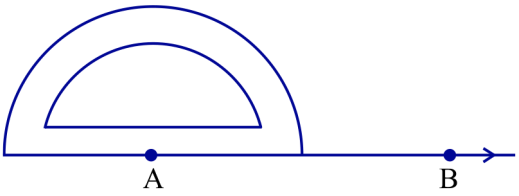
14.5 कोणः

14.5.1 दत्तमापस्य कोणनिर्माणम्

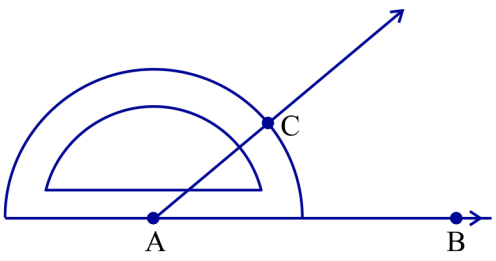
भावयन्तु यत् वयं 40° इत्यस्य कोणं निर्मातुम् इच्छामः। एतदर्थं वाञ्छित-सोपानानि अधोलिखितानि सन्ति।

सोपानम् 1 : एकं किरणं $\overline{AB}$ इति आलिखन्तु।

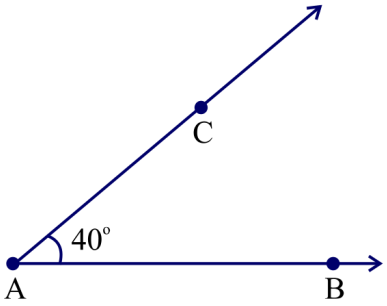
सोपानम् 2 : चान्द्रिकायाः केन्द्रं A इत्यस्य उपरि इत्थं स्थापयन्तु यत् अस्याः शून्यप्रान्तः $(0^\circ - 0^\circ)$ किरणस्य $\overline{AB}$ इत्यस्य अनुदिशि भवतु।



सोपानम् 3 : B इत्यस्य समीपे विद्यमानशून्येन प्रारभ्य 40° इत्यस्य सम्मुखे C इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।



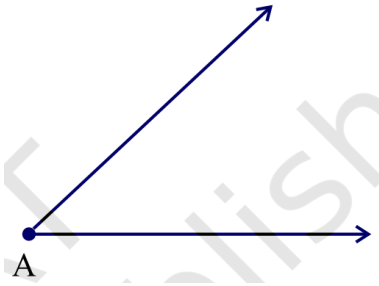
सोपानम् 4 : AC मेलयित्वा किरणं AC इति निर्मान्तु। ∠BAC एव वाञ्छितकोणः अस्ति।



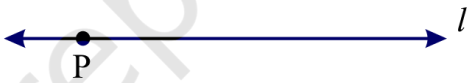
14.5.2 एकेन दत्तेन कोणेन समानस्य कोणस्य निर्माणम्

भावयन्तु अस्माकं कृते एकः कोणः दत्तः अस्ति यस्य मापः अस्माभिः ज्ञातः नास्ति। वयं एतेन कोणेन समानम् एकं कोणं निर्मातुम् इच्छामः। पश्यन्तु यत् अपि च केन प्रकारेण कर्तुं शक्यते।

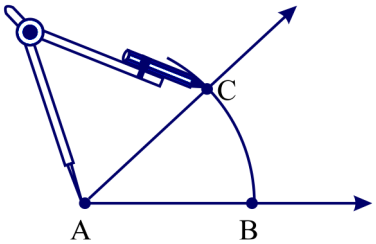
∠A दत्तः अस्ति यस्य मापः ज्ञातः नास्ति।



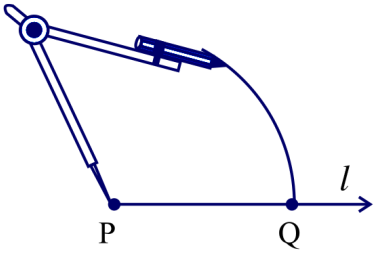
सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि एकं बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु।



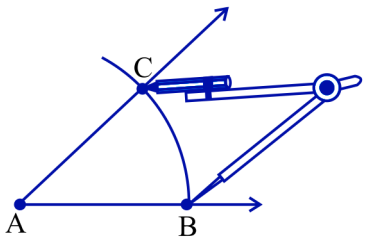
सोपानम् 2 : परकार इत्यस्य तीक्ष्णशीर्षं A इत्यस्य उपरि स्थापयित्वा एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः ∠A इत्यस्य भुजौ B अपि च C इत्यस्य उपरि कर्तयति।



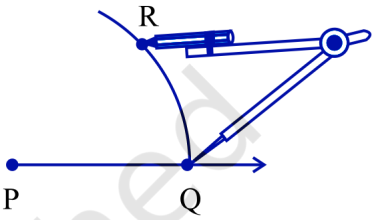
सोपानम् 3 : परकार इत्यस्य विस्तरणे परिवर्तनम् अकृत्वैव तस्य तीक्ष्णशीर्षं P इत्यस्य उपरि स्थापयित्वा एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः l इत्याख्यां रेखां Q इत्यस्य उपरि कर्तयति।



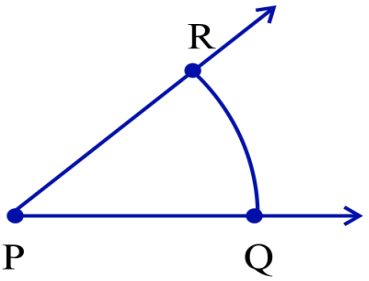
सोपानम् 4 : परकार इत्यस्य BC इत्यस्य लम्बेन समानम् उद्घाटयन्तु।



सोपानम् 5 : परकार इत्यस्य तीक्ष्णशीर्षं Q इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु तत्र अर्धवृत्तं स्थापयन्तु यः पूर्वार्धवृत्तं R इत्यस्य उपरि कर्तयति।

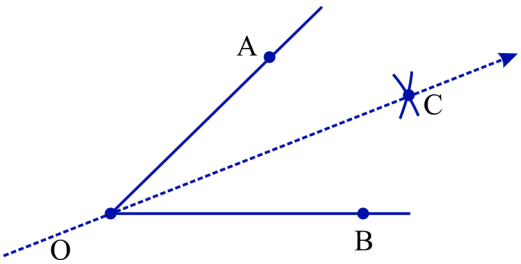


सोपानम् 6 : PR इत्याख्यं PR इति किरणं निर्मान्तु। तेन ∠P प्राप्यते। ∠P एव वाञ्छितकोणः अस्ति यस्य मापः ∠A इत्यनेन समानम् अस्ति। अस्यार्थः अयमस्ति यत् ∠QPR अपि च ∠BAC इत्यनयोः मापः समानः अस्ति।



14.5.3 एकस्य कोणस्य समद्विभाजकः

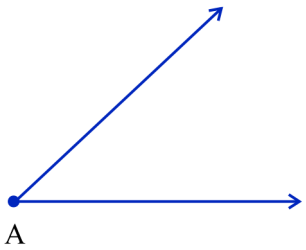
एकस्य कर्गदस्य उपरि एकं O इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु। O इति प्रारम्भिकबिन्दुं स्वीकृत्य किरणद्वयं $\overrightarrow{OA}$ अपि च $\overrightarrow{OB}$ आलिखन्तु। भवद्भिः ∠AOB प्राप्यते। एतत् कर्गदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् पुटचिह्नं O इत्यस्मात् गच्छेत् तथा किरणौ $\overrightarrow{OA}$ अपि च $\overrightarrow{OB}$ परस्परं सम्मेलयेताम्। भावयन्तु यत् OC पुटचिह्नम् अस्ति। यत् अस्माभिः कर्गदस्य उद्घाटनेन प्राप्यते। नूनं किरणः OC, ∠AOB इत्यस्य सममिति-अक्षः अस्ति।



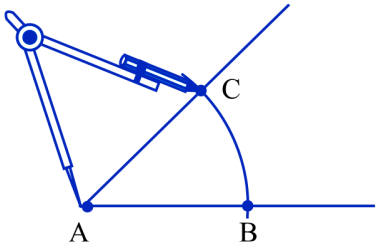
∠AOB अपि च ∠COB एतत् द्वयं मापयन्तु। किम् एतौ समानौ स्तः ? अतः OC, कोणस्य ∠AOC इत्यस्य सममिति-अक्षः अस्ति अपि च ∠AOB इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति।

मापिकया अपि च परकारेण रचना

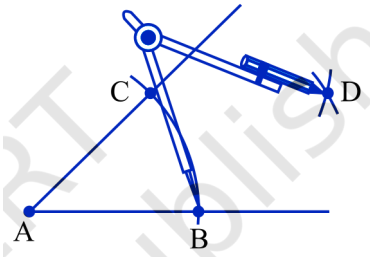
चिन्तयन्तु, यत् एकः $\angle A$ इति कोणः दत्तः अस्ति।



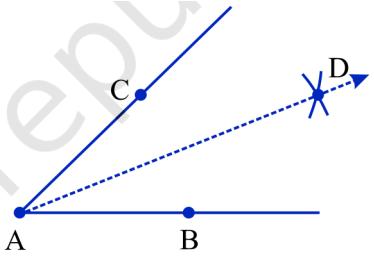
सोपानम् 1 : A इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा परकारस्य साहाय्येन एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः $\angle A$ इत्यस्य भुजौ B अपि च C इत्यनयोः उपरि कर्तयति।



सोपानम् 2 : B इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा BC इत्यस्य अर्धादपि अधिकां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तं $\angle A$ इत्यस्य अभ्यन्तरे आलिखन्तु।



सोपानम् 3 : C इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा द्वितीयसोपाने उक्तत्रिज्यां स्वीकृत्य $\angle A$ इत्यस्य अभ्यन्तरे तोऽपि एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु । भावयन्तु यत् एतौ द्वावपि अर्धवृत्तौ D इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदयतः। तदा $\overline{AD}$ एव $\angle A$ इत्यस्य वाञ्छितसमद्विभाजकः भवति।



उपर्युक्त-द्वितीय-सोपाने यदि वयं त्रिज्यां BC इत्यस्य अर्धादपि न्यूनं स्वीकुर्मः तर्हि कः कोणः भविष्यति ?

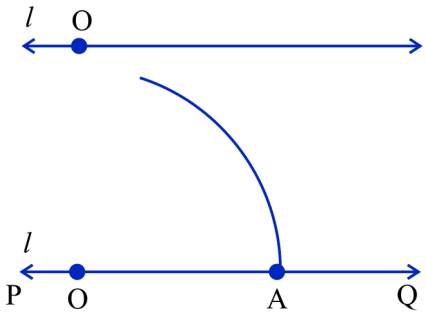
14.5.4 विशेषमापानां कोणः

केषाञ्चन विशेषमापानां कोणानां रचनां कर्तुं केचन सुन्दराः अथवा परिशुद्धाः विधयः सन्ति, येषु चन्द्रिकायाः प्रयोगः न क्रियते। एतेषु काञ्चन विधीन् वयं पश्यामः।

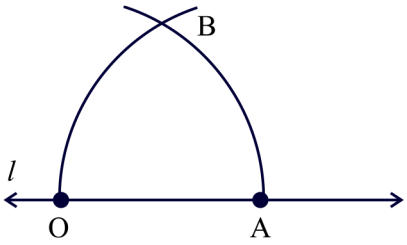
60^{o} मापस्य कोणस्य रचना

सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि O इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।

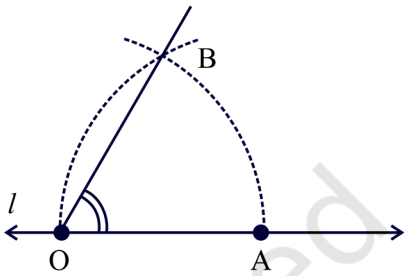
सोपानम् 2 : परकार इत्यस्य तीक्ष्णशीर्षं O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु अपि च एकं सौविध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः रेखां l इत्याख्यां बिन्दौ P इत्यत्र कर्तयति।



सोपानम् 3 : अधुना A इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य O इत्यस्मात् चलन्तम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु।



सोपानम् 4 : भावयन्तु वौ अपि अर्धवृत्तौ B इत्यस्मिन् बिन्दौ कर्तयतः । OB इत्येतौ योजयित्वा OB इत्याख्यं किरणं निर्मान्तु । तदा कोणः ∠BOA एव 60° मापस्य वाञ्छितकोणः अस्ति।



30° मापस्य कोणस्य रचना

उपरि दर्शितरीत्या 60° मापस्य कोणम् आलिखन्तु। अधुना अमुं कोणं समद्विभाजकं कुर्वन्तु। प्रत्येकं कोणः 30° इत्यस्य अस्ति। मापनद्वारा स्व-रचनायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।

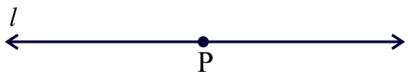
प्रयत्नं कुर्वन्तु

15° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

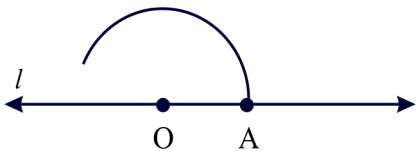
120° इत्यस्य कोणस्य रचना

120° इत्ययं कोणः 60° कोणस्य द्विगुणितः अस्ति। अतः अस्य रचना अधोलिखितप्रकारेण भवितुं शक्यते।

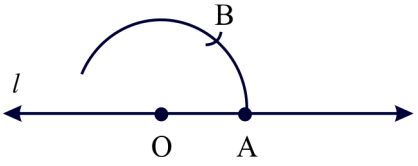
सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि O इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।



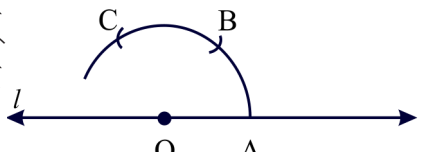
सोपानम् 2 : परकारस्य तीक्ष्णशीर्षं O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु अपि च एकं सौविध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः रेखां l इत्याख्यां बिन्बौ A इत्यत्र कर्तयेत्।



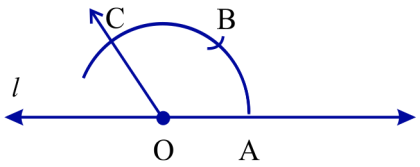
सोपानम् 3 : अधुना A इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः पूर्वम् अर्धवृत्तं B इत्यस्य उपरि कर्तयति।



सोपानम् 4 : पुनः B इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः पूर्वम् अर्धवृत्तं C इत्यस्य उपरि कर्तयति।



सोपानम् 5 : OC योजयित्वा OC इत्याख्यं किरणं निर्मान्तु। तदा $\angle COA$ इत्यस्य कोणस्य मापः 120° अस्ति।



प्रयत्नं कुर्वन्तु

150° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

90° मापस्य कोणस्य रचना

एकस्याः रेखायाः उपरि दत्तबिन्दोः एकं लम्बम् आलिखन्तु यः पूर्वमेव कृतः अस्ति। एषः वाञ्छितस्य 90° मापस्य कोणः अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

45° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

अभ्यासः 14.5

1. 75° मापस्य कोणस्य $\angle POQ$ इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु तथा च अस्य सममिति-अक्षम् आलिखन्तु।
2. 147° मापस्य कोणस्य रचनां कुर्वन्तु अपि च तस्य समद्विभाजकम् आलिखन्तु।
3. एकं समकोणम् आलिखन्तु अपि च तस्य समद्विभाजकस्य रचनां कुर्वन्तु।
4. 153° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु अपि च अस्य चतुरः समानान् भागान् कुर्वन्तु।
5. मापिकया तथा च परकार इत्यनेन च अधोलिखितानां मापानां कोणान् आलिखन्तु।
   (a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° (e) 45° (f) 135°
6. 45° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु। तथा च तस्य समद्विभाजकं कुर्वन्तु।
7. 135° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु तेन समद्विभाजितं कुर्वन्तु।
8. 70° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु। मापिकायाः तथा परकार इत्यस्य साहाय्येन अनेन कोणेन समानम् एकं कोणं निर्मान्तु।
9. 40° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु। अस्य सम्पूरकेण समानम् एकं कोणं निर्मान्तु।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः

अस्मिन् अध्याये ज्यामितीय-आकाराणाम् आलेखनस्य विभिन्न-विधयः दर्शिताः सन्ति।

1. आकाराणां रचनार्थं वयं ज्यामिति-पेटिकायां विद्यमानानाम् अधोलिखितवस्तूनां प्रयोगं कृतवन्तः।
   (i) मापिका (ii) परकारः इति
   (iii) विभाजनी (iv) वर्गमापिका
   (v) चान्द्रिका

2. मापिकायाः अपि च परकारस्य साहाय्येन अधोलिखितानां रचनां कर्तुं शक्नुमः ।

(i) एकः वृत्तः यदि तस्य त्रिज्यायाः लम्बः दत्तः अस्ति ।

(ii) एकः रेखाखण्डः यदि तस्य लम्बः दत्तः अस्ति ।

(iii) एकेन रेखाखण्डेन समानस्य रेखाखण्डस्य निर्माणम् ।

(iv) एकस्याः रेखायाः उपरि एकस्मात् बिन्दोः लम्बालेखनं यदि सः बिन्दुः –

(a) रेखायाः उपरि स्थितः अस्ति । (b) रेखायाः उपरि स्थितः नास्ति ।

(v) दत्तलम्बस्य रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः ।

(vi) दत्तमापस्य एकः कोणः ।

(vii) दत्तकोणेन समानस्य कोणस्य निर्माणम् ।

(viii) दत्तकोणस्य समद्विभाजकः ।

(ix) केषाञ्चित् विशेषाणां मापानां कोणाः यथा –

(a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30° (e) 120° (f) 135°

उत्तरमाला

अभ्यास: 1.1

1. (a) दश
   (b) दश
   (c) दश
   (d) दश
   (e) दश

2. (a) 73,75,307
   (b) 9,05,00,041
   (c) 7,52,21,302
   (d) 58,423,202
   (e) 23,30,010

3. (a) 8,75,95,762 — द्विषष्ट्युत्तर-सप्तशताधिक-पञ्चनवतिसहस्रपर-पञ्चसप्ततिलक्षाधिक-अष्टकोटिः ।
   (b) 85,46,283 — त्र्यशीत्युत्तर-द्विशताधिक-षट्चत्वारिंशत्पर-पञ्चाशीतिसहस्रम् ।
   (c) 9,99,00,046 — षट्चत्वारिंशदुत्तर-एकोनशतलक्षाधिक-नवकोटिः ।
   (d) 9,84,32,701 — एकोत्तर-सप्तशताधिक-द्वात्रिंशत्सहस्रपर-चतुरशीतिलक्षाधिक-नवकोटिः ।

4. (a) 78,921,092 — द्वानवत्युत्तर-एकविंशत्यधिकनवशतसहस्रपर-अष्टसप्ततिलक्षम् ।
   (b) 7,452,283 — त्र्यशीत्युत्तरद्विशताधिक-द्वापञ्चशदुत्तरचतुश्शतसहस्रपर-सप्तलक्षम् ।
   (c) 99,985,102 — द्व्युत्तरैकशताधिक-पञ्चाशीत्युत्तरनवशतसहस्रपर-एकोनशतं लक्षम् ।
   (d) 48,049,831 — एकत्रिंशदुत्तर-अष्टशताधिक-एकोनपञ्चाशत्सहस्रपर-अष्टचत्वारिंशल्लक्षम् ।

अभ्यास: 1.2

1. 7,707 चीटिकाः
2. 3,020 धावनाङ्काः
3. 2,28,800 मताः
4. 6,86,659 रू ; द्वितीयसप्ताहे 1,14,877 रू
5. 52,965
6. 87,575
7. 30,592 रू
8. 65,124
9. 18 युतकानि 1 मी 30 सेमी
10. 177 पेटीकाः
11. 22 किमी 500 मी
12. 180 चषकाः

अभ्यास: 1.3

1. (a) 1,700
   (b) 500
   (c) 16,000
   (d) 7,000

2. (a) 5,000 ; 5,090
   (b) 61,100 ; 61,130
   (c) 7,800 ; 7,840
   (d) 4,40,900 ; 4,40,980

3. (a) 1,20,000
   (b) 1,75,00,000
   (c) 7,80,000
   (d) 3,00,000

अभ्यास: 2.1

1. 11,000 ; 11,001 ; 11,002
2. 10,000 ; 9,999 ; 9,998
3. 0
4. 20
5. (a) 24,40,702
   (b) 1,00,200
   (c) 11,000,00
   (d) 23,45,671
6. (a) 93
   (b) 9,999
   (c) 2,08,089
   (d) 76,54,320
7. (a) संख्या 503, संख्यायाः 530 इत्यस्याः वामभागे स्थिता अस्ति ; 530 > 503

(b) संख्या 307 संख्यायाः 370 इत्यस्याः वामभागे स्थिता अस्ति ; 370 > 307

(c) संख्या 56,789 संख्यायाः 98,765 इत्यस्याः वामभागे स्थिता अस्ति ; 98,765 > 56,789

(d) संख्या 98,30,415 संख्यायाः 1,00,23,001 इत्यस्याः वामभागे स्थिता अस्ति ; 98,30,415 < 1,00,23,001

8. (a) असत्यम् (b) असत्यम् (c) सत्यम् (d) सत्यम्
(e) सत्यम् (f) असत्यम् (g) असत्यम् (h) असत्यम्
(i) सत्यम् (j) असत्यम् (k) असत्यम् (l) सत्यम्
(m) असत्यम्

अभ्यासः 2.2

1. (a) 1,408 (b 4,600
2. (a) 1,76,800 (b) 16,600 (c) 2,91,000 (d) 27,90,000
(e) 85,500 (f) 10,00,000
3. (a) 5,940 (b) 54,27,900
(c) 81,26,500 (d) 1,92,25,000
4. (a) 76,014 (b) 87,108 (c) 2,60,064 (d) 1,68,840
5. 3,960 रू 6. 1,500 रू
7. (i) → (c) (ii) → (a) (iii) → (b)

अभ्यासः 2.3

1. (a) 2. आम्
3. द्वयमपि '1' अस्ति।
4. (a) 73,528 (b) 54,42,437 (c) 20,600 (d) 5,34,375
(e) 17,640
5. 123456 X 8 + 6 = 987654
1234567 X 8 + 7 = 9876543

अभ्यासः 3.1

1. (a) 1,2,3,4,6,8,12,24 (b) 1,3,5,15
(c) 1,3,7,21 (d) 1,3,9,27
(e) 1,2,3,4,6,12 (f) 1,2,4,5,10,20
(g) 1,2,3,6,9,18 (h) 1,23
(i) 1,2,3,4,6,9,12,18,36
2. (a) 5,10,15,20,25 (b) 8,16,24,32,40
(c) 9,18,27,36,45
3. (i) → (b) (ii) → (d) (iii) → (a)
(iv) → (f) (v) → (e)
4. 9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99

अभ्यासः 3.2

1. (a) समसंख्या (b) समसंख्या

2. (a) असत्यम् (b) सत्यम् (c) सत्यम् (d) असत्यम्
(e) असत्यम् (f) असत्यम् (g) असत्यम् (h) सत्यम्
(i) असत्यम् (j) सत्यम्

3. 17 अपि च 71,37 तथा 73,79 अपि च 97

4. अभाज्यसंख्याः ; 2,3,5,7,11,13,17,19
भाज्यसंख्याः ; 4,6,8,9,10,12,14,15,16,18

5. 7

6. (a) 3 + 41 (b) 5 + 31 (c) 5 + 19 (d) 5 + 13

7. 3,5 ; 5,7 ; 11,13

8. (a) अपि च (c) 9. 90,91,92,93,94,95,96

10. (a) 3+5+13 (b) 3+5+23
(c) 13+17+23 (d) 7+13+41
एषः कश्चन प्रकारः अस्ति। एतदतिरिच्यापि प्रकाराः भवन्ति।

11. 2,3 ; 2,13 ; 3,17 ; 7,13 ; 11,19

12. (a) अभाज्यसंख्या (b) भाज्यसंख्या
(c) अभाज्यसंख्या, भाज्यसंख्या (d) 2
(e) 4 (f) 2

अभ्यासः 3.3

1.

संख्या	विभजनम्								
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**
990	आम्	आम्	न	आम्	आम्	न	आम्	आम्	आम्
1586	आम्	न	न	न	न	न	न	न	न
275	न	न	न	आम्	न	न	न	न	आम्
6686	आम्	न	न	न	न	न	न	न	न
639210	आम्	आम्	न	आम्	आम्	न	न	आम्	आम्
429714	आम्	आम्	न	न	आम्	न	आम्	न	न
2856	आम्	आम्	आम्	न	आम्	आम्	न	न	न
3060	आम्	आम्	आम्	आम्	आम्	न	आम्	आम्	न
406839	न	आम्	न	न	न	न	न	न	न

2. 4 इत्यस्मात् विभाज्याः संख्याः (a) , (b) , (c) , (d) , (f) , (g) , (h) , (i)
8 इत्यस्मात् विभाज्याः संख्याः (b), (d), (f), (h)

3. (a) , (f) , (g) , (i) 4. (a) , (b) , (d) (e) , (f)

5. (a) 2 अपि च 8 (b) 0 अपि च 9

6. (a) 8 (b) 6

अभ्यासः 3.4

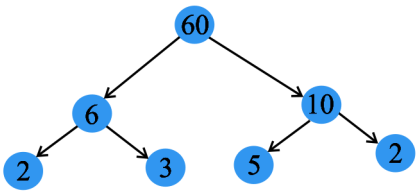
1. (a) 1,2,4 (b) 1,5 (c) 1,5 (d) 1,2,4,8

2. (a) 1,2,4 (b) 1,5

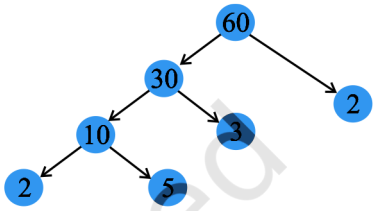
3. (a) 24,48,72 (b) 36,72,108
4. 12,24,36,48,60,72,84,96
5. (a), (b), (e), (f) 6. 60 7. 1, 2, 3, 4, 6

अभ्यास: 3.5

1. (a) असत्यम् (b) सत्यम् (c) असत्यम् (d) सत्यम्
   (e) असत्यम् (f) असत्यम् (g) सत्यम् (h) सत्यम्
   (i) असत्यम्
2. (a)



(b)



3. 1 अपि च स्वयं सा संख्या
4. 9999, 9999= 3 x 3 x 11 x 101
5. 10000, 10000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5 x 5
6. 1729 = 7 X 13 X 19
   द्वयोः क्रमागत-अभाज्य-गुणनखण्डयोः अन्तरम् 6 अस्ति।
7. (i) 2 x 3 x 4 = 24, 6 इत्यस्मात् विभाज्यमस्ति।
   (ii) 5 x 6 x 7 = 210, 6 इत्यस्मात् विभाज्यमस्ति।
9. (b), (c)
10. आम्
11. न, संख्या 12, द्वाभ्यां संख्याभ्यां 4 एवं 6 इत्याभ्यां विभाज्या अस्ति। परन्तु संख्या 12, संख्यया 24 इत्यनया विभज्या नास्ति।
12. 2 x 3 x 5 x 7 = 210

अभ्यास: 3.6

1. (a) 6 (b) 6 (c) 6 (d) 9
   (e) 12 (f) 34 (g) 35 (h) 7
   (i) 9 (j) 3
2. (a) 1 (b) 2 (c) 1
3. न ; 1

अभ्यास: 3.7

1. 3 किग्रा 2. 6930 सेमी 3. 75 सेमी 4. 120
5. 960 6. प्रातः 12 क्षणाधिक- 7 उत्तर- 7 वादनम्
7. 31 लीटर् 8. 95 9. 1152
10 (a) 36 (b) 60 (c) 30 (d) 60

अत्र प्रत्येकं स्थितौ ल.सा.अ. 3 इत्यस्य गुणजः अस्ति।
आम्, प्रत्येकं स्थितौ ल.सा.अ. = द्वयोः संख्ययोः गुणनफलम्
संख्यानां प्रत्येकं युग्मः सदैव 3 इत्यस्य गुणजः न भवति।

11. (a) 20 (b) 18 (c) 48 (d) 45

प्रत्येकं स्थितौ दत्तसंख्यानां ल.सा.अ. तयोः द्वयोः संख्ययोः बृहत्संख्या भवति।

अभ्यासः 4.1

1. (a) O, B,C, D, E

(b) अनेकानि उत्तराणि भवितुं शक्नुवन्ति, कानिचन एतानि भवन्ति : $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{DO}$, $\overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{EO}$ इत्यादीनि।

(c) अनेकानि उत्तराणि भवितुं शक्नुवन्ति, कानिचन एतानि भवन्ति : $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{EB}$ इत्यादीनि।

(d) अनेकानि उत्तराणि भवितुं शक्नुवन्ति, कानिचन एतानि भवन्ति : $\overline{DE}$, $\overline{DO}$, $\overline{EO}$, $\overline{OB}$, $\overline{EB}$ इत्यादीनि।

2. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{DC}$.

3. (a) एकम् उत्तरम् $\overleftrightarrow{AE}$ (b) एकम् उत्तरम् $\overleftrightarrow{AE}$

(c) $\overleftrightarrow{CO}$ अथवा $\overleftrightarrow{OC}$ (d) $\overleftrightarrow{CO}$ अथवा $\overleftrightarrow{AE}$ $\overleftrightarrow{AE}$ अथवा $\overleftrightarrow{EF}$

4. (a) असंख्यातम् (b) केवलम् एकम्

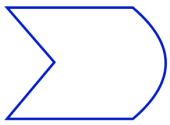
6. (a) सत्यम् (b) सत्यम् (c) सत्यम् (d) असत्यम्

(e) असत्यम् (f) असत्यम् (g) सत्यम् (h) असत्यम्

(i) असत्यम् (j) असत्यम् (k) सत्यम्

अभ्यासः 4.2

1. उद्घाटितः ; (a) , (c) . पिहितः ; (b), (d), (e) 4. (a) आम् (b) आम्

5.  (b) (c) असम्भवः।

अभ्यासः 4.3

1. ∠A अथवा ∠DAB ; ∠B अथवा ∠ABC ; ∠C अथवा ∠BCD ;
∠D अथवा ∠CDA

2. (a) A; (b) A, C, D. (c) E, B, O, F.

अभ्यासः 4.4

2. (a) △ABC , △ABD , △ADC

(b) कोणः ∠B, ∠C, ∠BAC, ∠BAD , ∠CAD, ∠ADB, ∠ADC

(c) रेखाखण्डः AB, AC, BC, AD, BD, DC

(d) △ABC , △ABD

अभ्यासः 4.5

1. विकर्णः चतुर्भुजस्य अभ्यन्तरे प्रतिच्छेदं करोति।

2. (a) $\overline{KL}$, $\overline{NM}$ अपि च $\overline{KN}$, $\overline{ML}$ (b) ∠K, ∠M अपि च ∠N, ∠L

(c) $\overline{KL}$, $\overline{KN}$ अपि च $\overline{NM}$, $\overline{ML}$ अथवा $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ अपि च $\overline{NM}$, $\overline{NK}$

(d) $\angle K$, $\angle L$ एवं $\angle M$, $\angle N$ अथवा $\angle K$, $\angle L$ अपि च $\angle L$, $\angle M$ इत्यादयः ।

अभ्यासः 4.6

1. (a) O (b) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ (c) $\overline{AC}$ (d) $\overline{ED}$
   (e) O,P (f) O (g) OAB (छायाङ्कितः भागः)
2. (a) आम् (b) न ।
4. (a) सत्यम् (b) सत्यम्

अभ्यासः 5.1

1. असम्यग्दर्शनेन अधिकदोषाः भवितुं शक्नुवन्ति ।
2. समीचीनमापस्य सम्भवः अस्ति ।
3. आम् (यतो हि C, A अपि च B इत्यनयोः मध्ये अस्ति ।)
4. B, A अपि च C इत्यनयोः मध्ये अस्ति ।
5. D, $\overline{AG}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति । (यतो हि AD = DG = 3)
6. AB = BC अपि च BC = CD अतः AB = CD
7. कस्यापि त्रिभुजस्य कयोः अपि द्वयोः भुजयोः लम्बयोः योगः तस्य तृतीयभुजस्य लम्बस्य अपेक्षया कदापि न्यूनः न भवितुं शक्नोति ।

अभ्यासः 5.2

1. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$
   (e) $\frac{3}{4}$ (f) $\frac{3}{4}$
2. (a) 6 (b) 8 (c) 8 (d) 2
3. (a) पश्चिमम् (b) पश्चिमम् (c) उत्तरम् (d) दक्षिणम्
   [(d), इत्यस्य उत्तरे एतेन किमपि अन्तरं न भवति यत् वयं घटिकायाः अनुदिशि वा घटिकायाः विपरीतदिशि वा परिभ्रमणं कुर्मः । यतो हि एकं पूर्णं भ्रमणम् अस्मान् पूर्वस्मिन् स्थले एव आनयति ।
4. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$
5. (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 1
   (e) 3 (f) 2
6. (a) 1 (b) 3 (c) 4
   (d) 2 (घटिकायाः दिशि अथवा घटिकायाः विपरीतदिशि)
7. (a) 9 (b) 2 (c) 7 (d) 7
   (वयं केवलं घटिकायाः अनिदिशः विचारमेव कुर्मः)

अभ्यासः 5.3

1. (i) $\longrightarrow$ (c) ; (ii) $\longrightarrow$ (d) ; (iii) $\longrightarrow$ (a) ; (iv) $\longrightarrow$ (e); (v) $\longrightarrow$ (b) ;

2. न्यूनकोणः (a) तथा च (f) ; अधिककोणः (b) ; समकोणः (c) ; ऋजुकोणः (e) ; प्रतिवर्तिकोणः (d)

अभ्यासः 5.4

1. (i) 90^{O} (ii) 180^{O}

2. (a) सत्यम् (b) असत्यम् (c) सत्यम् (d) सत्यम् (e) सत्यम्

3. (a) न्यूनकोणः 23^{O}, 89^{O};

7. (a) न्यूनकोणः (b) अधिककोणः (यदि कोणः 180^{O} इत्यस्मात् न्यूनः अस्ति)। (c) ऋजुकोणः (d) न्यूनकोणः (e) अधिककोणः

9. 90^{O} ,30^{O} ,180^{O}

10. आवर्धनकाचपट्टकद्वारा दर्शनेन कोणे किमपि अन्तरं न भवति।

अभ्यासः 5.5

1. (a) अपि च (c) 2. 90^{O}

3. एका 30^{O}, 60^{O}, 90^{O} इत्येतेषां कोणानां वर्गमापिका अस्ति। अपरा 45^{O}, 45^{O}, 90^{O} इत्येतेषां कोणानां वर्गमापिका अस्ति। 90^{O} इत्यस्य कोणः।

4. (a) आम् (b) आम् (c) $\overline{BH}$, $\overline{DF}$ (d) सर्वं सत्यम् अस्ति।

अभ्यासः 5.6

1. (a) विषमबाहुत्रिभुजः (b) विषमबाहुत्रिभुजः
   (c) समबाहुत्रिभुजः (d) समकोणत्रिभुजः
   (e) समद्विबाहु-समकोणत्रिभुजः (f) न्यूनकोणत्रिभुजः

2. (i) $\longrightarrow$ (e) ; (ii) $\longrightarrow$ (g) ; (iii) $\longrightarrow$ (a) ; (iv) $\longrightarrow$ (f) ; (v) $\longrightarrow$ (d) ; (vi) $\longrightarrow$ (c) ; (vii) $\longrightarrow$ (b)

3. (a) न्यूनकोणः अपि च समद्विबाहुत्रिभुजः (b) समकोणः अपि च विषमबाहुत्रिभुजः
   (c) अधिककोणः अपि च समद्विबाहुत्रिभुजः (d) समकोणः अपि च समद्विबाहुत्रिभुजः
   (e) समबाहुः अपि च न्यूनकोणः (f) अधिककोणः अपि च विषमबाहुः

4. (b) एतत् तु सम्भवं नास्ति। सावधानिनः भवन्तु ; त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः लम्बयोः योगः तृतीयभुजस्य लम्बस्य अपेक्षया अधिकः भवति।

अभ्यासः 5.7

1. (a) सत्यम् (b) सत्यम् (c) सत्यम् (d) सत्यम्
   (e) असत्यम् (f) असत्यम्

2. (a) यदा आयतस्य सर्वे भुजाः समानाः भवन्ति तदा सः वर्गः एव भविष्यति।

(b) यदा समानान्तरचतुर्भुजस्य प्रत्येकं कोणः एकः समकोणः भवति तदा सः एकः आयतः भविष्यति।

(c) यदा समचतुर्भुजस्य प्रत्येकं कोणः समकोणः भवति तदा सः एकः वर्गः भविष्यति।

(d) एते सर्वे अपि चतुर्भुजानां बहुभुजाः सन्ति।

(e) वर्गस्य सम्मुखभुजाः समानान्तराः भवन्ति।

3. वर्गः एकः समचतुर्भुजः अस्ति।

अभ्यासः 5.8

1. (a) पिहिताकृतिः नास्ति, अतः सः बहुभुजः नास्ति।

(b) एकः षड्भुजः अस्ति।

(c) तथा (d) बहुभुजौ न स्तः, यतो हि एतौ रेखाखण्डैः निर्मितौ न स्तः।

2. (a) चतुर्भुजः (b) त्रिभुजः

(c) पञ्चभुजः (d) अष्टभुजः

अभ्यासः 5.9

1. (a) ⟶ (ii) ; (b) ⟶ (iv) ; (c) ⟶ (v) ;

(d) ⟶ (iii) ; (e) ⟶ (i).

2. (a),(b),(c) इत्येतानि षट्फलकानि सन्ति (d) वेलनम् अस्ति (e) एकः गोलः अस्ति।

अभ्यासः 6.1

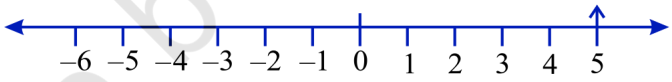
1. (a) भारे न्यूनता (b) 30 किमी दक्षिणम्

(c) 326 (d) 700 रूप्यकाणां लाभः

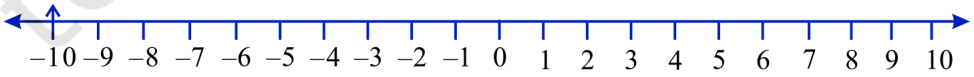
(e) समुद्रतलात् 100 मी अधः।

2. (a) + 2000 (b) – 800 (c) + 200 (d) - 700

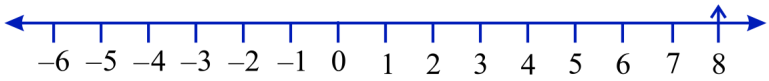
3. (a) + 5



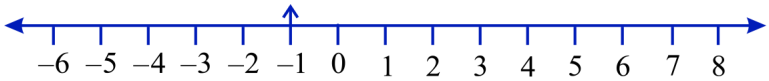
(b) – 10



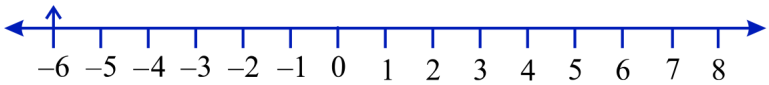
(c) + 8



(d) – 1



(e) – 6

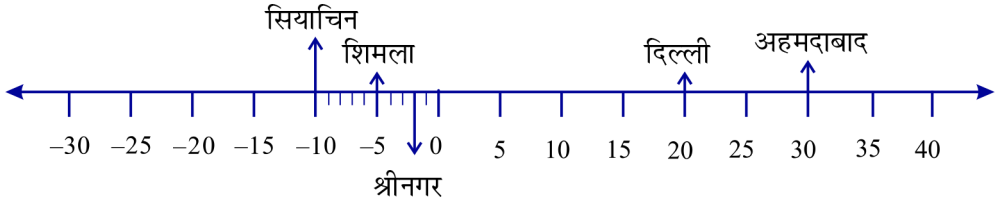


4. (a) F (b) ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः (c) B +4 , E -10

(d) E (e) D, C, B, A, O, H, G, F, E

5. (a) -10^{O} C, -2^{O} C, $+30^{O}$ C, $+20^{O}$ C, -5^{O} C

(b)



(c) सियाचिन् (d) अहम्मदाबादः अपि च देहली

6. (a) 9 (b) – 3 (c) 0 (d) 10

(e) 6 (f) 1

7. (a) - 6 , - 5, - 4, - 3, - 2, - 1 (b) – 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3,

(c) – 14, - 13, -12, -11, -10, - 9

(d) – 29, - 28, - 27, - 26, -25, -24

8. (a) - 19, - 18, - 17, - 16 (b) – 11, - 12, - 13, - 14

9. (a) सत्यम् (b) असत्यम् ; संख्यारेखायाः उपरि – 100, संख्यायाः – 50 इत्यस्याः अनन्तरम् स्थितास्ति।

(c) असत्यम् ; -1 बृहत्तमः पूर्णाङ्कः अस्ति ।

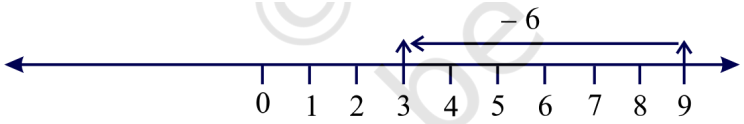
(d) असत्यम् ; - 26, संख्यायाः – 25 इत्यस्याः अपेक्षया लघुतरा अस्ति।

10. (a) 2 (b) – 4 (c) वामभागे (d) दक्षिणभागे

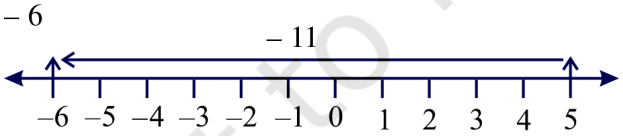
अभ्यासः 6.2

1. (a) 8 (b) 0 (c) - 4 (d) – 5

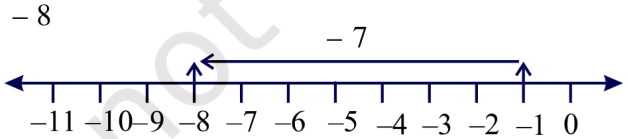
2. (a) 3



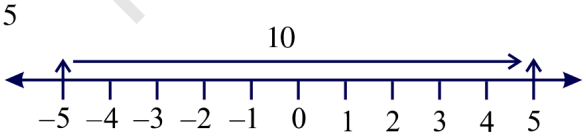
(b) – 6



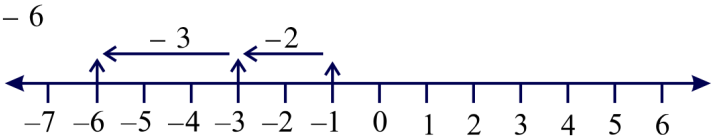
(c) – 8



(d) 5

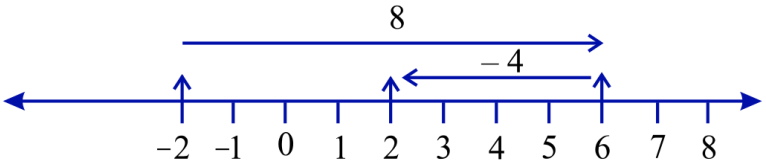


(e) – 6



© not to be

(f) 2



3. (a) 4 (b) 5 (c) 9 (d) -100
   (e) -650 (f) -317
4. (a) -217 (b) 0 (c) -81 (d) 50
5. (a) 4 (b) -38

अभ्यास: 6.3

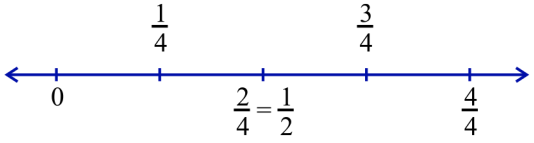
1. (a) 15 (b) -18 (c) 3 (d) -33
   (e) 35 (f) 8
2. (a) < (b) > (c) > (d) >
3. (a) 8 (b) -13 (c) 0 (d) -8
   (e) 5
4. (a) 10 (b) 10 (c) -105 (d) 92

अभ्यास: 7.1

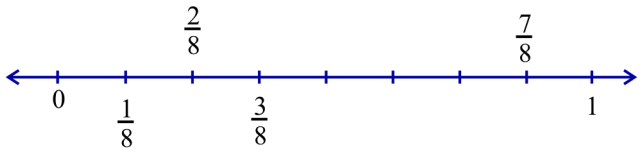
1. (i) $\frac{2}{4}$ (ii) $\frac{8}{9}$ (iii) $\frac{4}{8}$ (iv) $\frac{1}{4}$
   (v) $\frac{3}{7}$ (vi) $\frac{3}{12}$ (vii) $\frac{10}{10}$ (viii) $\frac{4}{9}$
   (ix) $\frac{4}{8}$ (x) $\frac{1}{2}$
3. छायाङ्कितभागः दत्तभिन्नं न दर्शयति।
4. $\frac{8}{24}$ 5. $\frac{40}{60}$
6. (a) आर्या प्रत्येकं स्याण्डविच् इत्याख्यं खाद्यं त्रिषु समानभागेषु वितरति एवं प्रत्येकं स्याण्डविच् इत्यस्य एकः भागः प्रत्येकं जनाय यच्छति। (b) $\frac{1}{3}$
7. $\frac{2}{3}$ 8. 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12; $\frac{5}{11}$
9. 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113; $\frac{4}{12}$
10 $\frac{4}{8}$ 11. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$

अभ्यास: 7.2

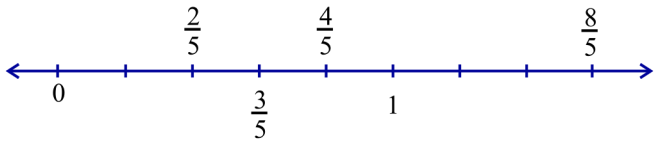
1. (a)



(b)



(c)



2. (a) $6\frac{2}{3}$ (b) $2\frac{1}{5}$ (c) $2\frac{3}{7}$ (d) $5\frac{3}{5}$

(e) $3\frac{1}{6}$ (f) $3\frac{8}{9}$

3. (a) $\frac{31}{4}$ (b) $\frac{41}{7}$ (c) $\frac{17}{6}$ (d) $\frac{53}{5}$

(e) $\frac{66}{7}$ (f) $\frac{76}{9}$

अभ्यास: 7.3

1. (a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$; आम् (b) $\frac{4}{14}, \frac{3}{9}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}, \frac{6}{15}$; न

2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{4}{6}$ (c) $\frac{3}{9}$ (d) $\frac{2}{8}$

(e) $\frac{3}{4}$ (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{4}{8}$ (iii) $\frac{12}{16}$

(iv) $\frac{8}{12}$ (v) $\frac{4}{16}$

(a), (ii); (b), (iv); (c), (i); (d), (v); (e), (iii)

3. (a) 28 (b) 16 (c) 12 (d) 20

(e) 3

4. (a) $\frac{12}{20}$ (b) $\frac{9}{15}$ (c) $\frac{18}{30}$ (d) $\frac{27}{45}$

5. (a) $\frac{9}{12}$ (b) $\frac{3}{4}$

6. (a) समानम् (b) समानम् नास्ति (c) समानम् नास्ति

7. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{6}{7}$ (d) $\frac{3}{13}$

(e) $\frac{1}{4}$

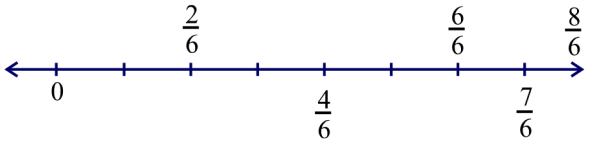
8. रमेश $\rightarrow \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ शीलू $\rightarrow \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ जमाल $\rightarrow \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ आम्

9. (i) → (d) ; (ii) → (e) ; (iii) → (a) ;
(iv) → (c) ; (v) → (b).

अभ्यास: 7.4

1. (a) $\frac{1}{8} < \frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{6}{8}$ (b) $\frac{3}{9} < \frac{4}{9} < \frac{6}{9} < \frac{8}{9}$

(c)



$\frac{5}{6} > \frac{2}{6}$, $\frac{3}{6} > \frac{0}{6}$, $\frac{1}{6} < \frac{6}{6}$, $\frac{8}{6} > \frac{5}{6}$

2. (a) $\frac{3}{6} < \frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{5} > \frac{0}{5}$ (d) $\frac{3}{20} < \frac{4}{20}$

4. (a) $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4} > \frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$ (d) $\frac{6}{6} = \frac{3}{3}$

(e) $\frac{5}{6} < \frac{5}{5}$

5. (a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4} > \frac{2}{8}$

(e) $\frac{3}{5} < \frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9} > \frac{3}{9}$ (g) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10} < \frac{4}{5}$

(i) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ (j) $\frac{6}{10} < \frac{4}{5}$ (k) $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$

6. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{4}{25}$ (d) $\frac{4}{25}$

(e) $\frac{1}{6}$ (f) $\frac{1}{5}$ (g) $\frac{1}{5}$ (h) $\frac{1}{6}$

(i) $\frac{4}{25}$ (j) $\frac{1}{6}$ (k) $\frac{1}{6}$ (l) $\frac{4}{25}$

(a), (e), (h), (j), (k) ; (b), (f), (g) ; (c), (d), (i), (l)

7. (a) नास्ति ; $\frac{5}{9} = \frac{25}{45}$, $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$, $\frac{25}{45} \neq \frac{36}{45}$

(b) नास्ति ; $\frac{9}{16} = \frac{81}{144}$, $\frac{5}{9} = \frac{80}{144}$, $\frac{81}{144} \neq \frac{80}{144}$

(c) आम् ; $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$

(d) नास्ति ; $\frac{1}{15} = \frac{2}{30}$, $\frac{2}{30} \neq \frac{4}{30}$

8. इला न्यूनं पठति। 9 रोहितः

10. द्वयोः कक्ष्ययोः प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णतां प्राप्तविद्यार्थिनां भिन्नः $\frac{4}{5}$ समानः अस्ति।

अभ्यासः 7.5

1. (a) + (b) - (c) +

2. (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{11}{15}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) 1

   (e) $\frac{1}{3}$ (f) 1 (g) $\frac{1}{3}$ (h) $\frac{1}{4}$

   (i) $\frac{3}{5}$

3. पूर्णभित्तिः

4. (a) $\frac{4}{10}$ $(=\frac{2}{5})$ (b) $\frac{8}{21}$ (c) $\frac{6}{6}$ $(= 1)$ (d) $\frac{7}{27}$

5. $\frac{2}{7}$

अभ्यासः 7.6

1. (a) $\frac{17}{21}$ (b) $\frac{23}{30}$ (c) $\frac{46}{63}$ (d) $\frac{22}{21}$

   (e) $\frac{17}{30}$ (f) $\frac{22}{15}$ (g) $\frac{5}{12}$ (h) $\frac{3}{6}$ $(=\frac{1}{2})$

   (i) $\frac{23}{12}$ (j) $\frac{6}{6}$ $(= 1)$ (k) 5 (l) $\frac{95}{12}$

   (m) $\frac{9}{5}$ (n) $\frac{5}{6}$

2. $\frac{23}{20}$ मीटर 3. $\frac{17}{6}$

4. (a) $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{1}{3}$

5. (a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

6. द्वितीयभागस्य लम्बः = $\frac{5}{8}$ मी

7. नन्दिन्या क्रमितदूरम् = $\frac{4}{10}$ (= $\frac{2}{5}$) मी

8. आशायाः अवधानिका अधिकतया पूरिता अस्ति ; $\frac{13}{30}$ इत्यनेन।

9. राहुलः न्यूनसमयं स्वीकरोति ; $\frac{9}{20}$ निमेषेषु ।

अभ्यासः 8.1

1.

	शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)
(a)	0	3	1	2
(b)	1	1	0	4

2.

	शतकम् (100)	दशकम् (10)	एककम् (1)	दशांशः ($\frac{1}{10}$)
(a)	0	1	9	4
(b)	0	0	0	3
(c)	0	1	0	6
(d)	2	0	5	9

3. (a) 0.7 (b) 20.9 (c) 14.6 (d) 102.0
(e) 600.8

4. (a) 0.5 (b) 3.7 (c) 265.1 (d) 70.8
(e) 8.8 (f) 4.2 (g) 1.5 (h) 0.4
(i) 2.4 (j) 3.6 (k) 4.5

5. (a) $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{25}{10}$, $\frac{5}{2}$ (c) 1 ,1 (d) $\frac{38}{10}$, $\frac{19}{5}$
(e) $\frac{137}{10}$, $\frac{137}{10}$ (f) $\frac{212}{10}$, $\frac{106}{5}$ (g) $\frac{64}{10}$, $\frac{32}{5}$

6. (a) 0.2 सेमी (b) 3.0 सेमी (c) 11.6 सेमी (d) 4.2 सेमी
(e) 16.2 सेमी (f) 8.3 सेमी

7. (a) 0 अपि च 1; 1 (b) 5 अपि च 6 ; 5
(c) 2 अपि च 3 ; 3 (d) 6 अपि च 7 ; 6
(e) 9.0 स्वयं 9 पूर्णसंख्या (f) 4 अपि च 5 ; 5

8.

9. A, 0.8 सेमी ; B, 1.3 सेमी ; C, 2.2 सेमी ; D, 2.9 सेमी

10. (a) 9.5 सेमी (b) 6.5 सेमी

अभ्यास: 8.2

1.

	एककम्	दशकम्	शतकम्	संख्या
(a)	0	2	6	0.26
(b)	1	3	8	1.38
(c)	1	2	8	1.28

2. (a) 3.25 (b) 102.63 (c) 30.025 (d) 211.902
(e) 12.241

3.

	एककम्	दशकम्	शतकम्	दशांशः	शतांशः	सहस्रांशः
(a)	0	0	0	2	9	0
(b)	0	0	2	0	8	0
(c)	0	1	9	6	0	0
(d)	1	4	8	3	2	0
(e)	2	0	0	8	1	2

4. (a) 29.41 (b) 137.05 (c) 0.764
(d) 23.206 (e) 725.09

5. (a) शून्यं बिन्दुः शून्यं त्रीणि (b) एकं बिन्दुः द्वे शून्यं
(c) अष्टोत्तरशतं बिन्दुः पञ्च षट् (d) दश बिन्दुः शून्यं पञ्च
(e) शून्यं बिन्दुः शून्यं त्रीणि द्वे (f) पञ्च बिन्दुः शून्यं शून्यम् अष्ट

6. (a) 0 अपि च 0.1 (b) 0.4 अपि च 0.5
(c) 0.1 अपि च 0.2 (d) 0.6 अपि च 0.7
(e) 0.9 अपि च 1.0 (f) 0.5 अपि च 0.6

7. (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{1}{20}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{50}$
(e) $\frac{1}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$ (g) $\frac{33}{500}$

अभ्यास: 8.3

1. (a) 0.4 (b) 0.07 (c) 3 (d) 0.5
(e) 1.23 (f) 0.19 (g) द्वयमपि समानम् अस्ति।
(h) 1.490 (i) द्वयमपि समानम् अस्ति(j) 5.64

अभ्यास: 8.4

1. (a) 0.05 रु (b) 0.75 रु (c) 0.20 रु (d) 50.90 रु
   (e) 7.25 रु
2. (a) 0.15 मी (b) 0.06 मी (c) 2.45 मी (d) 9.07 मी
   (e) 4.19 मी
3. (a) 0.5 सेमी (b) 6.0 सेमी (c) 16.4 सेमी (d) 9.8 सेमी
   (e) 9.3 सेमी
4. (a) 0.008 किमी (b) 0.088 किमी
   (c) 8.888 किमी (d) 70.005 किमी
5. (a) 0.002 किग्रा (b) 0.1 किग्रा (c) 3.750 किग्रा
   (d) 5.008 किग्रा (e) 26.05 किग्रा

अभ्यास: 8.5

1. (a) 38.587 (b) 29.432 (c) 27.63 (d) 38.355
   (e) 13.175 (f) 343.89
2. 68.35 रु 3. 26.30 रु 4. 5.25 मी 5. 3.042 किमी
6. 22.775 किमी 7. 18.270 किग्रा

अभ्यास: 8.6

1. (a) 2.50 रु (b) 47.46 मी (c) 3.04 रु (d) 3.155 किमी
   (e) 1.793 किग्रा
2. (a) 3.476 (b) 5.78 (c) 11.71 (d) 1.753
3. 14.35 रु 4. 6.75 रु
5. 15.55 मी 6. 9.850 किमी
7. 4.425 किग्रा

अभ्यास: 9.1

1.

अङ्कः	मेलनचिह्नम्	छात्राणां संख्या
1	||	2
2	|||	3
3	|||	3
4	𝍸 ||	7
5	𝍸 |	6
6	𝍸 ||	7
7	𝍸	5
8	||||	4
9	|||	3

(a) 12 (b) 8

2.

मधुरम्	मेलनचिह्नम्	विद्यार्थिनां संख्या
लड्डुकम्	𝍸 𝍸 |	11
हैमी	|||	3
कुण्डली	𝍸 ||	7
रसगोलकम्	𝍸 ||||	9
		30

(b) लड्डुकम्

3.

संख्या	मेलनचिह्नम्	कतिवारम्
1	𝍸 ||	7
2	𝍸 ||	7
3	𝍸	5
4	||||	4
5	𝍸 𝍸 |	11
6	𝍸 ||	7

(a) 4 (b) 5 (c) 1 , 6

4. (i ग्रामः D (ii) ग्रामः C (iii) 3 (iv) 28

5. (a) VIII (b) न (c) 12

6. (a) भानुवासरे 12 विद्युद्दीपाः विक्रीताः। अनेन प्रकारेण अन्यदिनेषु विक्रीतविद्युद्दीपानां संख्यां ज्ञातुं शक्यते।
(b) भानुवासरे अधिकविद्युद्दीपाः विक्रीताः।
(c) बुधवासरे तथा शनिवासरे समानसंख्यायां विद्युद्दीपाः विक्रीताः।
(d) बुधवासरे तथा शनिवासरे न्यूनसंख्यायां विद्युद्दीपानां विक्रयणं जातम्।
(c) सप्ताहे आहत्य 86 विद्युद्दीपाः विक्रीताः।

7. (a) मार्टिन् (b) 700 (c) अनवरः, मार्टिन्, रंजीत-सिंहः

अभ्यासः 9.2

1.

	⊗ - 10 पशवः
ग्रामः A	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
ग्रामः B	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
ग्रामः C	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
ग्रामः D	⊗ ⊗ ⊗ ⊗
ग्रामः E	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

(a) 6 (b) ग्रामः B (c) ग्रामः C

2.

	- 100 विद्याथी
1996	
1998	
2000	
2002	
2004	

A (a) 6 (b) 5 पूर्णम् 1 अपूर्णम्

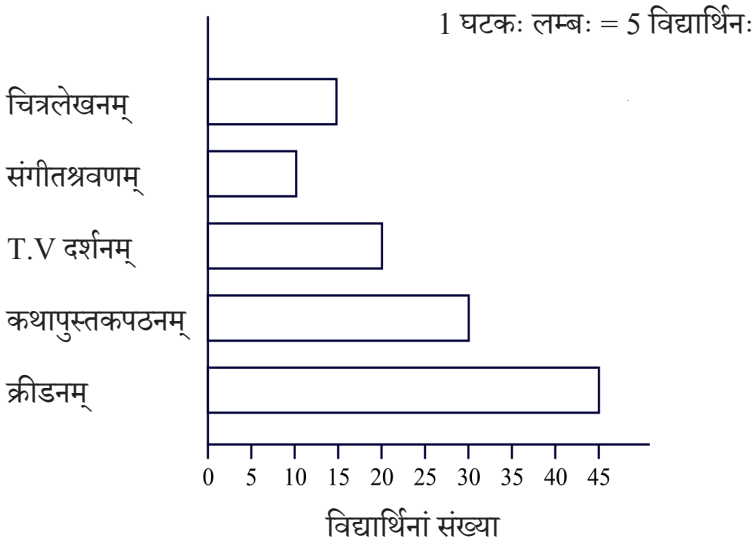
B अपरम्

अभ्यासः 9.3

1. (a) 2002 (b) 1998
2. (a) एषः दण्डालेखः सोमवासरतः शनिवासरपर्यन्तम् विक्रीत-युतकानां संख्यां दर्शयति।
   (b) 1 घटकम् = 5 युतकम्
   (c) शनिवासरः, 60
   (d) मङ्गलवासरः
   (e) 35
3. (a) एषः दण्डालेखाः अजीजद्वारा विभिन्नविषयेषु प्राप्ताङ्कान् दर्शयति।
   (b) हिन्दी
   (c) सामाजिकं विज्ञानम्
   (d) हिन्दी-80, आङ्ग्लम्-60, गणितम्-70, विज्ञानम्-50 अपि च सामाजिकं विज्ञानम्-40

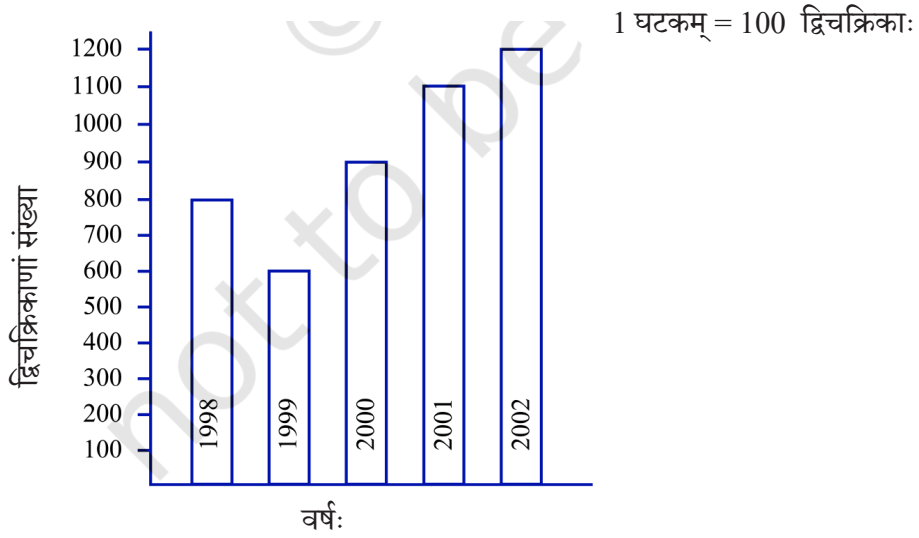
अभ्यासः 9.4

1.



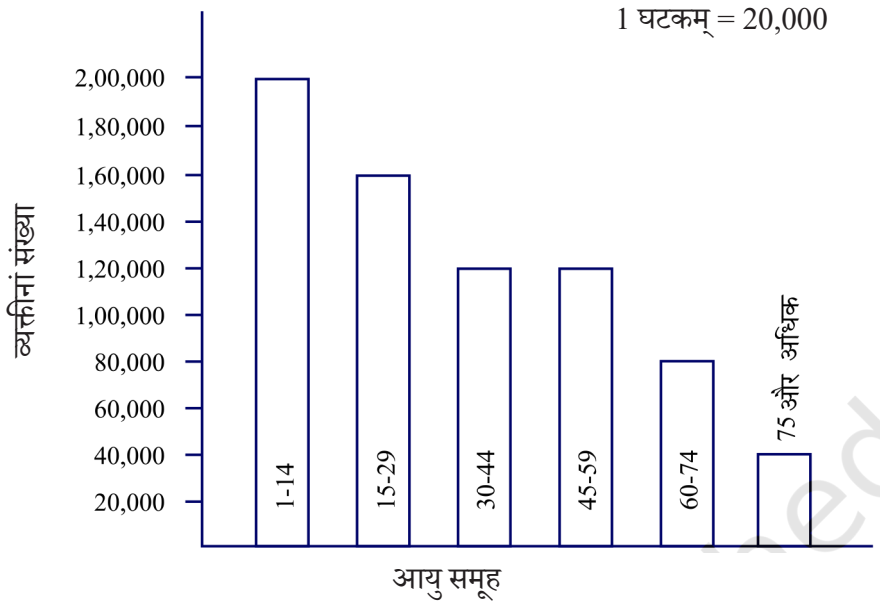
कथापुस्तकम्

2.



(a) 2002 (b) 1999

3.



(a) 30-44, 45-59

(b) 1,20,000

अभ्यास: 10.1

1. (a) 12 सेमी (b) 133 सेमी (c) 60 सेमी (d) 20 सेमी
   (e) 15 सेमी (f) 52 सेमी
2. 100 सेमी अथवा 1 मी
3. 7.5 मी
4. 106 सेमी
5. 9.6 किमी
6. (a) 12 सेमी (b) 27 सेमी (c) 22 सेमी
7. 39 सेमी
8. 48 मी
9. 5 मी
10. 20 सेमी
11. (a) 7.5 सेमी (b) 10 सेमी (c) 5 सेमी
12. 10 सेमी

13. 20,000 रू 14. 7200 रू 15. बुल्-बुल्

16. (a) 100 सेमी (b) 100 सेमी (c) 100 सेमी
सर्वासाम् आकृतीनां परिमापः समानः अस्ति।

17. (a) 6 मी (b) 10 मी (c) योगचिह्नस्य परिमापः अधिकः अस्ति।

अभ्यासः 10.2

1. (a) 9 वर्गघटकम् (b) 5 वर्गघटकम् (c) 4 वर्गघटकम् (d) 8 वर्गघटकम्
(e) 10 वर्गघटकम् (f) 4 वर्गघटकम् (g) 6 वर्गघटकम् (h) 5 वर्गघटकम्
(i) 9 वर्गघटकम् (j) 4 वर्गघटकम् (k) 5 वर्गघटकम् (l) 8 वर्गघटकम्
(m) 14 वर्गघटकम् (n) 18 वर्गघटकम्

अभ्यासः 10.3

1. (a) 12 वर्ग-सेमी (b) 252 वर्ग-सेमी (c) 6 वर्ग-किमी (d) 1.4 वर्ग-मी
2. (a) 100 वर्ग-सेमी (b) 196 वर्ग-सेमी (c) 25 वर्ग-मी
3. (a) अधिकतमक्षेत्रफलम् (b) न्यूनतमक्षेत्रफलम्
4. 6 मी 5. 8000 रू 6. 3.375 वर्ग-मी
7. 15.33 वर्ग-मी 8. 11 वर्ग-मी 9. 12.96 वर्ग-मी
10. (a) 28 वर्ग-सेमी (b) 9 वर्ग-सेमी
11. (a) 40 वर्ग-सेमी (b) 245 वर्ग-सेमी (c) 9 वर्ग-सेमी
12. (a) 240 (b) 42

अभ्यासः 11.1

1. (a) 2n (b) 3n (c) 3n (d) 2n
(e) 5n (f) 5n (g) 6n
2. (a) अपि च (d) ; प्रत्येकस्मिन् शलाकानां संख्या 2 अस्ति।
3. 5n 4. 50b 5. 5s
6. t किमी 7. 8r, 64, 80 8. (x- 4) वर्षाः
9. 1 + 5 10. 2x + 10
11. (a) 3x + 1, x = वर्गाणां संख्या (b) 2x + 1 , x = त्रिभुजानां संख्या

अभ्यासः 11.2

1. 3l 2. 6 l 3. 12 l 4. D = 2r
5. (a + b) + c = a + (b + c)

अभ्यासः 11.3

2. (c), (d)
3. (a) योगः , व्यवकलनम्, योगः, व्यवकलनम्
(b) गुणनम् , विभजनम् , गुणनम्
(c) गुणनम् अपि च योगः, विभजनम् अपि च व्यवकलनम्
(d) गुणनम्, गुणनम् अपि च योगः , गुणनम् अपि च व्यवकलनम्

4. (a) $p + 7$ (b) $p - 7$ (c) $7p$ (d) $\frac{p}{7}$

(e) $-m - 7$ (f) $-5p$ (g) $\frac{-p}{5}$ (h) $-5p$

5. (a) $2m + 11$ (b) $2m - 11$ (c) $5y + 3$ (d) $5y - 3$

(e) $-8y$ (f) $-8y + 5$ (g) $16 - 5y$ (h) $-5y + 16$

6. (a) $t + 4$, $t - 4$, $4t$, $\frac{t}{4}$, $\frac{4}{t}$, $4 - t$, $4 + t$

(b) $2y + 7$, $2y - 7$, $7y + 2$, ….., …..,

अभ्यासः 11.4

1. (a) (i) $y + 5$ (ii) $y - 3$ (iii) $6y$ (iv) $6y - 2$ (v) $3y + 5$

(b) $(3b - 4)$ मीटर्

(c) लम्बः = 5h सेमी
वैशाल्यम् = 5h – 10 सेमी

(d) $s + 8$, $s - 7$, $4s - 10$

(e) $(5v + 20)$ किमी

2. (a) एकस्य पुस्तकस्य मूल्यम् एकस्य अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यात् त्रिगुणितम् अस्ति।

(b) टोन्याः पेटिकायां उत्पीठिकायाः उपरि विद्यमानकाचमणीनां संख्यायाः अष्टगुणिताः काचमणयः सन्ति।

(c) विद्यालयस्य छात्राणाम् आहत्य संख्या अस्माकं कक्ष्यायाः छात्रेभ्यः 20 गुणिता अस्ति।

(d) जग्गू इत्यस्य पितृव्यस्य आयुः जग्गू इत्यस्य आयुषः चतुर्गुणितम् अस्ति। तथा जग्गू इत्यस्य पितृव्यायाः आयुः पितृव्यस्य आयुषः 3 वर्षेण न्यूनम् अस्ति।

(e) बिन्दूनां संख्या पङ्क्तीनां संख्यायाः पञ्चगुणिता अस्ति।

अभ्यासः 11.5

1. (a) x इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(e) x इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(f) x इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(h) n इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(j) p इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(k) y इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

(o) x इत्यस्य चरस्य उपरि समीकरणम्

2. (a) न (b) आम् (c) न (d) न

(e) न (f) आम् (g) न (h) न

(i) आम् (j) आम् (k) न (l) न

(m) न (n) न (o) न (p) न

(q) आम्

3. (a) 12 (b) 8 (c) 10 (d) 14

(e) 4 (f) -2

4. (a) 6 (b) 7 (c) 12 (d) 10

5. (a) 22 (b) 16 (c) 17 (d) 11

अभ्यासः 12.1

1. (a) 4 : 3 (b) 4 : 7
2. (a) 1 : 2 (b) 2 : 5
3. (a) 3 : 2 (b) 2 : 7 (c) 2 : 7
4. 3 : 4 5. 5, 12, 25 , आम्
6. (a) 3 : 4 (b) 14 : 9 (c) 3 : 11 (d) 2 : 3
7. (a) 1 : 3 (b) 4 : 15 (c) 11 : 20 (d) 1 : 4
8. (a) 3 : 1 (b) 1 : 2
9. 17 : 550
10. (a) 115 : 216 (b) 101 : 115 (c) 101 : 216
11. (a) 3 : 1 (b) 16 : 15 (c) 5 :12
12. 15 : 7 13. 20 :100 14. 12 अपि च 8 15. 20 अपि च 16
16. (a) 3 : 1 (b) 10: 3 (c) 13 : 6 (d) 15 : 1

अभ्यासः 12.2

1. (a) आम् (b) न (c) न (d) न
   (e) आम् (f) आम्
2. (a) सत्यम् (b) सत्यम् (c) असत्यम् (d) सत्यम्
   (e) असत्यम् (f) सत्यम्
3. (a) सत्यम् (b) सत्यम् (c) सत्यम् (d) सत्यम्
   (e) असत्यम्
4. (a) आम्, मध्यपदम्- 1 मी, 40 रू ; चरमपदम्-25 सेमी , 160 रू
   (b) आम्, मध्यपदम्-65 ली, 6 कूप्यः ; चरमपदम्- 39ली , 10 कूप्यः
   (c) न
   (d) आम्, मध्यपदम्- 2.5 ली, 4 रू ; चरमपदम्-200 मिली , 50 रू

अभ्यासः 12.3

1. 210 रू 2. 4500 रू 3. 644 मिमी
4. (a) 48 .80 रू (b) 10 किग्रा
5. 5^{o} 6. 30,000 रू 7. 10 कदलीफलानि 8. 5 किग्रा
9. 300 लीटर् 10. मनीषः 11. अनूपः

अभ्यासः 13.1

1. चत्वारि उदाहरणानि सन्ति ; कृष्णफलकम् , उत्पीठिकायाः तलम् , कर्तरी, सान्द्रमुद्रिका
2. रेखा l_2 3. (c) इत्यस्मात् अतिरिक्ताः सर्वे सममितियुताः सन्ति ।

अभ्यासः 13.2

1. (a) 4 (b) 4 (c) 4
   (d) 1 (e) 6 (f) 6
   (g) 0 (h) 0 (i) 5

3. सममित्याः रेखानां संख्या अस्ति :
समबाहुत्रिभुजः 3 ; वर्गः 4 ; आयतः 2 ; समद्विबाहुत्रिभुजः 1 ;
समचतुर्भुजः 2 ; वृत्तः असंख्यातः

4. (a) आम् ; एकः समद्विबाहुत्रिभुजः (b) न
(c) आम् ; समबाहुत्रिभुजः (d) आम् ; एकः विषमबाहुत्रिभुजः

7. (a) A,H,I,M,O,T,U,V,W,X,Y
(b) B,C,D,E,H,I,K,O,X
(c) F,G,J,L,N,P,Q,R,S,Z

अभ्यासः 13.3

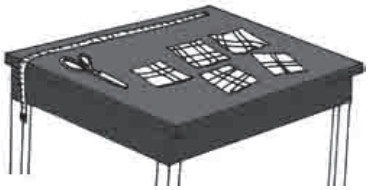
1. सममितिरेखानां संख्या ;
(a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 2
(e) 1 (f) 2

बौद्धिक-व्यायामः

1. आम्रस्य एकस्याः पेटिकायाः द्वयं द्वयम् इति सामूहिकतया गणनेन एकम् आम्रफलम् अवशिष्यते, त्रीणि – त्रीणि इति सामूहिकतया गणनेन आम्रफलद्वयम् अवशिष्यते, चत्वारि-चत्वारि गणनेन त्रीणि आम्रफलानि अवशिष्यन्ते, पञ्च-पञ्च गणनेन चत्वारि तथा षड्-षड् गणनेन पञ्च आम्रफलानि अवशिष्यन्ते, किन्तु सप्ताम्रफलानां समूहं कृत्वा गणनेन आम्रफलानि नावशिष्यन्ते। तर्हि पेटिकायां न्यूनातिन्यूनं कतिचन आम्रफलानि भवेयुः ?

2. एकः बालकः 3, 5, 12 तथा इतोऽपि एकस्याः संख्यायाः ल.सा.अ निष्कासयितुं निर्दिष्टः। किन्तु परिकलनसमये सः 12 इत्यस्य स्थाने 21 इति लिखति तथापि तस्य उत्तरं समीचीनं भवति। चतुर्थसंख्या का स्यात् ?

3. वस्त्रस्य पञ्चभागानां लम्बः 15 मी, 21 मी, 36 मी, 42 मी, 48 मी अस्ति। एकेन मापकेन एते सर्वे अपि पूर्णरूपेण मापिताः भवेयुः तर्हि मापकस्य अधिकतमलम्बः कः स्यात् ?



4. त्रीणि पात्राणि सन्ति। तेषु एकस्मिन् पात्रे केवलं 10 लीटर् क्षीरम् पूरयितुं शक्यते तथा तत्पात्रं सम्पूर्णं पूरितम् अस्ति। अवशिष्टपात्रयोः क्रमशः 7 लीटर् तथा 3 लीटर् क्षीरं पूरयितुं शक्यते। पात्रेषु किमपि मापनचिह्नं नास्ति। एकः ग्राहकः 5 लीटर् क्षीरं वाञ्छति। भवन्तः तस्मै 5 लीटर् क्षीरं कथं ददति ? मापनं कृत्वैव दीयताम्।

5. 27 इत्यस्यां संख्यायां कस्याः द्वि-अङ्कयुक्तसंख्यायाः योजनं कुर्मः चेत् 27 इत्यस्याः विपरीतसंख्यां प्राप्नुमः ?

6. अश्मचूर्णस्य (cement) आर्द्रभागः निर्मीयमाणः आसीत् यस्मिन् आयतनविभागेन अश्मचूर्ण-सैकतयोः मिश्रणानुपातः 1 : 6 अस्ति। आयतनस्य 42 एकक-आर्द्रभागनिर्माणे कतिप्रमाणकम् अश्मचूर्णम् इतोऽपि मेलनीयं भविष्यति यत् नूतनानुपातः 2 : 9 भवेत्।

7. लवणं जलेन सह मिश्रणेन भारानुसारं तयोः अनुपातः क्रमशः 30 : 70 भवति। एवमेव 1 किग्रा मिश्रणात् यदि 100 ग्राम् जलं बाष्परूपेण गच्छति चेत् भारानुसारेण लवणजलयोः अनुपातः कः भविष्यति ?

8. मधुमक्षिकाणां समूहस्य अर्धभागः मधु सङ्ग्रहीतुं सर्षपस्य क्षेत्रं प्रति गतः। पुनरर्धभागस्य 3/4 भागः पाटलवने गतः। अवशिष्टाः 10 मधुमक्षिकाः निर्णयमेव न स्वीकृतवत्यः। तर्हि समूहे कति मधिमक्षिकाः आसन् ?

9. 15 छात्राः वृत्ताकारेण उपविष्टाः सन्ति । ते कथिताः यत् ते स्वाग्रिमस्य अग्रिमं करवस्त्रं दीयतामिति । एषा क्रीडा तदा एव समाप्तिं याति यदा करवस्त्रं तस्य समीपे आगच्छति यः क्रीडारम्भं कृतवान् । इदम् इत्थं लेखितुं शक्यते : $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 13 \longrightarrow 15 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 14 \longrightarrow 1$. अत्र वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् करवस्त्रं सर्वेषां छात्राणां हस्ते आगतम् ।

(i) किं भवेत् यदि मध्ये छात्रद्वयं त्यक्त्वा अग्रिमाय करवस्त्रं दीयते ? किं तदा प्रत्येकं छात्रेण करवस्त्रं प्राप्यते ?

(ii) किं भवेत् यदि मध्ये छात्रत्रयं त्यजामः ? भवन्तः किं पश्यन्ति ? कस्यां स्थितौ सर्वस्मै छात्राय करवस्त्रं लभ्यते तथा कस्यां स्थितौ न ?

इमां क्रीडां 16, 17, 18, 19, 20 छात्रैः सह क्रीडित्वा पश्यन्तु । भवन्तः किं पश्यन्ति ?

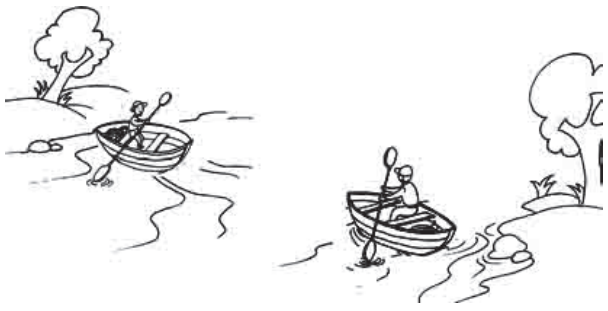
10. संख्याद्वयं 9 अपि च 16 स्वीकुर्म । 9 इत्याख्यां संख्यां 16 इत्यनया संख्यया भागं कृत्वा शेषं प्राप्नुवन्तु । शेषफलं किं स्यात् यदि 2 X 9 इत्यमुं 16 इत्यतः भागं कुर्मः, 3 X 9 इत्यमुं 16 इत्यतः भागं कुर्मः, 4 X 9 इत्यमुं 16 इत्यतः भागं कुर्मः , 5 X 9 इत्यमुं 16 इत्यतः भागं कुर्मः , 15 X 9 इत्यमुं 16 इत्यतः भागं कुर्मः । शेषफलानां सूचीं निर्मान्तु । अधुना 12 अपि च 14 स्वीकुर्वन्तु । शेषफलानां सूचीं निर्मान्तु, यदि 12, 12 X 2 , 12 X 3, 12 X 4 , 12 X 5 , 12 X 6 , 12 X 7 , 12 X 8 , 12 X 9 , 12 X 10 , 12 X 11, 12 X 12, 12 X 13 इत्येतेषां परिणामान् 14 इत्यतः भगं कुर्म । किम् उपर्युक्तयोः द्वयोः अपि स्थित्योः किमपि अन्तरं दृश्यते ?

11. भवद्भ्यः पात्रद्वयं दीयते ययोः धारिता क्रमशः 9 लीटर् तथा 5 लीटर् अस्ति । भवन्तः नलिकया 3 लीटर् जलस्य सङ्ग्रहणं कथं कुर्वन्ति ? यदि पात्रयोः धारिता क्रमशः 8 अपि च 6 लीटर् भवति चेत् किं भवन्तः 5 लीटर् जलस्य सङ्ग्रहणं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

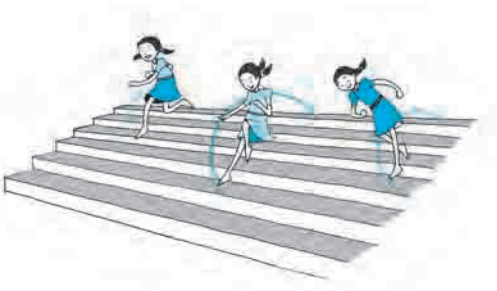
12. एकस्य सभागृहस्य पूर्वभित्तेः क्षेत्रफलं 108 वर्गमीटर् अस्ति, उत्तरभित्तेः क्षेत्रफलं 135 वर्गमीटर् अस्ति , कूट्टिमस्य क्षेत्रफलं 180 वर्गमीटर् अस्ति । एवं सभागृहस्य औन्नत्यं जानन्तु ।

13. यदि अङ्कद्वययुक्तायाम् एकस्यां संख्यायां एककात् 4 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्मः तथा दशकाङ्के 4 इत्यस्य योजनं कुर्मः चेत् लब्धसंख्या द्विगुणिता भवति तर्हि संख्यां जानन्तु ।

14. द्वौ नाविकौ एकस्याः एव नद्याः द्वाभ्यां तटाभ्यां विरुद्धदिशि चलनं कुर्वन्तौ 45 निमेषेषु परस्परं मिलतः । तौ तावत्पर्यन्तं नावं चालयन्तः एव भवन्ति यावत्पर्यन्तं अपरतटं सम्प्राप्य पुनः प्रारम्भतटं प्रतिप्राप्नुयुः । तौ द्वितीयवारं परस्परं कदा मिलतः ?



15. तिस्रः बालिकाः सोपानम् अवतरन्त्यः सन्ति । एका बालिका सोपानद्वयम् एकस्मिन् पदे अवतरति । द्वितीया सोपानत्रयं तथा तृतीया सोपानचतुष्टयम् एकस्मिन् पदे अवतरतः । ताः तिस्रः अपि सोपानारम्भात् पूर्वस्थानेषु स्वपादचिह्नं त्यजन्त्यः चलन्ति । ताः तिस्रः अपि अन्तिमसोपानं सहैव प्राप्नुवन्ति । कतिषु सोपानेषु केवलं एकस्य पादयुग्मस्य चिह्नं भवितुमर्हति ? किं तादृशमपि सोपानम् अस्ति यत् यस्मिन् सोपाने पादानां चिह्नमेव नास्ति ?



16. सैनिकानाम् एकः समूहः पङ्क्तित्रये स्थातुं कथितः । अन्ते एकः सैनिकः अवशिष्यते । यदा ते पञ्चपङ्क्तिषु स्थातुं कथिताः तदा द्वौ सैनिकौ तथैव सप्तपङ्क्तिषु स्थातुं कथिताः तर्हि त्रयः सैनिकाः अवशिष्यन्ते । समूहे कति सैनिकाः आसन् ?

17. चतुर्वारं 9 इत्यस्याः संख्यायाः प्रयोगं कृत्वा + , - , x इत्यादि-विभिन्न-सङ्क्रियाः उपयुज्य 100 प्राप्नुवन्तु ।

18. 2 X 2 X 2 …. X 2 (30 वारं) इति गुणनफले कति अङ्काः भवन्ति ?

19. यदि एकः जनः 30 किमी प्रति होरावेगेन चलति तर्हि स्व-गन्तव्यस्थानं 5 निमेषात्मक-विलम्बेन प्राप्नोति । यदि सः 40 किमी वेगेन गच्छति तर्हि 10 निमेषेभ्यः पूर्वमेव प्राप्नोति । गमनदूरं जानन्तु ।

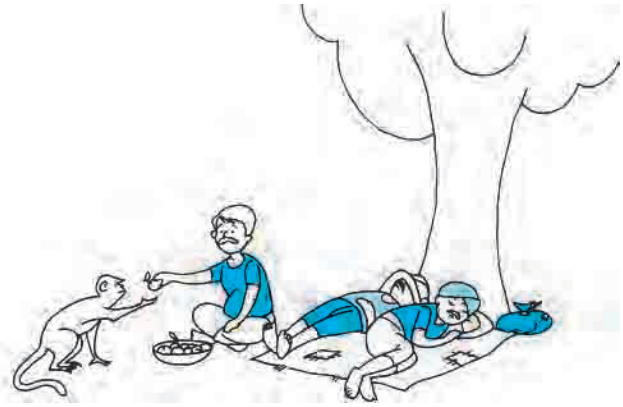
20. द्वयोः यानयोः वेगयोः अनुपातः 2 : 3 अस्ति । यदि प्रथमयानं 50 किमी दूरं 3 होरायां प्राप्नोति तर्हि द्वितीययानं 2 होरायां कियद्दूरं क्रमति ?

21. नटराजस्य आयस्य व्ययेन सह अनुपातः 7 : 5 अस्ति । यदि सः एकस्मिन् मासे 2000 रू संरक्षति तर्हि तस्यः आयः कियान् भवति ?

22. एकस्य क्षेत्रस्य लम्बवैशाल्ययोः अनुपातः 3 : 5 अस्ति । अस्मिन् रक्षकावरणं स्थापयितुं 3200 रू व्ययः भवति यश्च 2 रू प्रतिमीटर्-मूल्येन अस्ति । क्षेत्रं 10 रू प्रति वर्गमीटर्-मूल्येन विकसितं कर्तुं कियान् व्ययः भविष्यति ?

23. अङ्गुष्ठस्य कृते एकं, तर्जन्याः द्वे, मध्यमायाः त्रीणि, अनामिकायाः चत्वारि, कनिष्ठिकस्य पञ्च, पुनः ततः एव अनामिकायाः षट्, मध्यमायाः सप्त, तर्जन्याः अष्ट, अङ्गुष्ठस्य नव , तर्जन्याः दश, मध्यमायाः एकादश, अनामिकायाः द्वादश, कनिष्ठिकायाः त्रयोदश, अनामिकायाः चतुर्दश एवमेव गणनं कुर्वन्तः कस्याः अङ्गुल्याः कृते 1000 इत्यस्य गणनं कुर्वन्ति ?

24. त्रयः सुहृदः आम्रवनात् कतिचन आम्रफलानि उत्पाटितवन्तः अपि च तानि एकत्रीकृत्य शयनं कृतवन्तः । स्वल्पसमयानन्तरं एकः उत्थाय तानि त्रिषु भागेषु विभागं कृतवान् तदा अवशिष्टम् एकम् अम्रं वानराय दत्त्वा स्वभागं निक्षिप्य शयनं कृतवान् । स्वल्पसमये द्वितीयः उत्थाय त्रिषु भागेषु आम्रविभजनं कृत्वा अवशिष्टम् एकं वानराय दत्त्वा स्वभागं निक्षिप्य शयनमकरोत् । इतोऽपि स्वल्पसमयानन्तरं तृतीयः उत्थाय अवशिष्टाम्रेषु भागत्रयं कृत्वा एकं वानराय दत्त्वा शयनमकरोत्। पुनः स्वल्पसमयानन्तरं त्रयः अपि सहैव उत्तिष्ठवन्तः तत्र 30 आम्रफलानि आसन् । तर्हि वदन्तु आहत्य कति आम्रफलानि उत्पाटितवन्तः आसन् ?



25. **विशिष्टसंख्या**

एका संख्या अस्ति या बहुविशिष्टा अस्ति । एषा संख्या स्वाङ्कानां योगफलस्य त्रिगुणिता वर्तते । तर्हि का सा संख्या भवितुम् अर्हति ?

26. ऋजुरेखायां 10 वृक्षाणां तथा निर्वापणं कुर्युः यथा प्रत्येकं रेखायां 4 वृक्षाः स्युः ।

27. अधोलिखितसंख्यानां क्रमेण तदग्रिमसंख्यां लिखन्तु ।

(a) 1, 5, 9 , 13, 17 , 21, …

(b) 2, 7, 12, 17, 22, …

(c) 2, 6, 12, 20, 30 , …

(d) 1, 2, 3, 5, 8, 13 , …

(e) 1, 3, 6, 10, 15, …

28. अधोदत्तकथनस्य क्रमं पश्यन्तु ।

31 x 39 = 13 x 93

प्रत्येकस्मिन् पक्षे द्वे अपि संख्ये सहअभाज्यसंख्ये स्तः अपि च सङ्गतसंख्यानां क्रमं संख्याः परिवर्तयित्वा प्राप्तुं शकयते । एवमेव इतोऽपि कतिचन संख्यायुग्मान् लेखितुं प्रयासं कुर्वन्तु ।

उत्तरमाला

1. 119
2. 28
3. 3 मी
4. सः तेभ्यः पृथक् एकं पात्रं स्वीकरोति।
3. लीटर्-पात्रस्य साहाय्येन 10 लीटर् क्षीरपात्रेण 9 लीटर् क्षीरं रिक्तपात्रे स्थापयति तदा 1 लीटर् क्षीरं 10 लीटर् पात्रे अवशिष्यते। 7 लीटर् पात्रस्य साहाय्येन पृथक्पात्रे स्थापितं क्षीरं 10 लीटर् पात्रे स्थापयति तदा पूर्वावशिष्टं 1 लीटर् अनन्तरं स्थापितं 7 लीटर् मेलयित्वा 8 लीटर् अभवत्। 3 लीटर् पात्रेण अधुना 8 लीटर् मध्ये 3 लीटर् निष्कासयति चेत् 10 लीटर् पात्रे 5 लीटर् क्षीरम् अवशिष्यते। तदेव सः ग्राहकाय ददाति।
5. 14, 25, 36, 47, 58, 69
6. 2 एककम्
7. 1 : 2
8. 80
9. (i) न सर्वेभ्यः न लभ्यते।

   (ii) सर्वे प्राप्नुवन्ति।
10. 9, 2, 11, 4, 13, 6, 15, 8, 1, 10, 3, 12, 5, 14, 7,

    12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 12, 10, 8, 6, 4
11. 9 लीटर् पात्रं पूरयन्तु। 5 लीटर् पात्रस्य साहाय्येन तस्मात् 5 लीटर् जलं निष्कासयन्तु। इदानीं 5 लीटर् पात्रं रिक्तं कुर्वन्तु। अवशिष्टं 4 लीटर् जलं 5 लीटर् पात्रे स्थापयन्तु।

    अधुना 9 लीटर् पात्रं पुनः पूरयन्तु। ततः 5 लीटर् पात्रं पूरयन्तु। तदा 9 लीटर् पात्रे 8 लीटर् जलम् अवशिष्यते। 5 लीटर् पात्रं रिक्तं कुर्वन्तु। 8 लीटर् जलात् 5 लीटर् पात्रं पूरयन्तुइ चेत् 9 लीटर् पात्रे 3 लीटर् जलम् अवशिष्यते।
12. लम्बः = 9 मी
13. 36
14. 90 निमेषाः
15. चिह्नयुक्तसोपानानि – 2, 3, 9, 10

    चिह्नरहितसोपानानि - 1, 5, 7, 11
16. 52
17. $99 + \frac{9}{9}$

18. 10

19. 30 किमी

20. 50 किमी

21 7000 रू प्रतिमासम्

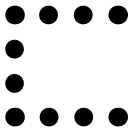
22. 15,00,000 रू

23. तर्जनी

24. 106 आम्रफलानि

25. 27

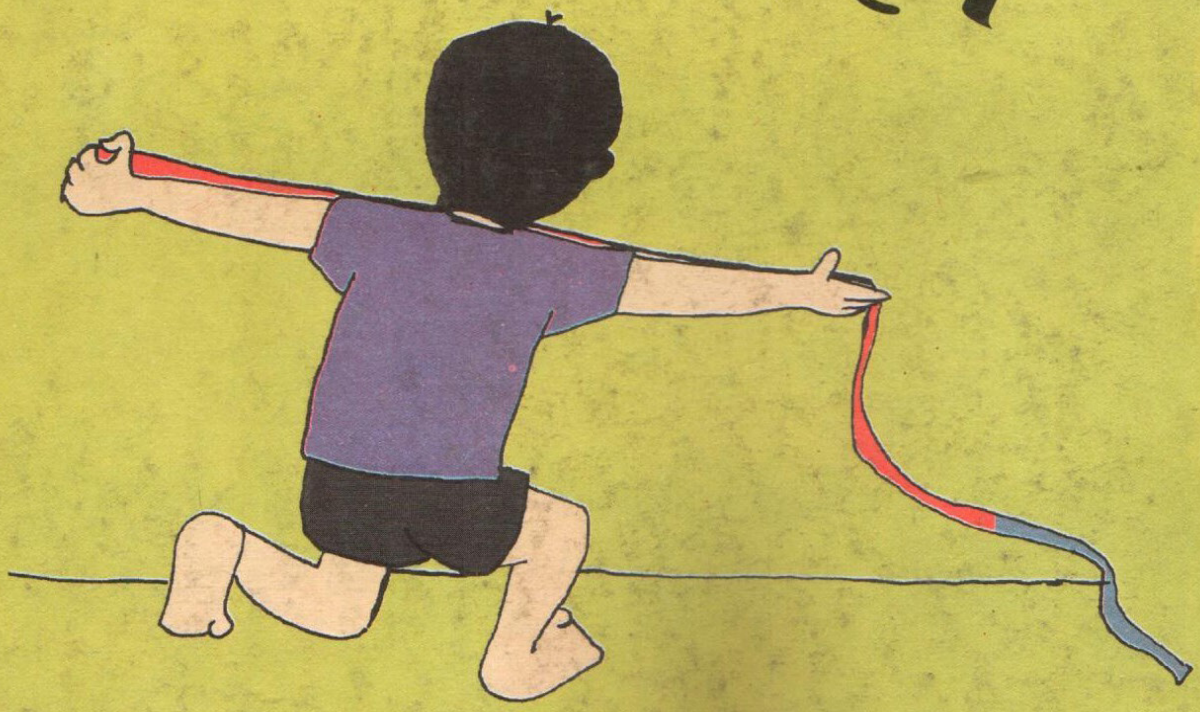
26. एकां व्यवस्थां कर्तुं शक्यते।



27. (a) 25 (b) 27 (c) 42 (d) 21 (e) 21

28. तादृशः एकः युग्मः - 13 x 62 = 31 x 26

गणित



0651

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 81-7450-495-8